BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Centres étrangers

EXERCICE 1

1.

$$a' = -2\overline{a} + 2i = -2(2i) + 2i = -2i,$$

et

$$b' = -2\overline{b} + 2i = -2(3 + 2i) + 2i = -6 - 2i.$$

$$\boxed{a' = a = -2i \text{ et } b' = -6 - 2i.}$$

2. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z' = -2(x - iy) + 2i = -2x + i(2y + 2).$$

Ainsi, M' est le point de coordonnées (x', y') où $x' = -2x$ et $y' = 2y + 2$. Mais alors, si le point M appartient à la droite (Δ) alors $y = -2$ et donc $y' = 2(-2) + 2 = -2$ ce qui montre que le point M' appartient aussi à la droite (Δ).

$$\boxed{\text{Si le point } M \text{ appartient à la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = -2, \text{ le point } M' \text{ appartient à } (\Delta).}$$

3. Soit z un nombre complexe.

$$|z' + 2i| = |-2\overline{z} + 4i| = |-2(\overline{z} - 2i)| = |-2| \times |\overline{z} - 2i| = 2\left|\overline{z + 2i}\right| = 2|z + 2i|.$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ d'affixe } z, \text{ on a } |z' + 2i| = 2|z + 2i|.}$$

Géométriquement, cela signifie que $AM' = 2AM$.

4. a. On sait qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ est $\arg(z - z_A)$ ou encore $\arg(z + 2i)$ c'est-à-dire θ.
b. Soit z un nombre complexe.

$$(z + 2i)(z' + 2i) = (z + 2i)(-2\overline{z} + 4i) = -2(z + 2i)(\overline{z} - 2i) = -2(z + 2i)\overline{(z + 2i)} = -2|z + 2i|^2,$$

et comme $|z + 2i|^2$ est un réel positif ou nul, on a montré que

$$\boxed{(z + 2i)(z' + 2i) \text{ est un réel négatif ou nul.}}$$

c. Soit z un nombre complexe. Si $z = -2i$, la question 1. montre que $z' = -2i$. Réciproquement, si $z' = -2i$, alors $(z + 2i)(z' + 2i) = 0$ puis $-2|z + 2i|^2 = 0$ puis $z + 2i = 0$ et donc $z = -2i$. Finalement,

