BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Liban

EXERCICE 1

1. a. Notons M (respectivement S, AT, H et F) l'événement « la personne interrogée est un médecin, (respectivement un soignant, un administratif ou technique, un homme, une femme) ».
La probabilité demandée est $p(F \cap S)$. L'énoncé fournit $p(S) = 0,71$ et $p_S(F) = 0,92$. Donc

$$p(F \cap S) = p(S) \times p_S(F) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532.$$

La probabilité d'interroger une femme soignante est $0,6532$.

b. La probabilité demandée est $p(M \cap F)$. Puisque toute personne est soit un homme soit une femme, la formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(M) = p(M \cap F) + p(M \cap H) = p(M \cap F) + p(M) \times p_M(H).$$

L'énoncé fournit $p(M) = 0,12$ et $p_M(H) = 0,67$. Donc

$$p(M \cap F) = p(M) - p(M) \times p_M(H) = p(M)(1 - p_M(H)) = 0,12(1 - 0,67) = 0,0396.$$

La probabilité d'interroger une femme médecin est $0,0396$.

c. La première probabilité demandée est $p(AT \cap F)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(AT \cap F) = p(F) - p(M \cap F) - p(S \cap F) = 0,8 - 0,0396 - 0,6532 = 0,1072.$$

La probabilité d'interroger une femme faisant partie du personnel AT est $0,1072$.

Ensuite, $p(AT) = 1 - p(M) - p(S) = 1 - 0,12 - 0,71 = 0,17$ et donc

$$p_{AT}(F) = \frac{p(AT \cap F)}{p(AT)} = \frac{0,1072}{0,17} = 0,6306 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

La probabilité d'interroger une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT est $0,6306$ à 10^{-4} près.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On sait que la loi uniforme sur $[a, b]$ est définie par : pour tous réels c et d de $[a, b]$ tels que $c \leq d$,

$$p([c, d]) = \frac{1}{b - a} \int_c^d dx = \frac{d - c}{b - a}.$$

Ici, $a = 0$ et $b = 1$. D'autre part, puisque 15 min et 20 min sont respectivement un quart d'heure et un tiers d'heure, on a $c = \frac{1}{4}$ et $d = \frac{1}{3}$. Donc

$$p([\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

La probabilité qu'une personne ait une durée de trajet comprise entre 15 et 20 min est $\frac{1}{12}$ ou encore $0,0833$ à 10^{-4} près.

3. Notons X le nombre de médecins qui ont reçu le courrier. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 40 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne qui a reçu le courrier est médecin » avec une probabilité $p = 0,12$ (fournie par l'énoncé) ou « la personne qui a reçu le courrier n'est pas médecin » avec une probabilité $1 - p = 0,88$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,12$.

La probabilité demandée est $p(X = 10)$ et on a

$$p(X = 10) = \binom{40}{10}(0,12)^{10}(0,88)^{30} = 0,0113 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

EXERCICE 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir graphique à la fin.

2. On a $A \neq C$ et $B \neq D$. On sait alors qu'il existe une similitude directe et une seule f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$. Notons k son rapport et θ son angle. On a

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \frac{(-1+6i) - (1+2i)}{(6+3i) - (2+i)} = \frac{-2+4i}{4+2i} = \frac{i(4+2i)}{4+2i} = i.$$

Par suite,

$$k = \frac{BD}{AC} = \frac{|z_D - z_B|}{|z_C - z_A|} = \left|\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1.$$

Ceci montre déjà que f est une isométrie directe et donc soit une rotation, soit une translation. De plus,

$$\theta = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}.$$

montre que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
L'expression complexe de f est de la forme $z' = iz + a$ où a est un nombre complexe. De plus,

$$f(A) = B \Rightarrow z_B = iz_A + a \Rightarrow 1 + 2i = i(2+i) + a \Rightarrow a = 2.$$

f est donc la rotation d'expression complexe $z' = iz + 2$. On sait que le centre I de f est l'unique point invariant par f. Or

$$f(I) = I \Leftrightarrow z_I = iz_I + 2 \Leftrightarrow (1-i)z_I = 2 \Leftrightarrow z_I = \frac{2}{1-i} \Leftrightarrow z_I = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow z_I = \frac{2(1+i)}{1^2+1^2} \Leftrightarrow z_I = 1 + i.$$

$$\boxed{f \text{ est la rotation de centre } I(1,1) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

