BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

EXERCICE 1

1) Soit n un entier naturel. On a $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ et en particulier $u_{n+1} - u_n > 0$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est une suite strictement croissante.}}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n > n^2$.

- On a déjà $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0^2$. L'inégalité de l'énoncé est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que $u_n > n^2$. On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et donc par hypothèse de récurrence $u_{n+1} > n^2+2n+3$. Mais $n^2+2n+3 > n^2+2n+1$ ou encore $n^2+2n+3 > (n+1)^2$. On en déduit que $u_{n+1} > (n+1)^2$.

On vient de montrer par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n > n^2.}$$

b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et que pour tout entier naturel n, on a $u_n > n^2$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

3) Donnons les premières valeurs de u_n dans un tableau.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	4	9	16	25	36

Il semblerait que pour tout entier naturel n on ait $u_n = (n+1)^2$. Montrons par récurrence que cette égalité est effectivement vraie pour tout entier naturel n.

- On a déjà $u_0 = 1 = (0+1)^2$ et l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que $u_n = (n+1)^2$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \\
&= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= n^2 + 4n + 4 \\
&= (n+2)^2 \\
&= ((n+1)+1)^2 .
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = (n+1)^2.}$$

EXERCICE 2

1) Soient x un entier naturel et k un entier naturel non nul.

$(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = (x+x^2+\ldots+x^{k-1}+x^k)-(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = x^k+(x^{k-1}-x^{k-1})+\ldots+(x-x)-1 = x^k-1.$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } x \text{ et tout entier naturel non nul } k,\ (x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = x^k-1.}$$

2) a)

$$\begin{aligned} a^n - 1 = a^{dk} - 1 &= (a^d)^k - 1 \\ &= (a^d - 1)((a^d)^{k-1} + \ldots + (a^d)^2 + (a^d) + 1). \end{aligned}$$

Puisque le nombre $(a^d)^{k-1} + \ldots + (a^d)^2 + (a^d) + 1$ est un entier, on a montré que

$$\boxed{a^d - 1 \text{ divise } a^n - 1.}$$

b) $2004 = 3\times 668$. Donc 2004 est divisible par 3 et d'après la question précédente, $2^{2004}-1$ est divisible par $2^3-1=7$. De même, $2004 = 6\times 334$ et donc $2^{2004}-1$ est divisible par $2^6-1=63$. Enfin, puisque $2^{2004}-1$ est divisible par $63 = 9\times 7$, $2^{2004}-1$ est en particulier divisible par 9.

3) a) Les entiers m' et n' sont premiers entre eux. Donc, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $m'u - n'v = 1$. En multipliant les deux membres de cette égalité par d, on obtient $dm'u - dn'v = d$ ou encore $mu - nv = d$. Ainsi, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.

b) On a

$$(a^{mu}-1) - (a^{nv}-1)a^d = a^{mu} - 1 - a^{nv+d} + a^d = a^{mu} - 1 - a^{mu} + a^d = a^d - 1.$$

Notons D le pgcd des entiers $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$.

d divise m et n. Donc d divise mu et nv. D'après la question 2), on peut en déduire que a^d-1 divise $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$. Ainsi, a^d-1 est un diviseur commun à $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ et en particulier $a^d-1 \leq D$.

D'autre part, D divise $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ et donc D divise $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d$. D'après la question a), on peut en déduire que D divise a^d-1 et en particulier $D \leq a^d-1$.

Finalement, $D = a^d - 1$ ou encore

$$\boxed{\text{le pgcd de } a^{mu}-1 \text{ et } a^{nv}-1 \text{ est } a^d-1.}$$

c) Prenons $m = 63$ et $n = 60$. Puisque $63 = 3^2\times 7$ et que $60 = 2^2\times 3\times 5$, le pgcd de 63 et 60 est $d = 3$. Puisque $63\times 1 - 60\times 1 = 3$, $u = 1$ et $v = 1$ sont deux entiers strictement positifs tels que $mu - nv = d$. D'après la question précédente, le pgcd de $2^{63}-1$ et $2^{60}-1$ est 2^3-1 c'est-à-dire 7.

$$\boxed{\text{le pgcd de } 2^{63}-1 \text{ et } 2^{60}-1 \text{ est } 7.}$$

EXERCICE 3

1)	**D**
2)	**D**
3)	**B**
4)	**B**

Explications.

1) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 1, -3)$. La droite de la proposition A est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 0)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$ et la droite de la proposition C est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 3)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Les réponses A et C sont donc mauvaises.

Il reste les propositions B et D. Dans chacun de ces deux cas, la droite considérée est dirigée par $\overrightarrow{n}$ et est donc parallèle à la droite $\mathscr{D}$. Dans D, $t = -1$ fournit $x = 1$, $y = -2$ et $z = 0$ ce qui montre que le point S appartient à la droite de la proposition D. Puisqu'il n'y a qu'une seule bonne réponse, c'est la D.

Vérifions néanmoins que la proposition B. est mauvaise. L'égalité $1 = 2+t$ fournit $t = -1$ et l'égalité $0 = 1-3t$ fournit $t = \dfrac{1}{3}$. Le réel t ne pouvant être simultanément égal à -1 et à $\dfrac{1}{3}$, le point S n'appartient pas à la droite de la proposition B, proposition qui est donc fausse.