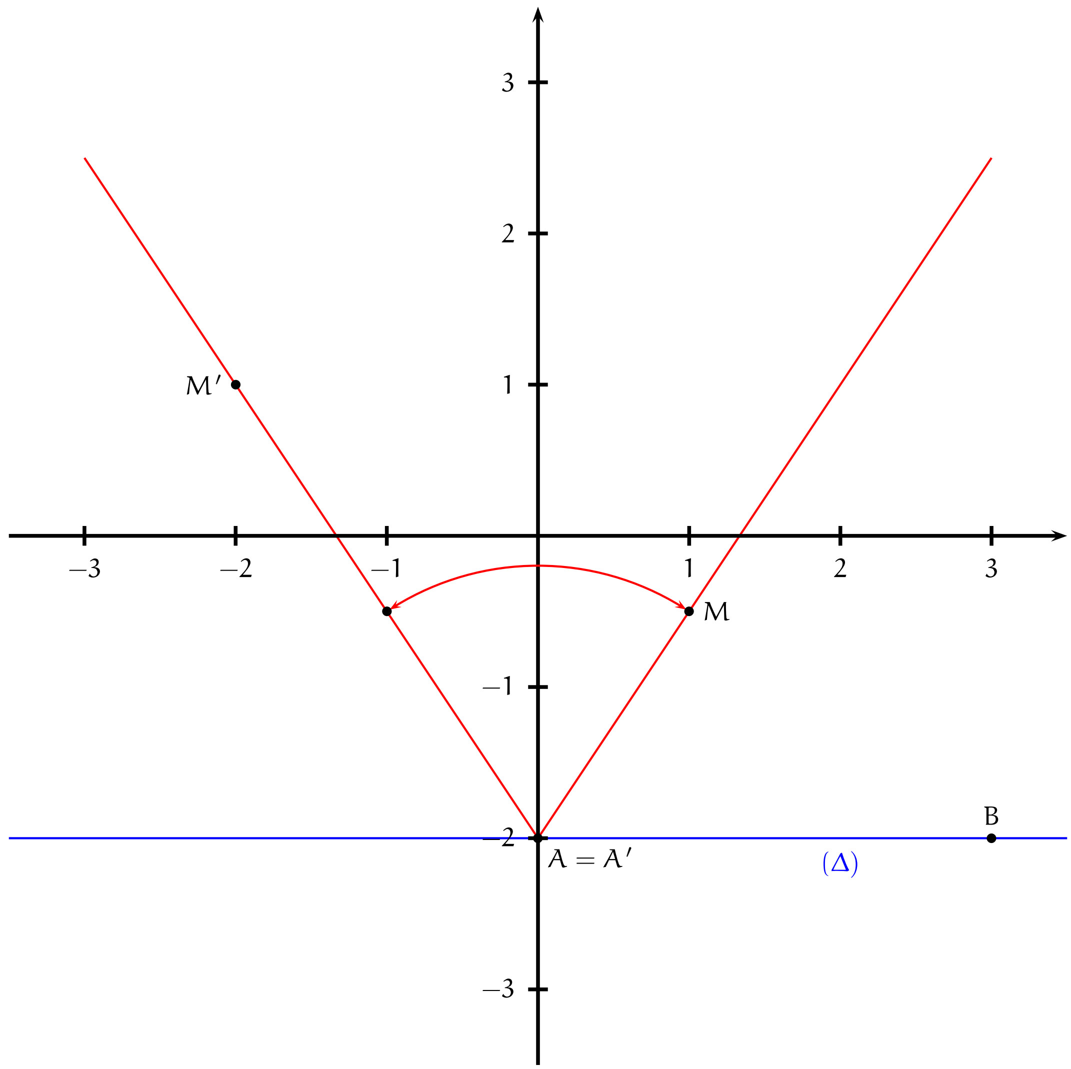
$$\text{pour tout nombre complexe } z, \ (z = -2i \Leftrightarrow z' = -2i).$$

Dans cette question, $M \neq A$ et donc $z \neq -2i$. Puisque $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel strictement négatif, on a $\arg(z+2i)(z'+2i) = \pi\ [2\pi]$ ou encore $\arg(z + 2i) + \arg(z' + 2i) = \pi\ [2\pi]$ ou enfin $\arg(z' + 2i) = \pi - \arg(z + 2i) = \pi - \theta\ [2\pi]$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A,\ \arg(z' + 2i) = \pi - \theta\ [2\pi].}$$

d. Par suite, pour tout point M distinct de A, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right)$ $[2\pi]$. On en déduit que la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ est bissectrice des demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ ou encore que les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

5. Si $M = A$, alors $M' = A$. Sinon, un point M distinct de A étant donné, on construit la symétrique de la demi-droite $[AM)$ par rapport à l'axe des ordonnées et M' est le point de cette demi-droite vérifiant $AM' = 2AM$.



EXERCICE 2
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de Spécialité)

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. L'énoncé fournit $p_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{20}$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{5}$.

b. $p(R_{n+1} \cap R_n) = p(R_n) \times p_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{p_n}{20}$ et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = p(\overline{R_n}) \times p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \dfrac{q_n}{5}$.

c. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_{n+1} \cap R_n) + p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = \frac{p_n}{20} + \frac{q_n}{5}.$$

d. Enfin, puisque $q_n = 1 - p_n$, on obtient

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{20} + \frac{1-p_n}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{5}\right) p_n = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n.}$$

2. **a.** Soit n un entier naturel non nul.

