EXERCICE 2

1)

a) Limite de f en $-\infty$.

- D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$.
- D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$.

Pour tout réel x, $f(x) = e \times \dfrac{x^2}{e^x} = e \times \dfrac{1}{e^x/x^2}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$ et finalement que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Conséquence graphique. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 2xe^{1-x} + x^2(-e^{1-x}) = xe^{1-x}(2-x).$$

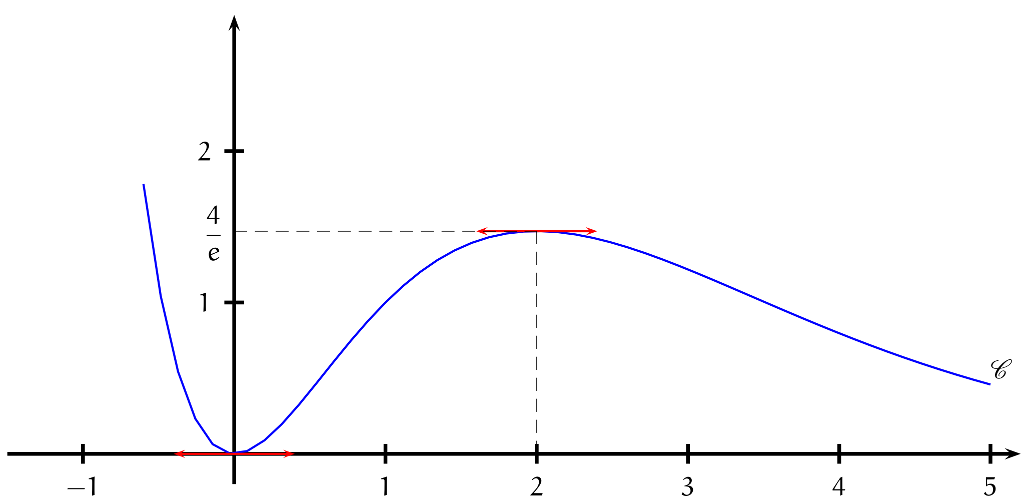
Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = x(2-x)e^{1-x}.}$$

c) Pour tout réel x, on a $e^{1-x} > 0$. Donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et strictement négative sur $]0, 2[$. Enfin, la fonction f' s'annule en 0 et 2.

Tableau de variation de f et graphe de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0



2)

a) Soit n un entier naturel non nul.
Pour x élément de $[0, 1]$, posons

$$u(x) = x^{n+1} \text{ et } v(x) = -e^{1-x}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x élément de $[0, 1]$, on a

$$u'(x) = (n+1)x^n \text{ et } v'(x) = e^{1-x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\, dx \\
&= \left[x^{n+1}(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x})\, dx \\
&= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -1 + (n+1)I_n.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.}$$

b) Le calcul précédent reste valable quand $n = 0$. Il fournit

$$I_1 = I_0 - 1 = -1 + \int_0^1 e^{1-x}\, dx = -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -1 + (-1 + e) = e - 2.$$

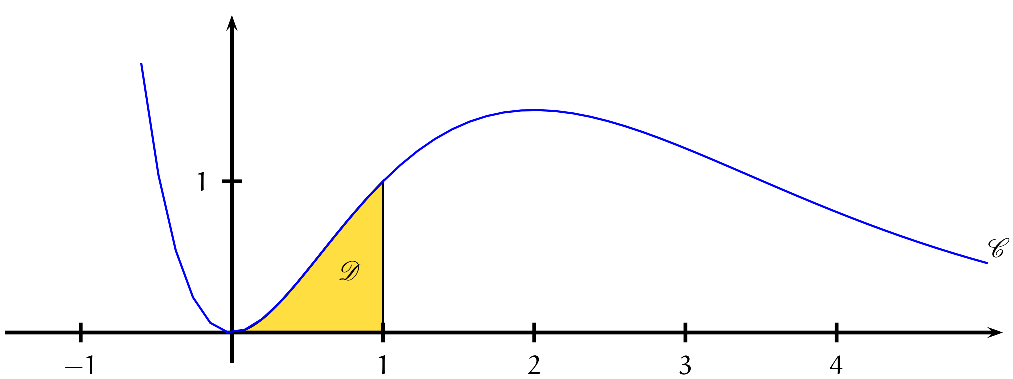
Puis,

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5.$$

Donc,

$$\boxed{I_1 = e - 2 \text{ et } I_2 = 2e - 5.}$$

c) Puisque la fonction f est positive sur $[0, 1]$, le nombre I_2 est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ ci-dessous, exprimée en unités d'aire, l'unité d'aire valant 4 cm^2.



3)

a) Soit n un entier naturel non nul.
Soit x un réel de $[0, 1]$. On a $1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 - 0$ ou encore $0 \leq 1 - x \leq 1$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ ou plus simplement $1 \leq e^{1-x} \leq e$. On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n et on obtient $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$. Donc,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1],\ x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n.}$$

b) Par croissance (et linéarité) de l'intégrale, on obtient alors

$$\int_0^1 x^n \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \leq e \int_0^1 x^n \, dx,$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, \ \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.}$$

Comme $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{e}{n+1}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

