EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}$.

a) Démontrer que $f(x)=\dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans **R**. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y'=\dfrac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h=\dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

EXERCICE 4

Partie A

a) Soit x un réel. $e^{x/4}$ n'est pas nul. On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \frac{e^{x/4} \times 3}{e^{x/4} \times (2e^{-x/4}+1)} = \frac{3}{1+2e^{-x/4}}.$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}.}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}} = \dfrac{3}{1+2\times 0} = 3$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{4}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \dfrac{3\times 0}{2+0} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 3 \times \frac{-(1+2e^{-\frac{x}{4}})'}{(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3\times(-2)\times(-\frac{1}{4})e^{-\frac{x}{4}}}{(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2} = \frac{3e^{-\frac{x}{4}}}{2(1+2e^{-\frac{x}{4}})^2}.$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Partie B

1) a) On sait que les solutions de (E_1) sont les fonctions $t \mapsto C.e^{\frac{t}{4}}$ où C est une constante réelle.

b) Pour tout réel t, on a $g(t) = C.e^{\frac{t}{4}}$. Par suite,

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow C.e^{0} = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\boxed{\text{La solution de } (E_1) \text{ prenant la valeur 1 en 0 est la fonction } g\ :\ t \mapsto e^{\frac{t}{4}}.}$$

c) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} g(t) \geq 3 &\Leftrightarrow e^{\frac{t}{4}} \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{4} \geq \ln(3) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow t \geq 4\ln(3) \end{aligned}$$

Or $4\ln(3) = 4,3\ldots$. Donc la première valeur entière de t à partir de laquelle $g(t)$ est supérieur ou égal à 3 est 5. Donc

$$\boxed{\text{la population de rongeurs dépassera les 300 rongeurs pour la première fois au bout de 5 ans,}}$$

(plus précisément au bout de 4 ans, 4 mois et 23 jours.)

2) a) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur $[0, +\infty[$. La fonction $h = \dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel positif t on a

$$u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{u(t)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow -h'(t) = \frac{1}{4}h(t) - \frac{1}{12} \Leftrightarrow h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}.$$

De plus, $h(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{u(0)} = 1 \Leftrightarrow u(0) = 1$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ satisfait aux conditions } (E_2) \text{ si et seulement si la fonction } h \text{ satisfait aux conditions } (E_3).}$$

b) Si a et b sont deux réels, a étant non nul, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{at} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle. Ici $a = -\dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{1}{12}$. Donc les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{-\frac{t}{4}} + \dfrac{1}{3}$. L'égalité $h(0) = 1$ fournit $C + \dfrac{1}{3} = 1$ et donc $C = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{pour tout réel } t,\ h(t) = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-\frac{t}{4}}),}$$

et donc

$$\boxed{\text{pour tout réel } t,\ u(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{t}{4}}} = f(t).}$$

c) D'après la question A.b), lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers 3. Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre de rongeurs a tendance à se stabiliser autour de 300.