3. L'expression complexe de R la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_J) + z_J = -i(z - 3 - 5i) + 3 + 5i = -iz - 2 + 8i.$$

Mais alors,

$$z'_A = -iz_A - 2 + 8i = -i(2+i) - 2 + 8i = -1 + 6i = z_D,$$

et

$$z'_C = -iz_C - 2 + 8i = -i(6+3i) - 2 + 8i = 1 + 2i = z_B.$$

$$\boxed{\text{La rotation } R \text{ de centre } J(3,5) \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2} \text{ transforme } A \text{ en } D \text{ et } C \text{ en } B.}$$

4. Par une rotation, l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image. Par suite, $f(M)$ est le milieu du segment $[f(A)f(C)]$ c'est-à-dire du segment $[BD]$. Ainsi, $f(M) = N$. Le point N est donc l'image du point M par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle MIN est rectangle isocèle en I.
De même, $R(M)$ est le milieu du segment $[R(A)R(C)]$ c'est-à-dire du segment $[DB]$. Donc $R(M) = N$ et N est l'image de M par la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Le triangle MJN est rectangle isocèle en J.
Puisque les triangles MIN et MJN sont rectangles isocèles en I et J respectivement,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } IMJN \text{ est un carré.}}$$

5. a. Puisque le triangle IAB est isocèle rectangle direct, le point P est le point tel que IAPB soit un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{IA}$ ce qui s'écrit encore $z_P - z_B = z_A - z_I$. Par suite

$$z_P = z_A + z_B - z_I = (2+i) + (1+2i) - (1+i) = 2+2i.$$

De même

$$z_Q = z_C + z_D - z_I = (6+3i) + (-1+6i) - (1+i) = 4+8i.$$

$$\boxed{z_P = 2+2i \text{ et } z_Q = 4+8i.}$$

b. Les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs. Donc immédiatement

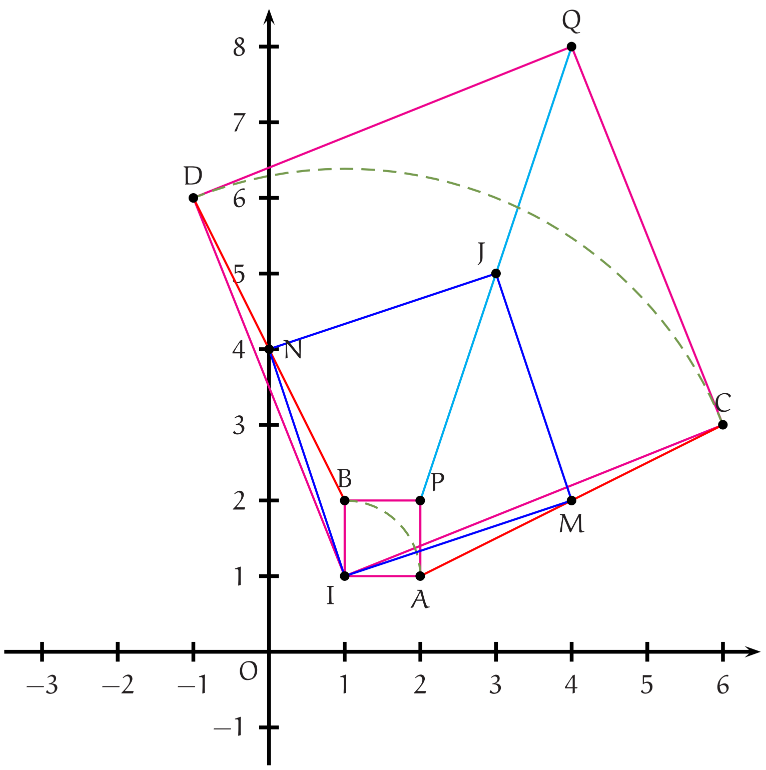
$$\boxed{\frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IC} = \sqrt{2} \text{ et } \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right) = \left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ à } 2k\pi \text{ près, } k \in \mathbb{Z}.}$$

