BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

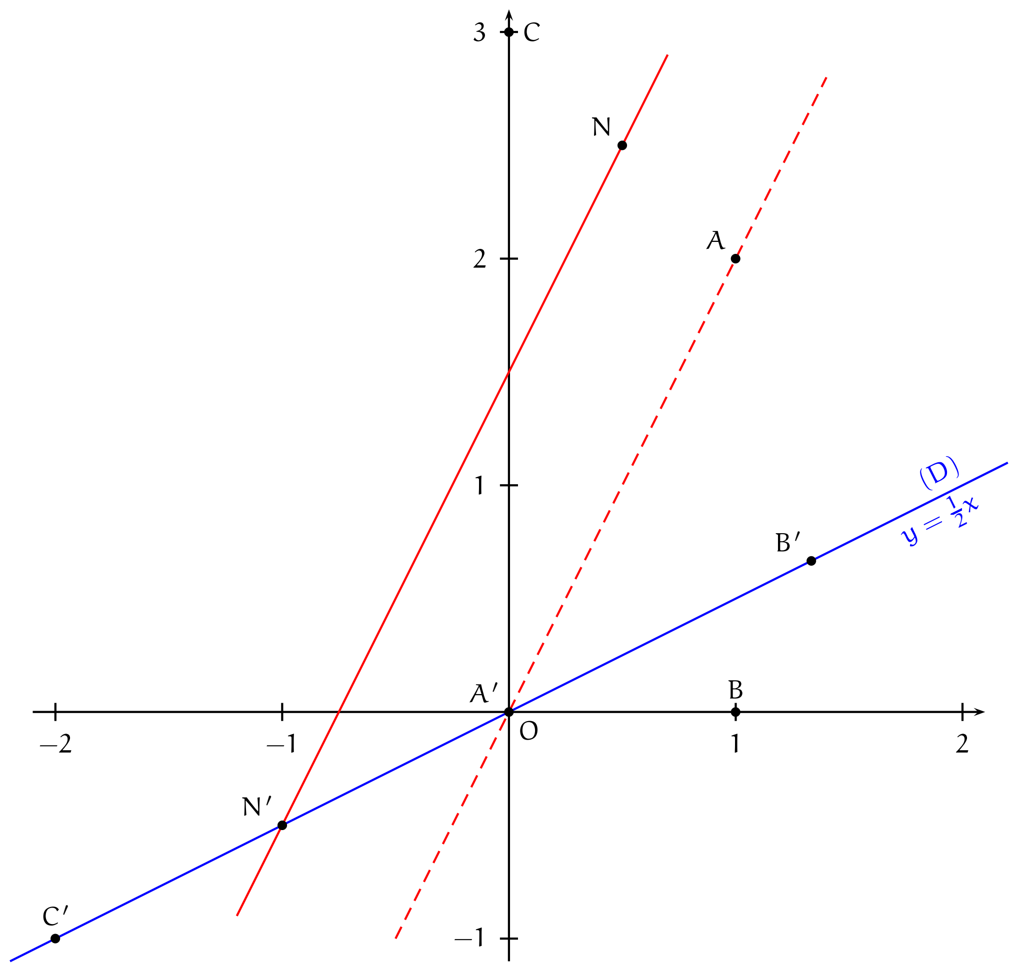
Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1°) Si $z = z_A = 1 + 2i$, $z' = \dfrac{1}{6}\left((3 + 4i)(1 + 2i) + 5(1 - 2i)\right) = 0$.
Si $z = z_B = 1$, $z' = \dfrac{1}{6}\left((3 + 4i) \times 1 + 5 \times 1\right) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}i$.
Si $z = z_C = 3i$, $z' = \dfrac{1}{6}\left((3 + 4i) \times 3i + 5 \times (-3i)\right) = -2 - i$.

$$\boxed{A'(0, 0),\ B'\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ et } C'(-2, -1).}$$



