BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

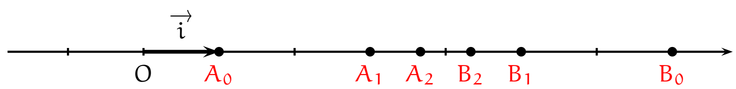
- Série S -

Enseignement de Spécialité

Antilles - Guyanne

EXERCICE 1

1) Puisque $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$, on a $a_1 = \dfrac{2a_0 + b_0}{3} = \dfrac{2 \times 1 + 7}{3} = 3$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + 2b_0}{3} = \dfrac{1 + 2 \times 7}{3} = 5$, puis $a_2 = \dfrac{2a_1 + b_1}{3} = \dfrac{2 \times 3 + 5}{3} = \dfrac{11}{3}$ et $b_2 = \dfrac{a_1 + 2b_1}{3} = \dfrac{3 + 2 \times 5}{3} = \dfrac{13}{3}$.



2) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{1}{3}u_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. De plus, $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = 6$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{3} \text{ et de premier terme } u_0 = 6.}$$

On sait alors que pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.}$$

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ a_n \leq b_n.}$$

Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} \text{ et donc } a_{n+1} - a_n \geq 0.$$

De même,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 2b_n}{3} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3} \text{ et donc } b_{n+1} - b_n \leq 0.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

On en déduit que quand n grandit, le point A_n se déplace dans le sens de $\overrightarrow{i}$ et le point B_n se déplace en sens contraire.

4) D'après la question 2), pour tout entier naturel n on a $b_n - a_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

En résumé,

- la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
- la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

On a ainsi montré que

$$\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$$

5) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} + \frac{a_n + 2b_n}{3} = \frac{3(a_n + b_n)}{3} = a_n + b_n = v_n.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$

Puisque la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, pour tout entier naturel n on a $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1 + 7 = 8$.
Le milieu du segment $[A_n, B_n]$ a une abscisse égale à $\frac{a_n + b_n}{2}$ c'est-à-dire 4.

$$\boxed{\text{Les segments}[A_n B_n] \text{ ont tous même milieu, le point I d'abscisse 4.}}$$

6) Puisque les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, on sait que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ont même limite.

Puisque le point I appartient à tous les segments $[A_n B_n]$, pour tout entier naturel n on a $a_n \leq 4 \leq b_n$. On sait alors que cet encadrement caractérise la limite commune des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc

$$\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergent et } \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 4.}$$

Ce dernier résultat signifie que les deux suites de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers le point I d'abscisse 4.

EXERCICE 2

1) Soit a un réel positif.

$$I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a) - \ln 1 = \ln(1+a).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ I_0(a) = \ln(1+a).}$$

2) Soit a un réel positif. On a $I_1(a) = \int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^a \frac{1}{(1+t)^2} \times (t-a)\,dt$. Pour calculer $I_1(a)$, effectuons une intégration par parties.

Pour t élément de $[0,a]$, posons $u(t) = -\frac{1}{1+t}$ et $v(t) = t-a$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,a]$ et pour tout réel t de $[0,a]$, $u'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ et $v'(t) = 1$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0,a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I_1(a) &= \left[-\frac{1}{1+t}(t-a)\right]_0^a - \int_0^a -\frac{1}{1+t}.1\,dt \\
&= -\frac{1}{1+a}(a-a) + \frac{1}{1+0}(0-a) + \int_0^a \frac{1}{1+t}\,dt \\
&= -a + I_0(a) = -a + \ln(1+a).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ I_1(a) = -a + \ln(1+a).}$$

3) Soient a un réel positif et k un entier naturel non nul.
On a $I_{k+1}(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^{k+1}}{(1+t)^{k+2}}\,dt = \int_0^a \frac{1}{(1+t)^{k+2}} \times (t-a)^{k+1}\,dt$. Pour calculer $I_{k+1}(a)$ en fonction de $I_k(a)$, effectuons de nouveau une intégration par parties.

