BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichéry

EXERCICE 1

1. **a)** $u_1 = \dfrac{1}{2-u_0} = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$ puis $u_2 = \dfrac{1}{2-u_1} = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ et enfin $u_3 = \dfrac{1}{2-u_2} = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{2}{3} \text{ et } u_3 = \frac{3}{4}.}$$

b) $w_0 = 0 = u_0$. $w_1 = \dfrac{1}{2} = u_1$, $w_2 = \dfrac{2}{3} = u_2$ et $w_3 = \dfrac{3}{4} = u_3$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

- D'après ce qui précéde, l'égalité est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = w_n$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{n}{n+1}.}$$

2) **a)** $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\ln(4)$.

$$\boxed{v_1 + v_2 + v_3 = -\ln(4).}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
S_n &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \ln\left(1 \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{3} \times \ldots \times \frac{n-1}{n-1} \times \frac{n}{n} \times \frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= -\ln(n+1).
\end{aligned}$$

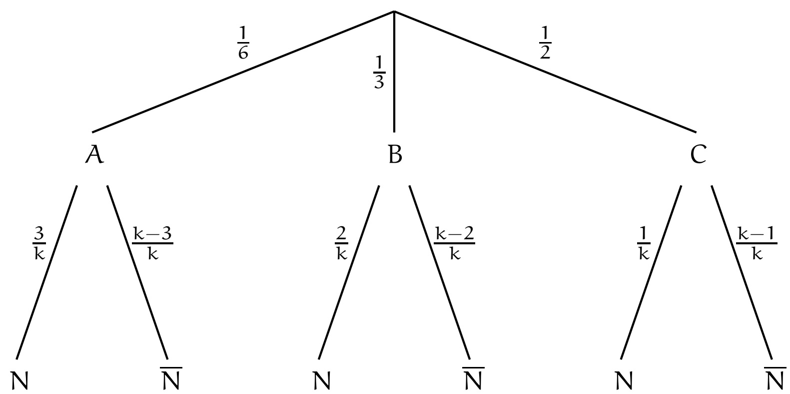
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ S_n = -\ln(n+1),}$$

et en particulier

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty.}$$

EXERCICE 2

1. a) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(N) &= p(N\cap A)+p(N\cap B)+p(N\cap C) = p(A)\times p_A(N)+p(B)\times p_B(N)+p(C)\times p_C(N) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{3}{k}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{k}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{k} = \frac{1}{2k}+\frac{2}{3k}+\frac{1}{2k} = \frac{1}{k}+\frac{2}{3k} = \frac{5}{3k}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(N) = \frac{5}{3k}.}$$

b) La probabilité demandée est $p_N(A)$. Or

$$p_N(A) = \frac{p(A\cap N)}{p(N)} = \frac{p(A)\times p_A(N)}{p(N)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{k}}{\frac{5}{3k}} = \frac{1}{2k}\times\frac{3k}{5} = \frac{3}{10}.$$

$$\boxed{p_N(A) = \frac{3}{10}.}$$

On peut noter que cette dernière probabilité ne dépend pas de k.

c) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$p(N) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3k}{5} \leq 2 \Leftrightarrow k \leq \frac{10}{3} \Leftrightarrow k \leq 3 \text{ (car } k \text{ est un entier).}$$

Finalement la probabilité de l'événement N est supérieure à $\frac{1}{2}$ si et seulement si $k \leq 3$.

$$\boxed{p(N) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \leq 3.}$$

d) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$p(N) = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \geq k = \frac{30\times 5}{3} \Leftrightarrow k = 50.$$

$$\boxed{p(N) = \frac{1}{30} \Leftrightarrow k = 50.}$$

2. Notons X le nombre de boules noires obtenues. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 20 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est noire » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{30}$ ou « la boule tirée n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{29}{30}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{1}{30}$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$ et on a

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^{20} = 0,492 \text{ arrondie à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 3