Puisque $A \neq C$ et $P \neq Q$, g existe et est unique. Or d'après ce qui précède la similitude de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transforme A en P et C en Q.

$$\boxed{g \text{ est la similitude de centre I, de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{4}.}$$

c. Puisque le carré IMJN est un carré direct, on a immédiatement $g(M) = J$. Mais M est le milieu du segment $[AC]$ et l'image par une similitude du milieu d'un segment est le milieu du segment image. Donc $g(M) = J$ est le milieu du segment $[g(A)g(C)]$ ou encore

$$\boxed{J \text{ est le milieu du segment } [PQ].}$$



EXERCICE 3

1. a. Soient x un réel positif ou nul puis k un entier strictement supérieur à x.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on a $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$.

- Quand $n = k$, $\frac{k^n}{n!} = \frac{k^k}{k!}$ et l'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = k$.
- Soit $n \geq k$. Supposons que $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{k \times k^n}{(n+1) \times n!} = \frac{k}{n+1} \times \frac{k^n}{n!}\\ &\leq \frac{n+1}{n+1} \times \frac{k^n}{n!} = \frac{k^n}{n!} \text{ (car } n+1 \geq n \geq k)\\ &\leq \frac{k^k}{k!} \text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } k,\ \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}.}$$

b. Soit n un entier supérieur ou égal à k. D'après la question a., on a

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{k^n} \times \frac{k^n}{n!} = \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

c. Soit x un réel positif ou nul et k un entier naturel strictement supérieur à x (par exemple $k = E(x) + 1$). D'après la question précédente, pour tout entier naturel supérieur ou égal à k, on a

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

Maintenant, on a $0 \leq \frac{x}{k} < 1$. On sait alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$ et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!} = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ positif ou nul, } \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.}$$

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{\overbrace{n \times n \times \ldots \times n}^{n-1}}{\underbrace{1 \times 2 \times \ldots \times n}_{n}} = \frac{\overbrace{n \times n \times \ldots \times n}^{n-1}}{\underbrace{2 \times \ldots \times n}_{n-1}} = \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \ldots \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n}.$$

Maintenant, pour tout entier naturel k tel que $2 \leq k \leq n$, on a $\frac{n}{k} \geq 1$ et donc

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1 \times 1 \times \ldots \times 1 = 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à 2, } \frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1.}$$

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a $\frac{n^n}{n!} = n \times \frac{n^{n-1}}{n!} \geq n$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.}$$

EXERCICE 4

Soit x un réel. On a $e^x > 0$ puis $e^x + 1 > 1$ et en particulier $e^x + 1 \neq 0$. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+1 = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln 4 = +\infty$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = \dfrac{2}{0+1} = 2$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln 4 = -\infty$,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

2. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
f(x) + f(-x) &= \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right) + \left(-x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1}\right) = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{\dfrac{1}{e^x}+1} \\
&= 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{\dfrac{e^x+1}{e^x}} = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2e^x}{e^x+1} \\
&= 2\ln 4 + \frac{2e^x+2}{e^x+1} = 2\ln 4 + \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} \\
&= 2\ln 4 + 2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) + f(-x) = 2\ln 4 + 2.}$$

Pour tout réel x, on a donc $f(x) + f(2\times 0 - x) = 2(1 + \ln 4)$. Cette égalité signifie que

$$\boxed{\text{le point } A(0; 1+\ln 4) \text{ est centre de symétrie de la courbe } (\mathcal{C}).}$$