2°) Posons encore $z' = x' + iy'$ où x' et y' sont deux réels. On a

$$z' = \frac{1}{6}((3 + 4i)(x + iy) + 5(x - iy)) = \frac{1}{6}((8x - 4y) + i(4x - 2y)) = \frac{1}{3}((4x - 2y) + i(2x - y)).$$

$$\boxed{x' = \frac{1}{3}(4x - 2y) \text{ et } y' = \frac{1}{3}(2x - y).}$$

3°) Soit M un point du plan. On note z son affixe puis x et y les parties réelles et imaginaires de z de sorte que $M(x, y)$. D'après la question précédente,

$$f(M) = M \Leftrightarrow \frac{1}{3}(4x - 2y) = x \text{ et } \frac{1}{3}(2x - y) = y \Leftrightarrow 4x - 2y = 3x \text{ et } 2x - y = 3y \Leftrightarrow x = 2y \text{ et } 2x = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des points invariants par } f \text{ est la droite d'équation } y = \frac{1}{2}x.}$$

On remarque que les images respectives A', B' et C' des points A, B et C sont sur (D) et sont donc des points invariants par f.

4°) On a vu à la question 2°) que si M a pour coordonnées (x, y) alors $M'\left(\frac{1}{3}(4x - 2y), \frac{1}{3}(2x - y)\right)$. Mais alors, $\frac{1}{2}x_{M'} = \frac{1}{3}(2x - y) = y_{M'}$. On en déduit que $M' \in (D)$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan, } M' = f(M) \text{ est invariant par } f.}$$

5°) **a)** Soit z un nombre complexe.

$$z' - z = \frac{1}{6}((3 + 4i)z + 5\overline{z}) - z = \frac{1}{6}((3 + 4i)z + 5\overline{z} - 6z) = \frac{1}{6}((-3 + 4i)z + 5\overline{z}).$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{z' - z}{z_A} &= \frac{1}{6(1 + 2i)}((-3 + 4i)z + 5\overline{z}) = \frac{1 - 2i}{6(1^2 + 2^2)}((-3 + 4i)z + 5\overline{z}) = \frac{1}{30}((1 - 2i)(-3 + 4i)z + 5(1 - 2i)\overline{z}) \\
&= \frac{1}{30}((5 + 10i)z + 5(1 - 2i)\overline{z}) = \frac{1}{6}((1 + 2i)z + (1 - 2i)\overline{z}) = \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}\overline{z} + \frac{1}{3}iz - \frac{1}{3}i\overline{z} \\
&= \frac{z + \overline{z}}{6} + i\frac{z - \overline{z}}{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z, \ \frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \overline{z}}{6} + i\frac{z - \overline{z}}{3}.}$$

Maintenant, si on pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels, on obtient

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{x + iy + x - iy}{6} + i\frac{x + iy - x + iy}{3} = \frac{x - 2y}{3} \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z, \ \frac{z' - z}{z_A} \text{ est un réel.}}$$

b) Soit M un point du plan tel que $M' \neq M$. Puisque $\frac{z' - z}{z_A}$ est un réel, on a

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg\left(\frac{z' - z}{z_A - 0}\right) = 0 \text{ à } k\pi \text{ près où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Ceci montre que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires ou encore que les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan tel que } M' \neq M, \text{ les droites } (OA) \text{ et } (MM') \text{ sont parallèles.}}$$

6°) Soit N un point du plan.

• Si N appartient à la droite (D), la question 3°) montre que $\mathsf{N}' = \mathsf{N}$.

• Si N n'appartient pas à la droite (D), la question 3°) montre que $\mathsf{N}' \neq \mathsf{N}$ et la question 5°) permet d'affirmer que N' appartient à la parallèle à (OA) passant par N. D'autre part, la question 4°) montre que N' appartient à la droite (D).

Enfin, les droites (OA) et (D) n'ont pas le même coefficient directeur ($\frac{1}{2} \neq 2$) et ne sont donc pas parallèles. Les droites (NN') et (D) sont donc sécantes en N'.

• Si $\mathsf{N} \in (\mathsf{D})$, $\mathsf{N}' = \mathsf{N}$;
• Si $\mathsf{N}' \notin (\mathsf{D})$, N' est le point d'intersection de la parallèle à (OA) passant par N et de la droite (D).

