

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$. On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$; quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

b) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer sa fonction dérivée f' .

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe \mathcal{C} .

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

a) Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n .

b) Calculer I_1 puis I_2 .

c) Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On le fera apparaître sur le graphique de la question 1c).

3) a) Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$.

b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.