BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT de SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ et son asymptote Δ, d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A - Lecture graphique

1) k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.

2) n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

2) Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et v_n pour n appartenant à l'ensemble $\{2; 3; 4\}$.

3) Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. Procéder de même pour la suite (v_n). En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors a^{p-1} est divisible par p ».

1) Soit p un nombre premier impair.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.

b) Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit n un entier naturel.
Montrer que si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \quad [p]$.

c) Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors b divise n.

2) Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
On prend pour p un facteur premier de A.

a) Justifier que : $2^q \equiv 1 \quad [p]$.

b) Montrer que p est impair.

c) Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer en utilisant **1)** que b divise q. En déduire que $b = q$.

d) Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1 \quad [q]$.

3) Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5880 sont exactes,
B_2, contenant 4000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes,

1) On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$A\ :\ \frac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \quad B\ :\ \frac{3}{120}$$

$$C\ :\ \binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \quad D\ :\ \binom{10}{3}\times\left(\frac{3}{120}\right)^3\times\left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2) Parmi les 10000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'etiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$A\ :\ 0,98 \quad B\ :\ \frac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02} \quad C\ :\ 0,6\times 0,98 \quad D\ :\ \frac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1) La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2500 heures est :

$$A\ :\ e^{-\frac{2500}{2000}} \quad B\ :\ e^{\frac{5}{4}} \quad C\ :\ 1-e^{-\frac{2500}{2000}} \quad D\ :\ e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2) La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :

$$E = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx.$$

a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$ est égale à :

$$A \ : \ \lambda \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t} \quad B \ : \ -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \quad C \ : \ \lambda t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda \quad D \ : \ te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

b) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

$$A \ : \ 3500 \quad B \ : \ 2000 \quad C \ : \ 2531,24 \quad D \ : \ 3000$$

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propositions suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) **a)** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) \neq 0$.
b) Calculer $f(0)$.

2) En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

3) On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.
a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.
c) En déduire les fonctions u et v.
d) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4) **a)** Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) **a)** Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
b) Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

A compléter et à rendre avec la copie