EXERCICE 2

1°) **a)** $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. $u_3 = u_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. $u_4 = u_3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{22+3}{12} = \dfrac{25}{12}$.

$$\boxed{u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{11}{6} \text{ et } u_4 = \frac{25}{12}.}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- Quand $n = 1$, on a $u_1 = 1 = \dfrac{1}{1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = 1 + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

2°) **a)** Soit k un entier naturel non nul. L'intervalle $[k, k+1]$ est contenu dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$. On en déduit que

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [k, k+1], \text{ on a } \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale on a alors

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx.$$

Enfin $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1}$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } k,\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}.}$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. D'après la question a), on a

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{2} & \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx & \leq 1 \\
\dfrac{1}{3} & \leq \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\, dx & \leq \dfrac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\dfrac{1}{n-1} & \leq \displaystyle\int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx & \leq \dfrac{1}{n-2}. \\
\dfrac{1}{n} & \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\, dx & \leq \dfrac{1}{n-1}.
\end{array}$$

On additionne membre à membre ces encadrements. On obtient

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\leq\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\,dx\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}.$$

Le premier membre de cet encadrement s'écrit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-1$ et vaut u_n-1. Le dernier membre de cet encadrement s'écrit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$ et vaut $u_n-\frac{1}{n}$. Enfin, d'après la relation de CHASLES,

$$\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\,dx=\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\ln(n).$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à 2, } u_n-1\leq\ln(n)\leq u_n-\frac{1}{n}.}$$

Soit de nouveau n un entier supérieur ou égal à 2. L'encadrement précédent se réécrit successivement $u_n-1\leq\ln(n)$ et $\ln(n)\leq u_n-\frac{1}{n}$ puis $u_n-\ln(n)\leq 1$ et $\frac{1}{n}\leq u_n-\ln(n)$ ou encore $v_n\leq 1$ et $\frac{1}{n}\leq v_n$ ou enfin $\frac{1}{n}\leq v_n\leq 1$. Comme $\frac{1}{n}\geq 0$, on a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à 2, } 0\leq v_n\leq 1.}$$

On note que cet encadrement reste vrai pour $n=1$ car $v_1=1-\ln 2\in[0,1]$.

3°) **a)** Soit n un entier naturel non nul. Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1}$ et donc

$$v_{n+1}-v_n=(u_{n+1}-u_n)-(\ln(n+1)-\ln(n))=\frac{1}{n+1}-[\ln(x)]_n^{n+1}=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul, } v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx.}$$

b) D'après la question 2°)a), si n est un entier supérieur ou égal à 1, on a $\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$ et donc $\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\leq 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $v_{n+1}-v_n\leq 0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$$

4°) D'après la question précédente la suite (v_n) est décroissante et d'après la question 2°)b) la suite (v_n) est minorée par le réel 0. On sait alors que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge.}}$$

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n=\ln(n)+v_n$. Or quand n tend vers $+\infty$, $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ et v_n tend vers γ. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty.}$$

EXERCICE 3

PARTIE I

Question de cours

A et B sont indépendants et donc $p_A(B) = p(B)$ ou aussi $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
D'après la formule des probabilités totales, on a alors

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A)p(B) + p(A \cap \overline{B}).$$

Par suite,

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A)p(\overline{B}).$$

Ainsi, $p(A \cap \overline{B}) = p(A)p(\overline{B})$ ou encore $p_A(\overline{B}) = p(\overline{B})$ et on a montré que les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

PARTIE II

1°)	**D**
2°)	**B**
3°)	**B**
4°)	**B**

Explications.