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

1. **a)** Déterminons la limite de φ en $-\infty$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Comme d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)e^{-x} = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty.}$$

Déterminons la limite de φ en $+\infty$. Pour tout réel x on a

$$\varphi(x) = x^2e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - 1 = \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + e^{-x} - 1.$$

Déjà on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. D'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$. Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + e^{-x} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = -1.}$$

b) Les deux fonctions $x \mapsto x^2+x+1$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $x \mapsto (x^2+x+1)e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction φ. De plus, pour tout réel x on a

$$\varphi'(x) = (2x+1)e^{-x} + (x^2+x+1)(-e^{-x}) = e^{-x}(2x+1-x^2-x-1) = (-x^2+x)e^{-x}.$$

Puisque pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$, la fonction φ' est du signe du trinôme $x \mapsto -x^2+x = x(1-x)$. On en déduit que la fonction φ' est strictement négative sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, strictement positive sur $]0, 1[$ et s'annule en 0 et en 1.

Tableau de variation de φ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}-1$	$\searrow$	-1

2. On note déjà que $\varphi(0) = 0$.
Ensuite φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1]$. Mais alors, pour tout réel x non nul et élément de $]-\infty, 1]$, on a $\varphi(x) > \varphi(0)$ ou encore $\varphi(x) > 0$. En particulier, pour tout réel x non nul et élément de $]-\infty, 1]$, on a $\varphi(x) \neq 0$.

La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $\varphi(1) = \frac{3}{e} - 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = -1$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x), \varphi(1)]$ c'est-à-dire $]-1, \frac{3}{e}-1]$, l'équation $\varphi(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[1, +\infty[$. On note alors que $e < 3$ et donc que $\frac{3}{e} - 1 > 0$. Ainsi 0 est élément de l'intervalle $]-1, \frac{3}{e} - 1]$. Finalement

l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ à savoir 0 et un certain réel α élément de $[1, +\infty[$.

La machine fournit $\varphi(1,79) = 0,0007\ldots > 0$ et $\varphi(1,8) = -0,001\ldots < 0$ ce qui s'écrit encore $\varphi(1,79) > \varphi(\alpha) > \varphi(1,8)$.
Puisque la fonction φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{1,79 < \alpha < 1,8}$$

et puisque $1,8 - 1,79 = 10^{-2}$, on a fourni un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. D'après la question précédente, φ est strictement positive sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$. D'autre part, φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et donc, si x est un réel tel que $1 \leq x < \alpha$, on a $\varphi(x) > \varphi(\alpha)$ ou encore $\varphi(x) > 0$ et si $x > \alpha$, on a $\varphi(x) < 0$.

On résume ces différents résultats dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

1. $f(0) = (2 \times 0 + 1)e^{-0} = 1$ et $g(0) = \dfrac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = 1$.

Donc les courbes C_f et C_g passent par le point A de coordonnées $(1, 0)$.

Ensuite, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1)(-e^{-x}) = (2 - 2x - 1)e^{-x} = (-2x + 1)e^{-x}.$$

D'autre part, pour tout réel x on a $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$. En particulier, pour tout réel x, on a $x^2 + x + 1 \neq 0$.

On en déduit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout réel x, on a

$$g'(x) = \frac{2(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Mais alors $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$. Ainsi les tangentes aux courbes C_f et C_g au point A ont même coefficient directeur et sont donc une seule et même droite à savoir la droite d'équation $y = x + 1$.

$$\boxed{\text{Les courbes } C_f \text{ et } C_g \text{ passent par } A(1, 0) \text{ et admettent la même tangente en ce point.}}$$

2. **a)** Soit x un réel.

