Planche n° 42. Probabilités

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (*T) (extrait de la revue Scientific American de 1959)

Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls ? (c'est-à-dire : Mr Jones a deux enfants. L'ainée est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?)

Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys ? (c'est-à-dire Mr Smith a deux enfants. L'un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

Exercice n° 2 : (*T)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé tels que $p(A) = 0,4$ et $p(B) = 0,6$ et $p_{\overline{A}}(B) = 0,4$.
Calculer $p_A(B)$, $p(A \cup B)$ et $p_{\overline{B}}(A)$.

Exercice n° 3 : (T)**

1) On tire 5 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cœurs ?

2) On tire 5 cartes successivement et sans remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cœurs ?

3) On tire 5 cartes successivement et avec remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 cœurs ?

Exercice n° 4 : (T)**

Une urne contient 4 boules blanches et 3 noires. On tire 3 boules une par une sans remise.
Quelle est la probabilité que la première soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice n° 5 : (T)**

Dans une loterie, il y a 30 billets dont n sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. On achète 2 billets au hasard. Déterminer la probabilité de ne rien gagner et en déduire la valeur de n à partir de laquelle on a 90% de chance de gagner.

Exercice n° 6 : (T)**

On jette deux dés non pipés, un dé noir et un dé blanc.
Soient A l'événement : « le chiffre du dé noir est pair », B l'événement : « le chiffre du dé blanc est impair », C l'événement : « les deux chiffres ont même parité ».
Montrer que A et B, A et C, B et C sont indépendants mais que les trois événements A, B et C ne le sont pas.

Exercice n° 7 : (**)

On dispose de $2n$ cartons numérotées de 1 à $2n$. On les tire un par un au hasard. Quelle est la probabilité que les numéros impairs soient tous avant les numéros pairs ?

Exercice n° 8 : (**)

Un jeu de 32 cartes est truqué. Une des cartes, autre que l'as de cœur, a été remplacée par un second as de cœur.

1) On tire 3 cartes simultanément. Quelle est la probabilité que l'on se rende compte de la supercherie ?

2) Et si l'on tire 4 cartes ? 5 cartes ?

3) A partir de combien de cartes tirées a-t-on au moins une chance sur deux de voir la supercherie ?

Exercice n° 9 : (**)

Soit N un entier strictement positif, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.
Une particule se déplace sur une droite en faisant des sauts d'une unité vers la gauche ou vers la droite. A chaque instant, la probabilité qu'elle aille vers la droite est p et celle qu'elle aille vers la gauche $q = 1 - p$, tous ces déplacements étant supposés indépendants.
Initialement, la particule est en $n \in [\![0, N]\!]$, et elle s'arrête dès qu'elle atteint l'une des extrémités de cet intervalle : 0 ou N.
On note q_n la probabilité que la particule s'arrête en 0.

1) a) Justifier que $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.
b) Montrer que pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant N - 1$, on a

$$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$$

c) En déduire une expression de q_n en fonction de n, N, p et q.
On pensera à distinguer les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$.

2) Calculer de même la probabilité p_n que la particule s'arrête en N (mêmes cas).

3) Calculer $p_n + q_n$, et en déduire la probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais.

Exercice n° 10 : (Oral CCINP)**

1) Enoncer et démontrer la formule de Bayes.

2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice n° 11 : (Oral CCINP)**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n-ème tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice n° 12 : (***) (le problème du scrutin)

Au cours d'une élection, deux candidats A et B s'affrontent. Le candidat A l'emporte sur le candidat B par a voix contre b $(a > b)$. On veut calculer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points (α, β) et $(\alpha + m, \beta + n)$ où $(\alpha, \beta, m, n) \in \mathbb{N}^4$.
On va de (α, β) à $(\alpha + m, \beta + n)$ par déplacements successifs de une unité vers la droite ou une unité vers le haut à chaque étape. On appelle chemin de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + n)$ un tel trajet.
Combien y a-t-il de chemins de (α, β) et $(\alpha + m, \beta + n)$?

2) a) Montrer qu'un chemin de $(0, 1)$ à (a, b), a au moins un point commun avec la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Montrer qu'il y a autant de chemins de $(0, 0)$ à (a, b), passant par $(1, 0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0, 0)$ que de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$.

c) En déduire le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) situés en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0, 0)$.

3) Déterminer la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été constamment en tête.

Exercice n° 13 : (***) (le problème des allumettes de Banach)

Une personne porte à tout moment deux boîtes d'allumettes, une dans la poche gauche, l'autre dans la poche droite. Chaque fois qu'elle a besoin d'une allumette, elle choisit au hasard dans une de ses boîtes. Elle découvre subitement que la boîte tirée est vide. Les deux boîtes contenaient initialement n allumettes chacune.
Quelle est la probabilité qu'il lui reste k allumettes dans l'autre boîte ?
Quand $n = 6$, combien reste-t-il d'allumettes dans la poche non vide en moyenne ?

Exercice n° 14 : (***) (le problème de la ruine du joueur)

Deux joueurs A et B qui disposent au départ d'un capital de n et $s-n$ respectivement ($0 \leqslant n \leqslant s$) jouent à pile ou face. Le joueur A parie toujours sur pile, la probabilité de pile est égale à p ($p \in]0,1[$). A chaque coup, le joueur perdant donne 1 euro à l'autre. Le jeu se poursuit jusqu'à la ruine de l'un des deux joueurs.
Quelles sont les chances de chacun des joueurs de ruiner son adversaire ?