EXERCICE 4

Partie A

a) Soit x un réel. $e^{x/4}$ n'est pas nul. On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \frac{e^{x/4}\times 3}{e^{x/4}\times(2e^{-x/4}+1)} = \frac{3}{1+2e^{-x/4}}.$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}.}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}} = \dfrac{3}{1+2\times 0} = 3$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \dfrac{3\times 0}{2+0} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 3\times\frac{-(1+2e^{-\frac{x}{4}})'}{(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3\times(-2)\times(-\frac{1}{4})e^{-\frac{x}{4}}}{(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3e^{-\frac{x}{4}}}{2(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2}.$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Partie B

1) a) On sait que les solutions de (E_1) sont les fonctions $t\mapsto C.e^{\frac{t}{4}}$ où C est une constante réelle.

b) Pour tout réel t, on a $g(t) = C.e^{\frac{t}{4}}$. Par suite,

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow C.e^{0} = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\boxed{\text{La solution de } (E_1) \text{ prenant la valeur 1 en 0 est la fonction } g\ :\ t\mapsto e^{\frac{t}{4}}.}$$

c) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} g(t)\geq 3 &\Leftrightarrow e^{\frac{t}{4}} \geq 3\\ &\Leftrightarrow \frac{t}{4} \geq \ln(3) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow t \geq 4\ln(3)\end{aligned}$$

Or $4\ln(3) = 4,3\ldots$. Donc la première valeur entière de t à partir de laquelle $g(t)$ est supérieur ou égal à 3 est 5. Donc

$$\boxed{\text{la population de rongeurs dépassera les 300 rongeurs pour la première fois au bout de 5 ans,}}$$

(plus précisément au bout de 4 ans, 4 mois et 23 jours.)

2) a) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur $[0, +\infty[$. La fonction $h = \frac{1}{u}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel positif t on a

$$u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{u(t)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow -h'(t) = \frac{1}{4}h(t) - \frac{1}{12} \Leftrightarrow h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}.$$

De plus, $h(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u(0)} = 1 \Leftrightarrow u(0) = 1$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ satisfait aux conditions } (E_2) \text{ si et seulement si la fonction } h \text{ satisfait aux conditions } (E_3).}$$

b) Si a et b sont deux réels, a étant non nul, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{at} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle. Ici $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{12}$. Donc les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$. L'égalité $h(0) = 1$ fournit $C + \frac{1}{3} = 1$ et donc $C = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{pour tout réel } t,\ h(t) = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-\frac{t}{4}}),}$$

et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } t,\ u(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{t}{4}}} = f(t).}$$

c) D'après la question A.b), lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers 3. Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre de rongeurs a tendance à se stabiliser autour de 300.