$$f(x) - g(x) = (2x + 1)e^{-x} - \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = (2x + 1)\left(e^{-x} - \frac{1}{x^2 + x + 1}\right) = (2x + 1)\frac{(x^2 + x + 1)e^{-x} - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}.}$$

b) On a vu à la question précédente que pour tout réel x on a $x^2 + x + 1 > 0$. Mais alors, pour tout réel x, $f(x) - g(x)$ est du signe de $(2x + 1)\varphi(x)$. Le signe de la fonction φ ayant été étudié à la question A.3., on peut remplir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		α		$+\infty$
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

c) On en déduit que C_f est strictement au-dessous de C_g sur $]-\infty, -\dfrac{1}{2}[$ et sur $]\alpha, +\infty[$, strictement au-dessus sur $]-\dfrac{1}{2}, 0[$ et sur $]0, 1[$ puis que C_f et C_g se coupent aux points de coordonnées $(-\dfrac{1}{2}, 0)$, $(0, 1)$ et $(\alpha, f(\alpha))$.

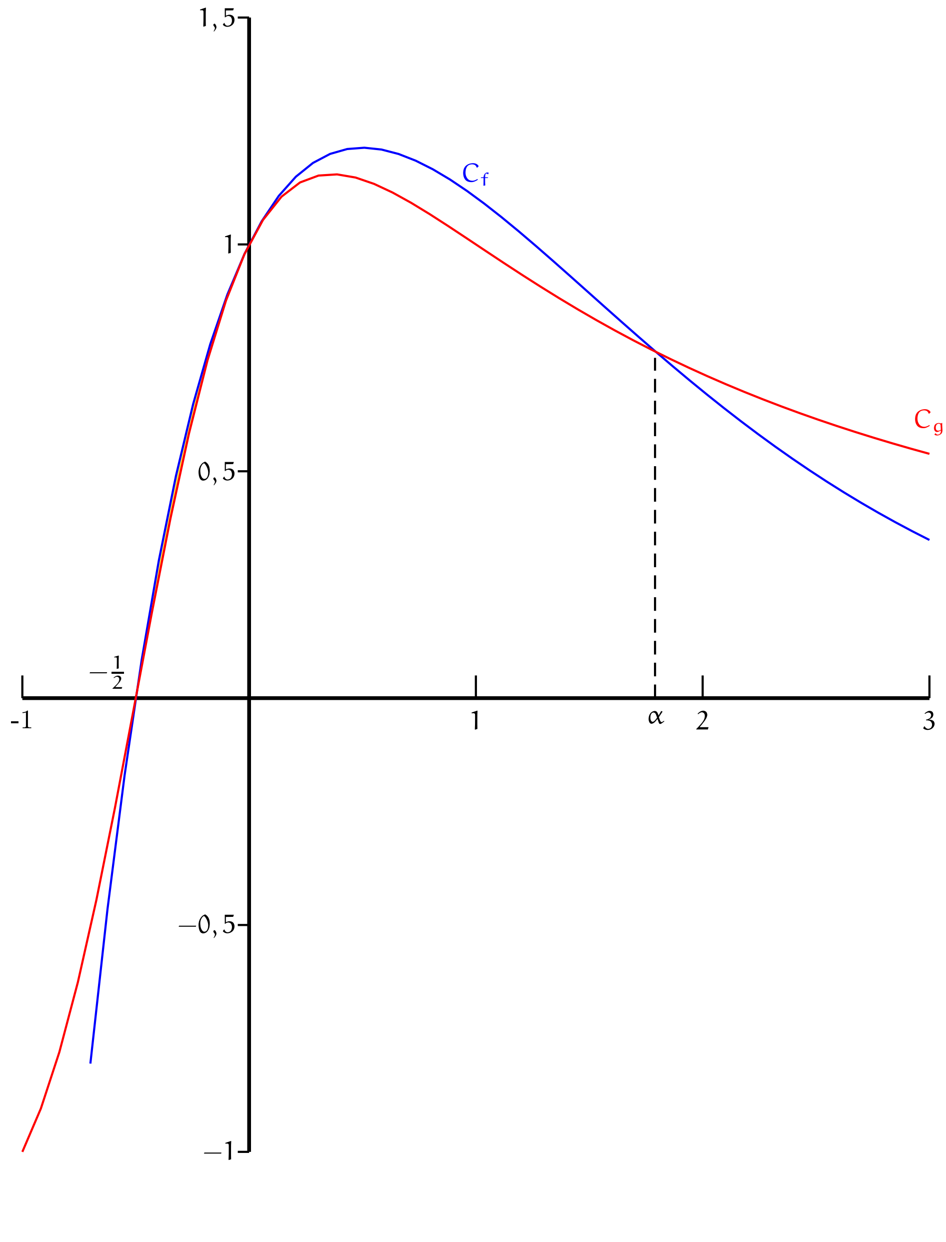
3. a) Puisque pour tout réel x on a $x^2+x+1>0$, la fonction $x \mapsto \ln(x^2+x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction h. De plus pour tout réel x,

