Planche n° 44. Fonctions de deux variables réelles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (I)**

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes (hors programme) :

1) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ **2)** $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ **3)** $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$ **4)** $\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$
5) $\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$

Exercice n° 2 (* I)** (hors programme)

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n° 3 (*T)

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall\lambda\in]0,+\infty[$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^r f(x,y)$.

Montrer pour une telle fonction l'identité d'Euler :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=rf(x,y).$$

Exercice n° 4 (I)**

1) Extrema de la fonction $f\ :\ (x,y)\mapsto x^2y+\ln\left(1+y^2\right)$.
2) Extrema de la fonction $f\ :\ (x,y)\mapsto -2(x-y)^2+x^4+y^4$.

Exercice n° 5 (* I)**

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1) $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ en posant $u=x+y$ et $v=x+2y$.

2) $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en passant en polaires.

Exercice n° 6 (*IT)**

1) Soient $\alpha>0$ puis $T=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u>0,\ v>0 \text{ et } u+v<\alpha\right\}$. Montrer que T est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle (on admettra l'existence d'un maximum).

Exercice n° 7 (*)

Minimum de $f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, a réel donné.

Exercice n° 8 (*T) On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $\mathscr{R}=\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$.

1) Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z=\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)$. Equation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en le point $(2,1,3/2)$ et plus généralement en un point (x_0,y_0,z_0) de $\mathscr{S}$.

2) Déterminer les points de $\mathscr{S}$ en lesquels le plan tangent passe par O.

