

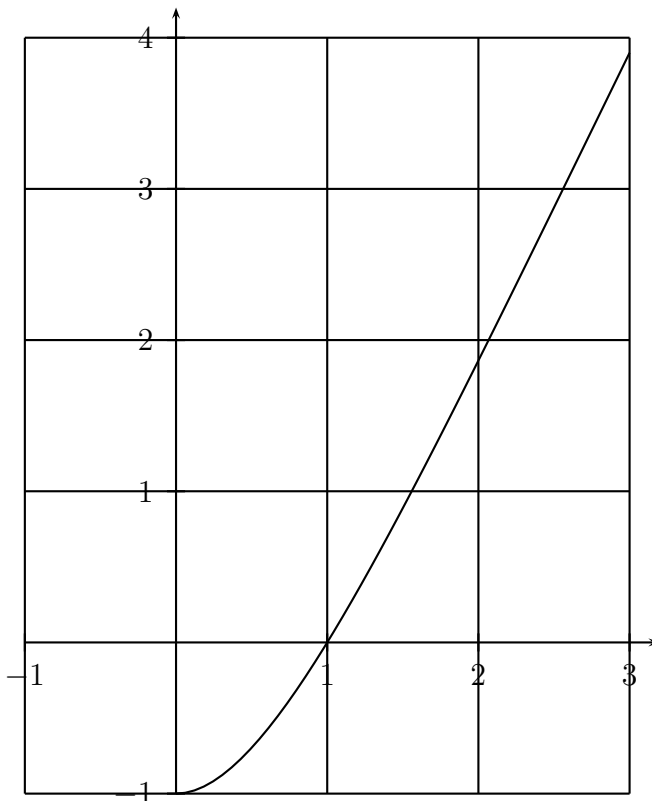
EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x}).$$

Sa courbe représentative \mathcal{C} est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2cm).



- 1)
 - a) Etudier la limite de f en $+\infty$.
 - b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à \mathcal{C} .
 - c) Etudier la position relative de \mathcal{C} et Δ .
- 2)
 - a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.
 - b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
 - c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .
- 3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
- 4)
 - a) Déterminer le point A où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à Δ .
 - b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ .

EXERCICE 3

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - e^{-x}) = 2$. Comme $2 > 0$ et comme d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b. Soit x un réel positif.

$$f(x) - (2x - 2) = (x - 1)(2 - e^{-x}) - (2x - 2) = 2(x - 1) - e^{-x}(x - 1) - 2(x - 1) = -e^{-x}(x - 1) = (-x)e^{-x} + e^{-x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$. Comme d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 2)) = 0$. Ceci montre que

la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

c. Soit x un réel positif.

Soient M le point de \mathcal{C} d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse.

$$y_M - y_N = f(x) - (2x - 2) = -e^{-x}(x - 1).$$

Puisque $e^{-x} > 0$, le signe de $y_M - y_N$ est le signe de $-(x - 1)$ et donc

- si $0 \leq x < 1$, $y_M - y_N > 0$ ou encore $y_M > y_N$,
- si $x > 1$, $y_M - y_N < 0$ ou encore $y_M < y_N$,
- si $x = 1$, $y_M - y_N = 0$ ou encore $y_M = y_N = 2(1 - 1) = 0$.

On a montré que

\mathcal{C} est strictement au-dessus de Δ sur $[0, 1[$, strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$ et \mathcal{C} coupe Δ au point $(1, 0)$.

2. a. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel positif x , on a

$$f'(x) = 1 \cdot (2 - e^{-x}) + (x - 1)e^{-x} = xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}).$$

Pour tout réel positif x , $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

b. Soit x un réel strictement positif. Alors $-x < 0$ puis $e^{-x} < e^0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} . Ceci fournit $e^{-x} < 1$ et donc $2(1 - e^{-x}) > 0$. D'autre part, $xe^{-x} > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

Pour tout réel strictement positif x , $f'(x) > 0$.

c. $f'(0) = 0e^{-0} + 2(1 - e^{-0}) = 0$. On en déduit que \mathcal{C} admet en son point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée f' est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Tableau de variations de f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	-1	$+\infty$

