

**BACCALAUREAT GENERAL**

**MATHEMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement Obligatoire**

**Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

***Le candidat doit traiter les quatre exercices.***

***La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

### Exercice 1 (3 points)

1. Soit  $u$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

- Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
- Comparer les quatre premiers termes de la suite  $u$  aux quatre premiers termes de la suite  $w$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \frac{n}{n+1}$ .
- A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = w_n$ .

2. Soit  $v$  la suite de terme général  $v_n$  défini par  $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

- Montrer que  $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$ .
- Soit  $S_n$  la somme définie pour tout entier naturel non nul  $n$  par :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ .  
Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .  
Déterminer la limite de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice 2 (4 points)

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  contenant chacune  $k$  boules, où  $k$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne  $U_1$ , deux boules noires dans l'urne  $U_2$  et une boule noire dans l'urne  $U_3$ , et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne  $U_1$ , note sa couleur et la remet dans l'urne  $U_1$  ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne  $U_2$ , note sa couleur et la remet dans l'urne  $U_2$  ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne  $U_3$ , note sa couleur et la remet dans l'urne  $U_3$ .

On désigne par A, B, C, et N les événements suivants :

A : "Le dé amène le numéro 1."

B : "Le dé amène un multiple de trois."

C : "Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de trois."

N : "La boule tirée est noire."

1. Le joueur joue une partie.

- a) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à  $\frac{5}{3k}$ .
- b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.
- c) Déterminer  $k$  pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à  $\frac{1}{2}$ .
- d) Déterminer  $k$  pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à  $\frac{1}{30}$ .

2. Dans cette question,  $k$  est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à  $\frac{1}{30}$ .

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer, sous forme exacte puis arrondie à  $10^{-3}$ , la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

### Exercice 3 (8 points)

#### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$ .

- Déterminer les limites de  $\varphi$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  - Etudier le sens de variation de  $\varphi$  puis dresser son tableau de variation sur  $\mathbf{R}$ .
- Démontrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet deux solutions dans  $\mathbf{R}$ , dont l'une dans l'intervalle  $[1; +\infty[$ , qui sera notée  $\alpha$ .  
Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .
- En déduire le signe de  $\varphi(x)$  sur  $\mathbf{R}$  et le présenter dans un tableau.

#### Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur une feuille annexe, page 5, sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions  $f$  et  $g$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbf{R}$  par :  $f(x) = (2x+1)e^{-x}$  et  $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ .

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  sont notées  $C_f$  et  $C_g$ .

- Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées  $(0, 1)$  et admettent en ce point la même tangente.
- Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$  où  $\varphi$  est la fonction étudiée dans la **partie A**.
  - A l'aide d'un tableau, étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  sur  $\mathbf{R}$ .
  - En déduire la position relative des courbes  $C_f$  et  $C_g$ .
- Montrer que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $h(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$  est une primitive sur  $\mathbf{R}$  de la fonction  $x \mapsto f(x) - g(x)$ .
  - En déduire l'aire  $\mathcal{A}$ , exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes  $C_f$  et  $C_g$  et les droites d'équations  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = 0$ .  
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à  $10^{-4}$  de cette aire.

## Exercice 4 (5 points)

### Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .  
Les solutions seront notées  $z'$  et  $z''$ ,  $z'$  désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.  
Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Donner la valeur exacte de  $(z')^{2004}$  sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

### Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$  ; (unité graphique : 2cm).

1. Montrer que les points A d'affixe  $1 + i\sqrt{3}$  et B d'affixe  $1 - i\sqrt{3}$  sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.  
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation  $r_1$  de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .  
et B' l'image du point B par la rotation  $r_2$  de centre A et d'angle  $+\frac{\pi}{2}$ .  
Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment [OB].
  - a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?
  - b) Calculer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AI}$ .  
Montrer que l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{O'B'}$  est égale à  $3\sqrt{3} - i$ .
  - c) La conjecture émise à la question a) est-elle vraie ?

EXERCICE 3

