Planche n° 43. Variables aléatoires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (*T)**

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N ($N \geqslant 1$). On extrait simultanément n boules ($n \leqslant N$). On note X la variable aléatoire égale au au plus grand des numéros des boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

Recommencer l'exercice en prélevant les n boules par tirages successifs avec remise.

Exercice n° 2 : (T)**

On lance successivement deux dés non pipés. On note X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer.
Déterminer les lois de probabilité de X, $|X|$ et X^2 ainsi que les espérances correspondantes.

Exercice n° 3 : (IT)** (Oral CCINP)

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par les joueurs sur une partie.

a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice n° 4 : (IT)** (Oral CCINP)

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1) Préciser les valeurs prises par X.

2) a) Déterminer la probabilité $p(X = 2)$.
b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3) a) Calculer $E(X)$.
b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice n° 5 : (IT)** (Oral CCINP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer la loi de Y.

Exercice n° 6 : (*IT)**

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n et de p jetons numérotés de 1 à p où $p \leqslant n$. Chacun des p jetons est placé au hasard de manière équiprobable dans l'une des n boîtes avec possibilité d'avoir plusieurs jetons dans une même boîte. Soient X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes restées vides et Y la variable aléatoire égale au nombre de jetons dans la boîte n° 1. Déterminer l'espérance des variables X et Y.

Exercice n° 7 : (T)**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que $(p(X = 1), \dots, p(X = n))$ soit proportionnelle à $(1, \dots, n)$. Déterminer la loi de X ainsi que l'espérance et la variance de X.

Exercice n° 8 : (*T)

Deux joueurs A et B lancent deux pièces de monnaie. Si les deux pièces tombent sur pile, A gagne. Sinon, B gagne 3 euros. Combien doit gagner A pour que le jeu soit équitable ?

Exercice n° 9 : (*T)

On considère le jeu suivant : un joueur paie 3 euros pour jouer. Ensuite, il lance trois pièces équilibrées.
Pour chaque Pile qu'il obtient, il gagne 2 euros.
On désigne par X le nombre de Pile obtenus et par Y le gain algébrique du joueur.
1) Exprimer Y en fonction de X.
2) Donner la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3) Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$. Le joueur est-il gagnant en moyenne ?
4) Expliciter la loi de Y.

Exercice n° 10 : (IT)**

On lance n fois un dé à 6 faces. Comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 compris entre 0 et $n/3$ soit supérieure à $1/2$? Utiliser l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBICHEV.

Exercice n° 11 : (T)**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles prenant leurs valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On suppose que la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	0	1	2
0	p	$p/2$	$p/4$
1	$2p$	p	$p/2$
2	$4p$	$2p$	p

1) Pour quelle valeur de p ce tableau représente-t-il effectivement la loi d'un couple ?
2) Déterminer les lois marginales.
3) Calculer la covariance du couple (X, Y).

Exercice n° 12 : (T)**

Soient $p \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires suivant des lois de BERNOULLI telles que la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	0	1
0	$1/6 + p$	$1/3 - p$
1	$1/2 - p$	p

1) Pour quelle valeur de p ce tableau représente-t-il effectivement la loi d'un couple ?
2) Déterminer les lois marginales. Calculer les espérances et les variances de X et Y.
3) Calculer la covariance du couple (X, Y).
4) Pour quelles valeurs de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice n° 13 : (T)** (La loi faible des grands nombres.)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé, de même loi et deux à deux indépendantes. On note m leur espérance. On pose $Z_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|Z_n - m| < \varepsilon) = 1$.