3. Notons \mathcal{D} le domaine considéré et \mathcal{A} son aire exprimée en cm^2 .

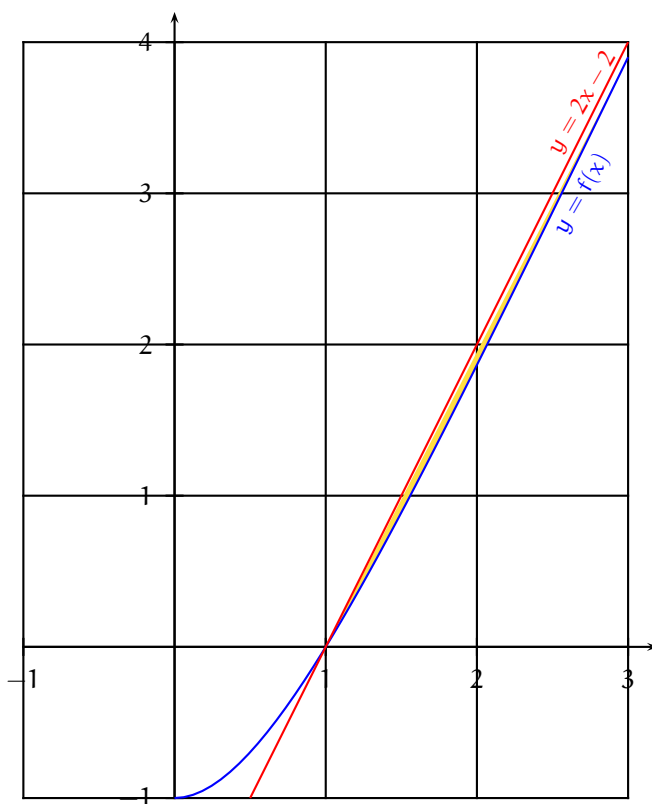
D'après la question 1.c., la courbe \mathcal{C} est au-dessous de la droite Δ sur l'intervalle $[1;3]$. L'aire de \mathcal{D} exprimée en unités d'aire est donc égale à $\int_1^3 ((2x-2) - f(x)) dx$ ou encore $\int_1^3 (x-1)e^{-x} dx$. Notons I cette intégrale et calculons I .

Pour x réel élément de $[1;3]$, posons $u(x) = x-1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[1;3]$ et pour tout réel x de $[1;3]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 (x-1)e^{-x} dx = [(x-1)(-e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 1 \cdot (-e^{-x}) dx = -(3-1)e^{-3} + (1-1)e^{-1} - \int_1^3 (-e^{-x}) dx \\ &= -2e^{-3} - [e^{-x}]_1^3 = -2e^{-3} - (e^{-3} - e^{-1}) = e^{-1} - 3e^{-3}. \end{aligned}$$

L'unité d'aire est égale à 4 cm^2 et donc

$$\mathcal{A} = 4(e^{-1} - 3e^{-3}) \text{ cm}^2 \text{ ou encore } \mathcal{A} = 0,874\dots \text{ cm}^2.$$



4. a. Soit x un réel positif et M le point de \mathcal{C} d'abscisse x . La tangente (T) à la courbe \mathcal{C} en M est parallèle à la droite Δ si et seulement si $f'(x)$, le coefficient directeur de (T) , est égal à 2, le coefficient directeur de Δ .

$$\begin{aligned} f'(x) = 2 &\Leftrightarrow xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Comme de plus $f(2) = (2-1)(2 - e^{-2}) = 2 - e^{-2}$,

$$A(2, 2 - e^{-2}).$$

b. Δ est la droite d'équation $-2x + y + 2 = 0$ et A est le point de coordonnées $(2, 2 - e^{-2})$. Donc la distance du point A à la droite Δ exprimée en unités de longueur vaut

$$\frac{|-2(2) + (2 - e^{-2}) + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}}.$$

Comme l'unité de longueur est égale à 2 cm,

$$d(A, \Delta) = \frac{2e^{-2}}{\sqrt{5}} \text{ cm} = 0,121 \dots \text{ cm.}$$