1°) Le nombre de tirages simultanés de trois boules parmi $5 + 3 = 8$ est $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$. Parmi ces 56 tirages possibles, il y a $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1}$ tirages contenant deux boules noires et une boule rouge avec $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{5 \times 4}{2} \times 3 = 30$.
La probabilité cherchée est donc

$$\frac{30}{56} = \frac{15}{28}.$$

2°) On choisit un individu au hasard et on note V l'événement « l'individu a été vacciné » et G l'événement « l'individu a contracté la grippe ».
L'énoncé fournit $p(V) = \frac{1}{3}$, $p(G) = 0,25 = \frac{1}{4}$ et $p_G(V) = \frac{1}{10}$.
La probabilité demandée est $p_V(G)$.

$$p_V(G) = \frac{p(G \cap V)}{p(V)} = \frac{p(G) \times p_G(V)}{p(V)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{40}.$$

3°) X prend les valeurs $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 10$. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	10
$p(X = x_i)$	$1/2$	$1/3$	$1/6$

Calculons l'espérance de X.

$$E(X) = p(X = x_1)x_1 + p(X = x_2)x_2 + p(X = x_3)x_3 = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Calculons la variance de X.

$$\begin{aligned} V(X) &= p(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + p(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + p(X = x_3)(x_3 - E(X))^2 = \frac{1}{2}(0-2)^2 + \frac{1}{3}(1-2)^2 + \frac{1}{6}(10-2)^2 \\ &= 2 + \frac{1}{3} + \frac{32}{3} = 2 + 11 = 13. \end{aligned}$$

4°) Soit t un réel positif. $P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-t/6}$. La probabilité demandée est $p_{T\geq 2}(T<5)$.

$$\begin{aligned}
p_{T\geq 2}(T<5) &= \frac{p((T<5)\cap(T\geq 2))}{p(T\geq 2)} = \frac{p(T<5)-p(T<2)}{1-p(T<2)} = \frac{(1-e^{-5/6})-(1-e^{-2/6})}{e^{-2/6}} \\
&= \frac{e^{-2/6}-e^{-5/6}}{e^{-2/6}} = 1-e^{-5/6+2/6} = 1-e^{-1/2} = 0,39346\ldots \\
&= 0,3935 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1°) $AD = \dfrac{AB}{\cos(\theta)} = \dfrac{4}{\cos(\theta)}$ et $CD = CB + BD = CB + AB\tan(\theta) = 7 + 4\tan(\theta)$.

$$AD = \frac{4}{\cos(\theta)} \text{ m et } CD = 7 + 4\tan(\theta) \text{ m.}$$

La vitesse du camion est égale à 1000 m/min et celle du lapin à 500 m/min. Durant un laps de temps de t min, le lapin parcourt $500t$ m et le camion $1000t$ m. Or $500t = AD \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{500} \times \dfrac{4}{\cos(\theta)}$ et $1000t = CD \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{1000}(7 + 4\tan(\theta))$. Donc

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{125\cos(\theta)} \text{ min et } t_2 = \frac{7 + 4\tan(\theta)}{1000} \text{ min.}}$$

2°) Le lapin traverse la route sans encombre si et seulement si $t_1 < t_2$. Or

$$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \frac{1}{125\cos(\theta)} < \frac{7 + 4\tan(\theta)}{1000} \Leftrightarrow \frac{8}{\cos(\theta)} < 7 + 4\tan(\theta) \Leftrightarrow 7 + 4\tan(\theta) - \frac{8}{\cos(\theta)} > 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2} + 2\tan(\theta) - \frac{4}{\cos(\theta)} > 0.$$

Le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$).

3°) La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ et ne s'annule pas sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$. Donc la fonction $\theta \mapsto -\dfrac{4}{\cos\theta}$ est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$. Par suite, f est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout réel $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$, on a

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2(\theta)} - 4\frac{-(-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)} = \frac{2(1 - 2\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}.$$

Sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$, $f'(\theta)$ est du signe de $1 - 2\sin(\theta)$ et donc f' est strictement positive sur $[0, \dfrac{\pi}{6}[$, strictement négative sur $]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}[$ et s'annule en $\dfrac{\pi}{6}$. f admet donc un maximum en $\dfrac{\pi}{6}$. De plus

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{4}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{7}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}/2} = \frac{7}{2} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 0,03\ldots > 0$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{si } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ le lapin s'en sort.}}$$

