BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT de SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique 2 cm.
On appelle A le point d'affixe $-2i$.
A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\overline{z} + 2i.$$

1) On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.

2) Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).

3) Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$; interprétez géométriquement cette égalité.

4) Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z + 2i$.

a) Justifier que θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$.

b) Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.

c) En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.

d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

5) En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 *peuvent-ils être premiers ? »*

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1\dots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$.

1) Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$ et $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2) Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3) On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

a) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b) On suppose que p est un multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c) On suppose que p n'est pas premier et on pose $p = kq$, où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k.

4) Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

EXERCICE 3 (9 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0; 1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$;
(3) Pour tout réel x, $f(x) \leq x$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité graphique 10 cm.

I. Première partie. Etude d'un modèle.

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = xe^{x-1}.$$

1) Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).

2) Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{e}(e^x - e)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).

3) Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie. Un calcul d'indice.

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) et (3), on définit un indice I égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1) Justifier que $I = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\, dx$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.

3) On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}.$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2) et (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

a) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 [x - f_n(x)]\, dx$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

b) Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0;1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.
c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$,

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n+1}$.
e) Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.