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 1 + 2\left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = 1 + 2\frac{-(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = 1 - 2\frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}.}$$

Pour tout réel x, on a $e^{2x} + 1 > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. Par suite

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4. a. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.
On sait alors que pour tout réel m de $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } m, \text{ l'équation } f(x) = m \text{ admet une solution et une seule dans } \mathbb{R}.}$$

b. Soit a la solution de l'équation $f(x) = 3$. La machine fournit $f(1,1) = 2,98\ldots < 3$ et $f(1,2) = 3,04\ldots > 3$ et donc $f(1,1) < f(a) < f(1,2)$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{1,1 < a < 1,2.}$$

c. D'après la question 2.

$$f(-a) = 2 + 2\ln 4 - f(a) = 2 + 2\ln 4 - 3 = 2\ln 4 - 1.$$

$$\boxed{\text{Le réel } -a \text{ est la solution de l'équation } f(x) = 2\ln 4 - 1.}$$

5. a. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} = x + \ln 4 + \frac{2 + 2e^x - 2e^x}{e^x+1} = x + \ln 4 + \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} + \frac{-2e^x}{e^x+1} \\ &= x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}.}$$

b. Pour tout réel x, $f(x) - (x + \ln 4) = \dfrac{2}{e^x+1}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x + \ln 4) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = x + \ln 4 \text{ est asymptote à la courbe } (\mathcal{C}) \text{ en } +\infty.}$$

Soit x un réel. On a $f(x) - (x + \ln 4) = \dfrac{2}{e^x+1}$. Or $e^x > 0$ et donc $\dfrac{2}{e^x+1} > 0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) - (x + \ln 4) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la courbe } (\mathcal{C}) \text{ est strictement au-dessus de la droite } (\Delta) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

D'après la question précédente, pour tout réel x, on a $f(x) - (x + 2 + \ln 4) = \dfrac{2e^x}{e^x+1}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$. Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^x}{e^x+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x + 2 + \ln 4) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } (\Delta') \text{ d'équation } y = x + 2 + \ln 4 \text{ est asymptote à la courbe } (\mathcal{C}) \text{ en } -\infty.}$$

6. a. Soit α un réel positif. D'après la question précédente, pour tout réel x, on a $f(x) \geq x + \ln 4$. On sait alors que $\displaystyle\int_0^\alpha [f(x) - (x + \ln 4)]\,dx$ est l'aire du domaine compris entre la droite (Δ), la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$, exprimée en unité d'aire.

b. Soit α un réel positif. D'après la question 5.a., pour tout réel x, $f(x) - (x + \ln 4) = 2 - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$. Par suite,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^\alpha \left(2 - 2\frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = \int_0^\alpha \left(2 - 2\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\right) dx \\ &= [2x - 2\ln(e^x+1)]_0^\alpha = (2\alpha - 2\ln(e^\alpha+1)) - (0 - 2\ln(e^0+1)) \\ &= 2\ln(e^\alpha) - 2\ln(e^\alpha+1) + 2\ln 2 = 2(\ln(e^\alpha) - \ln(e^\alpha+1) + \ln 2) \\ &= 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha,\ I(\alpha) = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha+1}\right).}$$

c. Soit α un réel.

$$I(\alpha)=1 \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=0,5 \Leftrightarrow \frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=e^{0,5} \Leftrightarrow 2e^{\alpha}=e^{0,5}(e^{\alpha}+1)$$
$$\Leftrightarrow (2-e^{0,5})e^{\alpha}=e^{0,5} \Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{e^{0,5}}{2-e^{0,5}} \Leftrightarrow \alpha=\ln\left(\frac{e^{0,5}}{2-e^{0,5}}\right).$$

$$\boxed{I(\alpha)=1 \text{ si et seulement si } \alpha=\ln\left(\frac{e^{0,5}}{2-e^{0,5}}\right)=1,5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par défaut.}}$$