Pour t élément de $[0,a]$, posons $u(t) = -\frac{1}{(k+1)(1+t)^{k+1}}$ et $v(t) = (t-a)^{k+1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,a]$ et pour tout réel t de $[0,a]$, $u'(t) = \frac{1}{(1+t)^{k+2}}$ et $v'(t) = (k+1)(t-a)^k$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0,a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I_{k+1}(a) &= \left[-\frac{1}{(k+1)(1+t)^{k+1}}(t-a)^{k+1}\right]_0^a - \int_0^a -\frac{1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \times (k+1)(t-a)^k\,dt \\
&= -\frac{1}{(k+1)(1+a)^{k+1}}(a-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)(1+0)^{k+1}}(0-a)^{k+1} + \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,dt \\
&= \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a \text{ et tout entier naturel non nul } k,\ I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a).}$$

4) Soit a un réel positif. D'après la question précédente et la question 2), on a

$$\begin{aligned}
I_5(a) &= -\frac{a^5}{5} + I_4(a) = -\frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{4} + I_3(a) = -\frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + I_2(a) = -\frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + I_1(a) \\
&= -\frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a + \ln(1+a) \\
&= \ln(1+a) - P(a).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ I_5(a) = \ln(1+a) - P(a).}$$

5) Soit a un réel positif.

$$J(a) = \int_0^a (t-a)^5 \, dt = \left[\frac{(t-a)^6}{6}\right]_0^a = \frac{(a-a)^6}{6} - \frac{(0-a)^6}{6} = -\frac{a^6}{6}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ J(a) = -\frac{a^6}{6}.}$$

6) **(a)** Soient a un réel positif puis t un réel élément de $[0, a]$. On a $t \geq 0$ et donc $1 + t \geq 1$ puis, par croissance de la fonction $x \mapsto x^6$ sur $[0, +\infty[$, $(1+t)^6 \geq 1^6$ et enfin, par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{(1+t)^6} \leq \frac{1}{1^6}$ ou encore $\frac{1}{(1+t)^6} \leq 1$ $(*)$.

Maintenant, comme $t \leq a$, on a $t - a \leq 0$ et donc, puisque 5 est impair, $(t-a)^5 \leq 0$. En multipliant les deux membres de l'inégalité $(*)$ par le réel négatif $(t-a)^5$, on obtient $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a \text{ puis tout réel } t \text{ élément de } [0, a], \text{ on a } \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5.}$$

(b) Soit a un réel positif. Pour tout réel t élément de $[0, a]$, on a $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0$ et donc, par positivité de l'intégrale, $\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \, dt \leq 0$ ou encore $I_5(a) \leq 0$.

D'autre part, pour tout réel t élément de $[0, a]$, on a $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$ et donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \, dt \geq \int_0^a (t-a)^5 \, dt$ ou encore $I_5(a) \geq J(a)$.

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } a,\ J(a) \leq I_5(a) \leq 0.}$$

7) Soit a un réel positif. D'après la question 4), on a $\ln(1+a) - P(a) = I_5(a)$ et donc d'après la question précédent, $J(a) \leq \ln(1+a) - P(a) \leq 0$. Mais alors, par décroissance de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $]-\infty, 0]$, on a $|\ln(1+a) - P(a)| \leq |J(a)|$. Mais d'après la question 5), on a $J(a) = -\frac{a^6}{6}$ et donc $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \left|-\frac{a^6}{6}\right|$ ou encore $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$. En résumé

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } a,\ |\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}.}$$

8) Soit a un réel positif. $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près si et seulement si $|\ln(1+a) - P(a)| \leq 10^{-3}$. D'après la question précédente, cette inégalité sera assurée si on a $\frac{a^6}{6} \leq 10^{-3}$. Or

$$\frac{a^6}{6} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow a^6 \leq 6 \times 10^{-3} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \sqrt[6]{0,006}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a \text{ élément de } [0, \sqrt[6]{0,006}],\ P(a) \text{ est une valeur approchée de } \ln(1+a) \text{ à } 10^{-3} \text{ près,}}$$

avec $\sqrt[6]{0,006} = 0,42\ldots$

EXERCICE 3

1)	**B**
2)	**B**
3)	**A**
4)	**D**

Explications.

1)

$$\begin{aligned}z^2 &= \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\\ &= (-1)^2\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + \mathrm{i}^2\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = (2+\sqrt{2}) - 2\mathrm{i}\sqrt{4-2} - (2-\sqrt{2})\\ &= 2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2) $z^2 = 2\sqrt{2}(1-\mathrm{i}) = 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 4e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

3) Soit Z un nombre complexe.

$$\begin{aligned}Z^2 = 4e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} &\Leftrightarrow Z^2 = \left(2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^2 \Leftrightarrow Z^2 - \left(2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (Z - 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}})(Z + 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}) = 0\\ &\Leftrightarrow Z = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} \text{ ou } Z = -2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

On note alors que $-e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = e^{\mathrm{i}\pi}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = e^{\mathrm{i}(\pi-\frac{\pi}{8})} = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$. z est donc l'un des deux nombres $2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ ou $2e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$. Maintenant, la partie réelle de z vaut $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et est donc un nombre strictement négatif. Comme $2\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right) < 0$ (et $2\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$), on a donc $z = 2e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$.

