EXERCICE 4

Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. F est la primitive de f qui s'annule en 2.

Pour tout réel x, on a $F'(x) = f(x)$. Le tableau de variation de la fonction f montre en particulier que f est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et s'annule en 0. On en déduit que

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour tout réel x de $[2, 3]$, on a $0 \leq f(x) \leq 4e^{-2}$. Par positivité de l'intégrale, on a alors $F(3) = \displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx \geq 0$ et par croissance de l'intégrale, on a

$$F(3) = \int_2^3 f(x)\, dx \leq \int_2^3 4e^{-2}\, dx = (3-2).4e^{-2} = 4e^{-2}.$$

Donc

$$\boxed{0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}.}$$

Partie B

1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Ainsi, f' est strictement positive sur $]0, 2[$, strictement négative sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et s'annule en 0 et 2. f est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. Le tableau de variation de la fonction f est bien celui donné dans la partie **A**.

b) Soit x un réel. Soit M le point de (C) d'abscisse x et N le point de (Γ) de même abscisse.

$$y_M - y_N = f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2-1)e^{-x}.$$

Cette dernière expression est du signe de $x^2 - 1$. On en déduit que

- $y_M - y_N > 0$ si $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$,
- $y_M - y_N < 0$ si $x \in]-1, 1[$,
- $y_M - y_N = 0$ si $x \in \{-1, 1\}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(C) \text{ est strictement au-dessus de } (\Gamma) \text{ sur }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,\\ (C) \text{ est strictement au-dessous de } (\Gamma) \text{ sur }]-1, 1[\\ (C) \text{ et } (\Gamma) \text{ se coupent aux points de coordonnées } (-1, e) \text{ et } (1, e^{-1})\end{array}}$$

2. a) H est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$H'(x) = (-2x-2)e^{-x} + (-x^2-2x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(x^2+2x+1-2x-2) = (x^2-1)e^{-x} = h(x).$$

Donc

$$\boxed{H \text{ est une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b) Soit α un réel supérieur ou égal à 1. D'après 1. b), pour tout réel x de $[1, \alpha]$, on a $g(x) \leq f(x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(a) &= \int_1^\alpha (fx) - g(x))\, dx = \int_1^\alpha (x^2-1)e^{-x}\, dx = \int_1^\alpha h(x)\, dx\\ &= [H(x)]_1^\alpha = \left[(-x^2-2x-1)e^{-x}\right]_1^\alpha = -(\alpha^2+2\alpha+1)e^{-\alpha} + 4e^{-1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout réel } a,\ \mathscr{A}(a) = \frac{4}{e} - (\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha}.}$$

c) Pour tout réel a, on a $-(\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha} = -\alpha^2 e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha}$. D'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que chacun de ces termes tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = \frac{4}{e}.}$$

3. a) Voir graphique plus loin.

b) $PQ = |x_P - x_Q| = x_P - x_Q$ (par lecture graphique, $x_P > x_Q$) et $f(x_P) = m = g(x_Q)$.

c) L'égalité $PQ = 1$ fournit $x_Q = x_P - 1$. L'égalité $f(x_P) = g(x_Q)$ s'écrit alors $x_P^2 e^{-x_P} = e^{-(x_P - 1)}$ ou encore (puisque $e^{-x_P} \neq 0$) $x_P^2 = e$ ou enfin $x_P = -\sqrt{e}$ (car $x_P \leq -1$).

$$\boxed{x_P = -\sqrt{e} = -1,64...}$$