2) Puisque H est sur la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H sont de la forme $(2 + t, -1 + t, -3 - 3t)$ où t est un réel.

$$H \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (2 + t) + (-1 + t) - 3(-3 - 3t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 11t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{14}{11}.$$

Mais alors les coordonnées de H sont $(2 - \dfrac{14}{11}, -1 - \dfrac{14}{11}, -3 + 3.\dfrac{14}{11})$ ou encore $(\dfrac{8}{11}, -\dfrac{25}{11}, \dfrac{9}{11})$.

3) La distance de S au plan $\mathscr{P}$ vaut $\dfrac{|1 + (-2) - 3.0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}}$ ou encore $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

4) La distance d de S au plan $\mathscr{P}$ vaut $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ et le rayon R de $\mathscr{S}$ vaut 3. Par suite $d < R$ et donc l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon strictement positif noté r.

D'après le théorème de Pythagore, $R^2 = d^2 + r^2$ et donc

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{11}} = \sqrt{\frac{90}{11}} = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

Puisqu'il n'y a qu'une bonne réponse, la bonne réponse est nécessairement la réponse B. Notons tout de même que le centre du cercle $\mathscr{C}$ est la projection orthogonale du point S sur le plan $\mathscr{P}$ c'est-à-dire le point H. La réponse B est donc effectivement la bonne réponse.

EXERCICE 4

1) Soient λ et t deux réels.

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Par suite,

$$p([0\ ;\ 200[) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-200\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-200\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

2) L'événement « le composant a une durée de vie supérieure à 300 semaines » est l'événement contraire de l'événement « le composant n'est plus en état de marche au bout de 300 semaines. Sa probabilité est donc $1 - p([0\ ;\ 300[)$. Or

$$1 - p([0\ ;\ 300[) = \exp(-\frac{\ln 2}{200}.300) = \exp(-1,5.\ln 2) = \exp(\ln(2^{-1,5})) = 2^{-1,5} = 0,35...$$

$$\boxed{\text{la probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 300 semaines est } \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ c'est-à-dire } 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

3) **a)** Soient λ un réel et A un réel strictement positif. Pour tout réel positif x, on pose

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-\lambda x}.$$

Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0, A]$ et pour tout réel x de $[0, A]$, on a

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx &= \int_0^A x.(\lambda e^{-\lambda x})\,dx \\ &= \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^A - \int_0^A 1.(-e^{-\lambda x})\,dx = -Ae^{-\lambda A} - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A \\ &= -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A} - 1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout réel strictement positif } A, \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.}$$

b) En tenant compte du fait que λ est strictement positif, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$. Finalement,

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}.$$

Finalement,

$$\boxed{d_m = \frac{200}{\ln 2} \text{ ou encore } d_m = 288 \text{ semaines à une semaine près.}}$$

EXERCICE 5

1) Tout d'abord, x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si v est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, pour tout réel positif t on a

$$25x'(t) + 200x''(t) = 50 \Leftrightarrow 25v(t) + 200v'(t) = 50 \Leftrightarrow v'(t) = -\frac{25}{200}v(t) + \frac{50}{200} \Leftrightarrow v'(t) = -\frac{1}{8}v(t) + \frac{1}{4},$$

ce qui démontre le résultat.

Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C.e^{at} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle. Ici, $a = -\frac{1}{8}$ et $b = \frac{1}{4}$. Donc il existe une constante C telle que pour tout réel positif t, on ait

$$v(t) = Ce^{-t/8} + 2.$$

2) **a)** La condition $x'(0) = 0$ fournit $C + 2 = 0$ et donc $C = -2$. Par suite,

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } t,\ x'(t) = 2 - 2e^{-t/8}.}$$

b) Il existe donc une constante C' telle que pour tout réel positif t, on ait $x(t) = 2t + 16e^{-t/8} + C'$. La condition $x(0) = 0$ fournit $16 + C' = 0$ et donc $C' = -16$.

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } t,\ x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}.}$$

3) Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t/8}$ tend vers 0 et donc $v(t)$ tend vers 2.

$$\boxed{V = 2.}$$

Soit t un réel.

$$\begin{aligned} v(t) \leq 0,9.V \Leftrightarrow 2 - 2e^{-t/8} \leq 1,8 \Leftrightarrow -2e^{-t/8} \leq -0,2 \Leftrightarrow e^{-t/8} \geq 0,1 \\ \Leftrightarrow -\frac{t}{8} \geq \ln\left(\frac{1}{10}\right) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ \Leftrightarrow -\frac{t}{8} \geq -\ln(10) \\ \Leftrightarrow t \leq 8\ln(10). \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite si et seulement si $t \leq 8\ln(10) = 18,4...$ s.

4) $x(30) = 2.30 - 16 + 16e^{-30/8} = 44 + 16e^{-3.75} = 44,3...$

$$\boxed{\text{Au bout de } 30 \text{ secondes, le chariot a parcouru } 44,3 \text{ m au décimètre près.}}$$