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23} = -\frac{3}{20} p_n + \frac{1}{5} - \frac{4}{23} = -\frac{3}{20} p_n + \frac{3}{5 \times 23} = -\frac{3}{20}\left(p_n - \frac{4}{23}\right) = -\frac{3}{20} v_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } -\frac{3}{20}.}$$

b. Soit n un entier naturel non nul. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $q = -\dfrac{3}{20}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \dfrac{4}{23} = -\dfrac{4}{23}$. Mais alors, on sait que

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = -\frac{4}{23} \times \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1},$$

puis

$$p_n = \frac{4}{23} + v_n = \frac{4}{23} - \frac{4}{23} \times \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} = \frac{4}{23}\left(1 - \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = \frac{4}{23}\left(1 - \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1}\right).}$$

c. Puisque $-1 < -\dfrac{3}{20} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{4}{23}.}$$

EXERCICE 3

I. Première partie

1. $g(0) = 0 \times e^{-1} = 0$ et $g(1) = 1 \times e^0 = 1$. D'autre part la fonction g est dérivable sur $[0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel x de $[0;1]$,

$$g'(x) = e^{x-1} + x \times e^{x-1} = (1+x)e^{x-1}.$$

Pour tout réel x de $[0;1]$, on a $1+x \geq 0$ et $e^{x-1} \geq 0$ et donc $g'(x) \geq 0$. Par suite, la fonction g est croissante sur $[0;1]$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie les conditions (1) et (2).}}$$

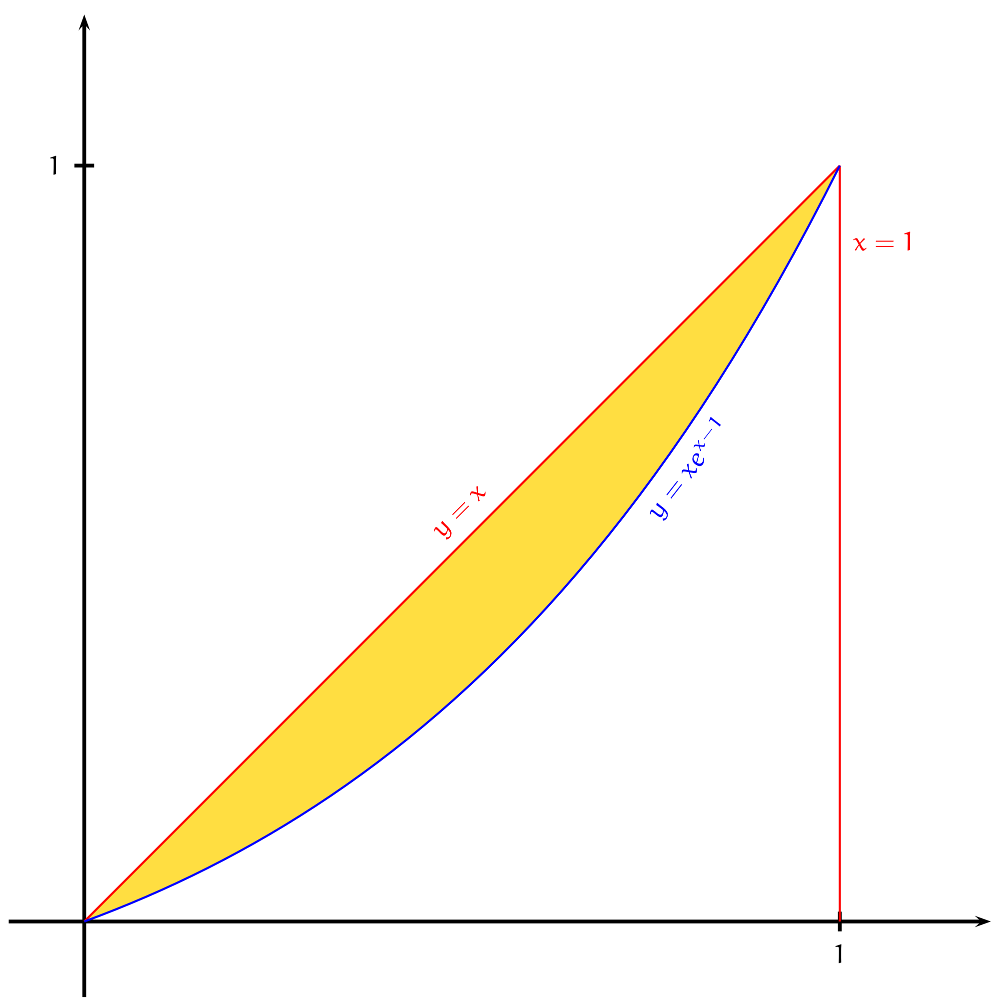
2. Soit x un réel élément de $[0;1]$.