$$h'(x) = -2e^{-x}+(-2x-3)(-e^{-x})-\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = (-2+2x+3)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x)-g(x).$$

La fonction h est une primitive de la fonction $f-g$ sur $\mathbb{R}$.

b) D'après la question 2.c), pour x élément de $[-\frac{1}{2},0]$ on a $f(x)-g(x) \geq 0$. Par suite

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f(x)-g(x))\,dx = [h(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left[(-2x-3)e^{-x}-\ln(x^2+x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}\\ &= (-3e^0-\ln(1))-(-2e^{\frac{1}{2}}-\ln\left(\frac{3}{4}\right)) = -3-\ln\left(\frac{4}{3}\right)+2e^{\frac{1}{2}} = 0,0098 \text{ unité d'aire arrondie à } 10^{-4}.\end{aligned}$$



EXERCICE 4
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$. L'équation proposée admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z' = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z'' = \overline{z'} = 1 - i\sqrt{3}$.

$$\boxed{z' = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z'' = 1 - i\sqrt{3}.}$$

Maintenant $z' = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z'' = \overline{z'} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

2. $z'^{2004} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2004} = 2^{2004}e^{2004i\frac{\pi}{3}} = 2^{2004}e^{668i\pi} = 2^{2004}e^{i(334\times2\pi)} = 2^{2004} \times e^{0i}$.

$$\boxed{z'^{2004} = 2^{2004} \times e^{0i}.}$$

Partie B

1. A et B sont les points d'affixes respectives z' et z''. Donc, d'après la question 1., $OA = |z'| = 2$ et $OB = |z''| = 2$.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 2.}$$

Voir graphique à la fin de l'exercice.

2. L'expression complexe de la rotation r_1 est $z' = z_A + e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ou encore

$$z' = (1 + i\sqrt{3}) - i(z - 1 - i\sqrt{3}) = -iz + 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

Mais alors

$$z_{O'} = -i \times 0 + 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

L'expression complexe de la rotation r_2 est $z' = z_A + e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ou encore

$$z' = (1 + i\sqrt{3}) + i(z - 1 - i\sqrt{3}) = iz + 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}).$$

Mais alors

$$z_{B'} = i \times (1 - i\sqrt{3}) + 1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_{O'} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) \text{ et } z_{B'} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}.}$$

3. a) Il semblerait que la droite (AI) soit la hauteur issue de A du triangle $AO'B'$ (voir graphique à la fin).
b) $z_I = \dfrac{1}{2}(z_O + z_B) = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Puis

$$z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - (1 + i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

D'autre part

$$z_{\overrightarrow{O'B'}} = z_{B'} - z_{O'} = (1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})) = 3\sqrt{3} - i.$$

c) Mais alors

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{O'B'} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(3\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times (-1) = 0.$$

Ainsi, la droite (AI) est perpendiculaire à la droite $(O'B')$ ou encore

$$\boxed{\text{la droite } (AI) \text{ est la hauteur issue de } A \text{ du triangle } AO'B'.}$$