4) Ainsi $-\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)\right)$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires, on a

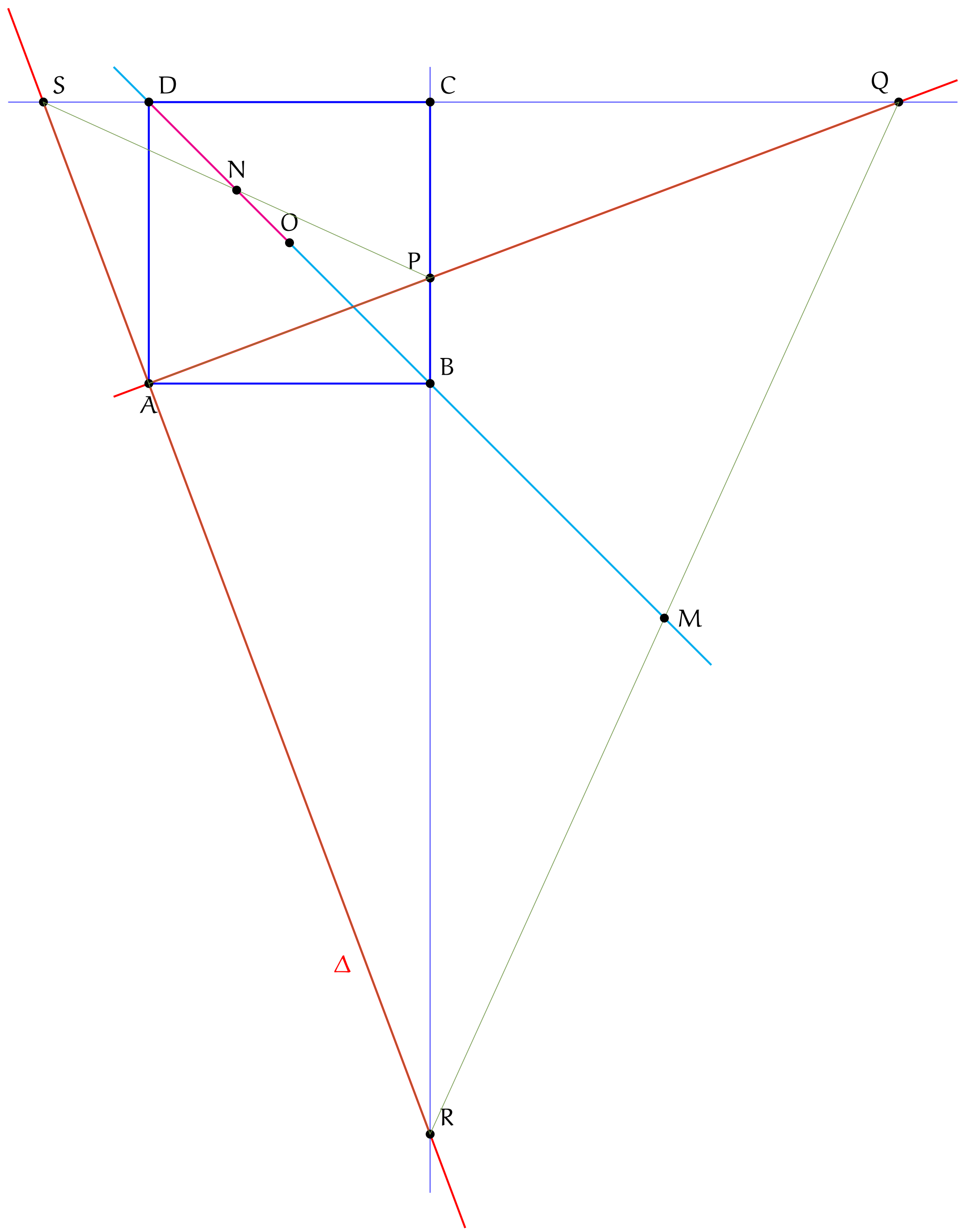
$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Enfin, comme $\dfrac{\pi}{8} = \pi - \dfrac{7\pi}{8}$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$. Par suite

