EXERCICE 3

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-e^{-x}) = 2$. Comme $2 > 0$ et comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b. Soit x un réel positif.

$$f(x)-(2x-2) = (x-1)(2-e^{-x})-(2x-2) = 2(x-1)-e^{-x}(x-1)-2(x-1) = -e^{-x}(x-1) = (-x)e^{-x}+e^{-x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-2)) = 0$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = 2x-2 \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

c. Soit x un réel positif.
Soient M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse.

$$y_M - y_N = f(x)-(2x-2) = -e^{-x}(x-1).$$

Puisque $e^{-x} > 0$, le signe de $y_M - y_N$ est le signe de $-(x-1)$ et donc
- si $0 \leq x < 1$, $y_M - y_N > 0$ ou encore $y_M > y_N$,
- si $x > 1$, $y_M - y_N < 0$ ou encore $y_M < y_N$,
- si $x = 1$, $y_M - y_N = 0$ ou encore $y_M = y_N = 2(1-1) = 0$.

On a montré que

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est strictement au-dessus de } \Delta \text{ sur } [0,1[, \text{ strictement au-dessous sur }]1,+\infty[\text{ et } \mathscr{C} \text{ coupe } \Delta \text{ au point } (1,0).}$$

2. a. f est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = 1.(2-e^{-x})+(x-1)e^{-x} = xe^{-x}+2-2e^{-x} = xe^{-x}+2(1-e^{-x}).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ f'(x) = xe^{-x}+2(1-e^{-x}).}$$

b. Soit x un réel strictement positif. Alors $-x < 0$ puis $e^{-x} < e^{0}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ceci fournit $e^{-x} < 1$ et donc $2(1-e^{-x}) > 0$. D'autre part, $xe^{-x} > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } x,\ f'(x) > 0.}$$

c. $f'(0) = 0e^{-0}+2(1-e^{-0}) = 0$. On en déduit que $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

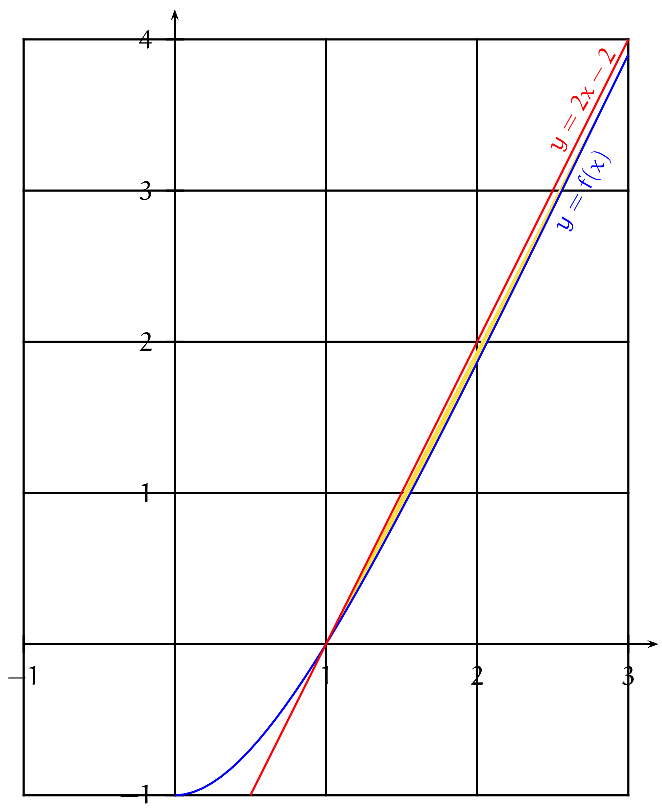
3. Notons $\mathscr{D}$ le domaine considéré et $\mathscr{A}$ son aire exprimée en cm^2.
D'après la question 1.c., la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ sur l'intervalle $[1;3]$. L'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire est donc égale à $\displaystyle\int_1^3((2x-2)-f(x))\,dx$ ou encore $\displaystyle\int_1^3(x-1)e^{-x}\,dx$. Notons I cette intégrale et calculons I.

Pour x réel élément de $[1;3]$, posons $u(x)=x-1$ et $v(x)=-e^{-x}$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[1;3]$ et pour tout réel x de $[1;3]$, on a $u'(x)=1$ et $v'(x)=e^{-x}$. De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3(x-1)e^{-x}\,dx=\left[(x-1)(-e^{-x})\right]_1^3-\int_1^3 1.(-e^{-x})\,dx=-(3-1)e^{-3}+(1-1)e^{-1}-\int_1^3(-e^{-x})\,dx\\
&=-2e^{-3}-\left[e^{-x}\right]_1^3=-2e^{-3}-(e^{-3}-e^{-1})=e^{-1}-3e^{-3}.
\end{aligned}$$

L'unité d'aire est égale à 4 cm^2 et donc

$$\boxed{\mathscr{A}=4(e^{-1}-3e^{-3})\text{ cm}^2\text{ ou encore }\mathscr{A}=0,874\ldots\text{ cm}^2.}$$



4. a. Soit x un réel positif et M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x. La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en M est parallèle à la droite Δ si et seulement si $f'(x)$, le coefficient directeur de (T), est égal à 2, le coefficient directeur de Δ.

$$\begin{aligned}
f'(x)=2 &\Leftrightarrow xe^{-x}+2(1-e^{-x})=2\Leftrightarrow xe^{-x}-2e^{-x}=0\Leftrightarrow(x-2)e^{-x}=0\\
&\Leftrightarrow x-2=0\ (\text{car } e^{-x}\neq 0)\\
&\Leftrightarrow x=2.
\end{aligned}$$

Comme de plus $f(2)=(2-1)(2-e^{-2})=2-e^{-2}$,

$$\boxed{A(2,2-e^{-2}).}$$

b. Δ est la droite d'équation $-2x + y + 2 = 0$ et A est le point de coordonnées $(2, 2 - e^{-2})$. Donc la distance du point A à la droite Δ exprimée en unités de longueur vaut

$$\frac{|-2(2) + (2 - e^{-2}) + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}}.$$

Comme l'unité de longueur est égale à 2 cm,

$$\boxed{d(A, \Delta) = \frac{2e^{-2}}{\sqrt{5}} \text{ cm} = 0,121\ldots \text{cm}.}$$