$$g(x) - x = xe^{x-1} - x = x(e^{x-1} - 1) = x(\frac{e^x}{e} - 1) = x\frac{e^x - e}{e} = \frac{x}{e}(e^x - e).$$

Soit x un réel élément de $[0;1]$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^x \leq e^1$ ou encore $e^x \leq e$ et donc $e^x - e \leq 0$. D'autre part, $\frac{x}{e} \geq 0$ et finalement $\frac{x}{e}(e^x - e) \leq 0$.
Ainsi, pour tout réel x de $[0;1]$, $g(x) - x \leq 0$ ou encore $g(x) \leq x$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie la condition (3).}}$$

3.



II. Seconde partie

1. Par hypothèse, pour tout réel x de $[0;1]$, on a $f(x) \leq x$. On sait alors que l'aire du domaine considéré, exprimée en unité d'aire, est $\int_0^1 [x - f(x)]\, dx$.

2. Calculons tout d'abord $\int_0^1 g(x)\, dx$ c'est-à-dire $\int_0^1 xe^{x-1}\, dx$.
Pour x réel élément de $[0;1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$. u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel x de $[0;1]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{x-1}$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x-1}\, dx &= \left[xe^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1}\, dx = (1 \times e^0 - 0 \times e^{-1}) - \left[e^{x-1}\right]_0^1 \\ &= 1 - (e^0 - e^{-1}) = e^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Mais alors, par linéarité de l'intégrale,

$$I_g = \int_0^1 [x - g(x)]\, dx = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 xe^{x-1}\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{I_g = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.}$$

3. **a.** Soit n un entier naturel. Par linéarité de l'intégrale on a

$$I_n = \int_0^1 [x - f_n(x)]\, dx = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} - u_n.$$

b. Soit n un entier naturel.
Soit t un réel de $[0;1]$. On a $t \leq 1$ et donc, puisque $t^n \geq 0$, on a $t^n \times t \leq t^n \times 1$ ou encore $t^{n+1} \leq t^n$. Puisque $\frac{2}{1+t} \geq 0$, on obtient finalement $\frac{2t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2t^n}{1+t}$.

Ainsi, pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\frac{2t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2t^n}{1+t}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors $\int_0^1 \frac{2t^{n+1}}{1+t}\, dt \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\, dt$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c. Soit n un entier naturel.
Soit t un réel élément de $[0;1]$. On a d'une part $\frac{1}{1+t} \geq 0$ et d'autre part, $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1+t}{1+t}$ ou encore $\frac{1}{1+t} \leq 1$. En résumé, $0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$. Puisque $t^n \geq 0$, après multiplication des trois membres de cet encadrement par t^n, on obtient

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

d. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\frac{2t^n}{1+t} \geq 0$ et donc, par positivité de l'intégrale on a $\int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\, dt \geq 0$. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a aussi $\frac{2t^n}{1+t} \leq 2t^n$ et donc, par croissance de l'intégrale on a $\int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\, dt \leq \int_0^1 2t^n\, dt$ avec

$$\int_0^1 2t^n\, dt = 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}.$$

Finalement $0 \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\, dt \leq \frac{2}{n+1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}.}$$

e. Puisque $\dfrac{2}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}.}$$