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

EXERCICE 4
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1)



2) **(a)** Puisque $ABCD$ est un carré direct, on a $r(B) = D$. Puisque r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, l'image d'une droite par r est une droite perpendiculaire.
Ainsi, l'image de la droite (BC) par r est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point $r(B) = D$: il s'agit de la droite (CD).

$$\boxed{\text{L'image de la droite } (BC) \text{ par } r \text{ est la droite } (CD).}$$

(b) De même, l'image de la droite Δ par r est la perpendiculaire à Δ passant par le point $r(A) = A$, c'est-à-dire la droite (AP) et l'image de la droite (AP) par r est la perpendiculaire à (AP) passant par le point $r(A) = A$, c'est-à-dire la droite Δ.

Le point R appartient à la droite (BC) et à la droite Δ. Donc le point $r(R)$ est le point d'intersection des droites $r((BC))$ et $r(\Delta)$ c'est-à-dire des droites (CD) et (AP) : il s'agit du point Q.
De même, le point P appartient à la droite (BC) et à la droite (AP). Donc le point $r(P)$ est le point d'intersection des droites $r((BC))$ et $r((AP))$ c'est-à-dire des droites (CD) et Δ : il s'agit du point S.

$$\boxed{r(R) = Q \text{ et } r(P) = S.}$$

(c) Le point Q est l'image du point R par le quart de tour direct de centre A. Donc le triangle ARQ est isocèle rectangle et direct. De même, le triangle APS est isocèle, rectangle et direct.

$$\boxed{\text{Les triangles } ARQ \text{ et } APS \text{ sont isocèles, rectangles et directs.}}$$

3) (a) On munit le plan d'un repère othonormé direct d'origine A. On note $z_B, \dots z_S$ les affixes des points B,..., S, l'affixe du point A étant 0.
L'expression complexe de la rotation r est alors $z' = e^{i\pi/2}z$ ou encore $z' = iz$.
Puisque $r(B) = D$, on a $z_D = iz_B$. De même, $z_Q = iz_R$ et $z_S = iz_P$. Puisque M est le milieu du segment [RP], on a aussi $z_M = \dfrac{1}{2}(z_R + z_Q)$ et de même $z_N = \dfrac{1}{2}(z_P + z_S)$.
Maintenant, l'expression complexe de la similitude s est

$$z' = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z = \frac{1}{2}(1+i)z,$$

et donc

$$z'_R = \frac{1}{2}(1+i)z_R = \frac{1}{2}(z_R + iz_R) = \frac{1}{2}(z_R + z_Q) = z_M,$$

et aussi

$$z'_P = \frac{1}{2}(1+i)z_p = \frac{1}{2}(z_P + iz_P) = \frac{1}{2}(z_P + z_S) = z_N.$$

$$\boxed{s(R) = M \text{ et } s(P) = N.}$$

(b) P décrit le segment [BC] privé du point B et donc, puisque $N = s(P)$, N décrit l'image par s du segment [BC] privé du point B, c'est-à-dire le segment $[s(B)s(C)]$ privé du point $s(B)$. Il nous reste à déterminer $s(B)$ et $s(C)$.

On a $z_D = iz_B$ et puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ou encore, puisque $z_A = 0$,

$$z_C = z_B + z_D = z_B + iz_B = (1+i)z_B.$$

Donc

$$z'_B = \frac{1}{2}(1+i)z_B = \frac{1}{2}z_C = z_O.$$

De même,

$$z'_C = \frac{1}{2}(1+i)z_C = \frac{1}{2}(1+i)(z_B + z_D) = \frac{1}{2}(1+i)(z_B + iz_B) = \frac{1}{2}(1+i)^2 z_B = \frac{1}{2}(2i)z_B = iz_B = z_D.$$

Ainsi $s(B) = O$ et $s(C) = D$. Finalement

$$\boxed{\text{le lieu géométrique du point } N \text{ est le segment [OD] privé du point } O.}$$

(c) L'image par s de la droite (BC) est la droite $(s(B)s(C))$ ou encore la droite (OD) qui est aussi la droite (BD). Comme les points R et P sont sur la droite (BC), les images de ces points par la similitude s sont sur la droite (BD). Or $s(R) = M$, $s(P) = N$ et donc les points M et N sont sur la droite (BD) ou encore

$$\boxed{\text{les points } M, B, N \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

