Planche n° 41. Dénombrements

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (IT) (le poker)

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On distribue 5 cartes à un joueur. L'ordre des cartes est As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7 soit un total de 8 *hauteurs*. Il y a quatre *couleurs* : ♦ (carreau), ♥ (cœur), ♠ (pique) et ♣ (trèfle).

1) Combien de mains différentes peut-il recevoir (nombre de distributions possibles) ?
2) Combien contiennent une quinte floche (5 cartes consécutives dans une même couleur) ?
3) Combien contiennent un carré (4 cartes d'une même hauteur et une autre carte) ?
4) Combien contiennent une couleur (5 cartes d'une même couleur ne constituant pas une quinte floche) ?
5) Combien contiennent un full (3 cartes d'une même hauteur et deux d'une même autre hauteur) ?
6) Combien contiennent une suite (5 cartes consécutives ne constituant pas une quinte floche) ?
7) Combien contiennent un brelan (3 cartes d'une même hauteur et deux autres ne constituant pas un full) ?
8) Combien contiennent une double paire (2 cartes d'une même hauteur, deux autres d'une même hauteur ne constituant pas un carré ou un full) ?
9) Combien contiennent une paire (2 cartes d'une même hauteur et rien de mieux) ?

Exercice n° 2 : (IT)

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On distribue 5 cartes à un joueur.

1) Combien de mains contiennent exactement un roi ?
2) Combien de mains contiennent exactement deux piques ?
3) Combien de mains contiennent exactement deux piques et deux cœurs ?
4) Combien de mains contiennent au moins deux carreaux ?
5) Combien de mains contiennent exactement un roi et deux trèfles ?

Exercice n° 3 : (IT) (le loto)

On joue au loto en cochant dans une grille 6 numéros parmi les numéros $1, 2, \ldots, 49$. On place ensuite 49 boules numérotées de 1 à 49 dans une urne et on en extrait 6. On obtient ainsi les numéros gagnants.

1) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2) Combien de tirages nous fournissent exactement 1 numéro gagnant ?
3) Combien de tirages nous fournissent exactement 2, 3, 4, 5, 6 numéros gagnants ?

Exercice n° 4 : (IT)

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot ÉLÈVE ? Même question en effaçant les accents ?
Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHÉMATIQUES ?

Exercice n° 5 : (IT)

1) (***) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2}\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant k\leqslant (n-1)/2}\binom{n}{2k+1}$, pour $n\geqslant 1$, ou encore démontrer directement qu'un ensemble à n éléments contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

2) (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

3) (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $\displaystyle\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Exercice n° 6 : (***)

Combien y a-t-il de partitions d'un ensemble à pq éléments en p classes ayant chacune q éléments ?

Exercice n° 7 : (***) (Combinaisons avec répétitions)

Montrer que le nombre de solutions en nombres entiers $x_i\geqslant 0$ de l'équation $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$ (k entier naturel donné) est $\binom{k}{n+k-1}$. (Noter $a_{n,k}$ le nombre de solutions et procéder par récurrence.)

Exercice n° 8 : (*)

Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

Exercice n° 9 : (*I)**

Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables). Montrer que pour $n \geqslant 23$, on a $p_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice n° 10 : (***)

Montrer que le premier de l'an tombe plus souvent un dimanche qu'un samedi.

Exercice n° 11 : (I)**

On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice n° 12 : (***)

De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Exercice n° 13 : (****)

1) Soit E un ensemble fini et non vide. Soient n un entier naturel non nul et A_1,..., A_n, n parties de E.
Montrer la « formule du crible » :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ + \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\ + \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{card}(A_1 \cap \ldots \cap A_n).\end{aligned}$$

2) Combien y a-t-il de permutations σ de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma(i) \neq i$? (Ces permutations sont appelées dérangements (permutations sans point fixe)). Indication : noter A_i l'ensemble des permutations qui fixent i et utiliser 1).

On peut alors résoudre un célèbre problème de probabilité, le problème des chapeaux. n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau est environ $\frac{1}{e}$ quand n est grand.

Exercice n° 14 : (**)

Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$?

Exercice n° 15 : (***)

Soit (P) un polygone convexe à n sommets. Combien ce polygone a-t-il de diagonales ? En combien de points distincts des sommets se coupent-elles au maximum ?

Exercice n° 16 : (***)

1) On donne n droites du plan. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourantes. Déterminer le nombre $P(n)$ de régions délimitées par ces droites.

2) On donne n plans de l'espace. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourants en une droite, ni quatre qui soient concourants en un point. Déterminer le nombre $Q(n)$ de régions délimitées par ces plans.

Exercice n° 17 : (***)

Soit P_n^k le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes.
Montrer que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
Dresser un tableau pour $1 \leqslant k, n \leqslant 5$.
Calculer en fonction de P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Exercice n° 18 : (* I)**

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). Combien y-a-t-il de couples $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $X \subset Y$?

Exercice n° 19 : (* I)**

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \operatorname{card}(X \cap Y)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2} \operatorname{card}(X \cup Y)$.

Exercice n° 20 : (***)

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). Combien y-a-t-il de :

1) lois de composition interne sur E ;
2) lois de composition interne commutatives sur E ;
3) lois de composition interne sur E possédant un élément neutre ?

