Planche n° 40. Produits scalaires. Corrigé

Exercice n° 1

Montrons que $\varphi\ :\ (A,B)\mapsto \text{Tr}\left(A^T\times B\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons encore $A^T=\left(a'_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a'_{i,j}=a_{j,i}$.

$$\begin{aligned}\varphi(A,B)=\text{Tr}\left(A^TB\right)&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a'_{j,i}b_{i,j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}\right)\\&=\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}a_{i,j}b_{i,j}.\end{aligned}$$

On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A)=\sqrt{\varphi(A,A)}$, N est la norme euclidienne associée au produit scalaire φ et en particulier, N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note que

$$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ N(A)=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant}a_{i,j}^2}.$$

Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}(N(AB))^2&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\&\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}b_{l,j}^2\right)\ \text{(d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)}\\&=\sum_{i,j,k,l}a_{i,k}^2b_{l,j}^2=\left(\sum_{i,k}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l,j}b_{l,j}^2\right)=N(A)^2N(B)^2,\end{aligned}$$

et donc, $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB)\leqslant N(A)N(B)$.

Exercice n° 2

1) Soit $(x,y,z)\in E^3$.

$$\begin{aligned}f(x+z,y)+f(x-z,y)&=\frac{1}{4}\left(\|x+z+y\|^2+\|x-z+y\|^2-\|x+z-y\|^2-\|x-z-y\|^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left(2\left(\|x+y\|^2+\|z\|^2\right)-2\left(\|x-y\|^2+\|z\|^2\right)\right)\ \text{(puisque N vérifie l'identité du parallélogramme)}\\&=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)=2f(x,y).\end{aligned}$$

2) Soit $(x,y)\in E^2$.

$$2f(x,y)=f(x+x,y)+f(x-x,y)=f(2x,y)+f(0,y)$$

mais $f(0,y)=\frac{1}{4}(||y||^2-||-y||^2)=0$ (définition d'une norme) et donc $f(2x,y)=2f(x,y)$.

3) Soit $(x,y)\in E^2$. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ f(nx,y)=nf(x,y)$.

- L'égalité est vraie pour $n=0$ et $n=1$.
- Soit $n\geqslant 0$. Si l'égalité est vraie pour n et $n+1$ alors d'après 1),

$$f((n+2)x,y)+f(nx,y)=f((n+1)x+x,y)+f((n+1)x-x,y)=2f((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x,y)=2f((n+1)x,y)-f(nx,y)=2(n+1)f(x,y)-nf(x,y)=(n+2)f(x,y).$$

On a montré par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ f(nx,y)=nf(x,y)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x,y) = f\left(n.\dfrac{1}{n}x, y\right) = nf\left(\dfrac{1}{n}x, y\right)$ et donc $f(\dfrac{1}{n}x, y) = \dfrac{1}{n}f(x,y)$.
Puis, si $r = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(rx,y) = \frac{1}{q}f(px,y) = p\frac{1}{q}f(x,y) = rf(x,y)$$

et pour tout rationnel positif r, $f(rx,y) = rf(x,y)$.
Enfin, si $r \leqslant 0$, $f(rx,y) + f(-rx,y) = 2f(0,y) = 0$ (d'après 1)) et donc$=$ $f(-rx,y) = -f(-rx,y) = rf(x,y)$.

4) On pose $x = \dfrac{1}{2}(u+v)$ et $y = \dfrac{1}{2}(u-v)$.

$$f(u,w) + f(v,w) = f(x+y,w) + f(x-y,w) = 2f(x,w) = 2f\left(\frac{1}{2}(u+v), w\right) = f(u+v,w).$$

5) f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable. Donc f est bilinéaire.

6) f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x \in E$, $f(x,x) = \dfrac{1}{4}(\|x+x\|^2 + \|x-x\|^2) = \dfrac{1}{4}||2x||^2 = ||x||^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que f est définie positive et donc un produit scalaire, et que $\| \; \|$ est la norme associée. $\| \; \|$ est donc une norme euclidienne.

Exercice n° 3

On note $(\ |\ )$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$ et $\| \; \|$ la norme associée.

La famille (V_1, V_2) est libre et donc est une base de F. Son orthonormalisée (e_1, e_2) est une base orthonormée de F.
$\|V_1\| = \sqrt{1+4+1+1} = \sqrt{7}$ et

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}V_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1).$$

$(V_2|e_1)) = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(0+6-1-1) = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$ puis $V_2 - (V_2|e_1)e_1 = (0,3,1,-1) - \dfrac{4}{7}(1,2,-1,1) = \dfrac{1}{7}(-4,13,11,-11)$ puis

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11).$$

Une base orthonormée de F est (e_1, e_2) où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$.

Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in F^\perp \Leftrightarrow u \in (\text{Vect}\,(V_1,V_2))^\perp \Leftrightarrow u \in (V_1,V_2)^\perp \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(u|V_1) = 0\\(u|V_2) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+2y-z+t = 0\\3y+z-t = 0\end{array}\right..$$

Exercice n° 4

1) a) Soit $u \in E$. L'application $x \mapsto (u|x)$ est une forme linéaire sur E par linéarité du produit scalaire par rapport à sa deuxième variable.

b) Soit φ une forme linéaire sur E.

Existence. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, (\ |\ ))$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, posons $a_i = \varphi(e_i)$ puis $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.
Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\\ &= (u|x) \text{ (car la base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée.)}\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un vecteur $u \in E$ (indépendant de $x \in E$) tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (u|x)$.

Unicité. Soit $v \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (v|x)$. Par suite, $\forall x \in E$, $(u|x) = (v|x)$ puis, $\forall x \in E$, $((u-v)|x) = 0$. Mais alors $u - v \in E^\perp = \{0\}$ puis $u = v$. Ceci montre l'unicité du vecteur u.

2) a) L'application $(P, Q) \mapsto P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$ est un produit scalaire sur l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. L'application $\varphi\ :\ P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur E. D'après la question 1), il existe un élément A de $\mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = A|P$ ou encore

$$\exists! A \in \mathbb{R}_n[X]/\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 A(t)P(t)\ dt = P(0).$$

b) Soit A un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(t)A(t)\ dt = P(0)$.

Le choix de $P = 1$ montre que $A \neq 0$. Le choix $P = XA$ fournit : $0 = P(0) = \int_0^1 tA^2(t)\ dt$.

Mais alors, $\forall t \in [0, 1]$, $tA^2(t) = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $\forall t \in]0, 1]$, $A(t) = 0$ et donc $A = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). Ceci est une contradiction et donc il n'existe pas de polynôme A tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 A(t)P(t)\ dt = P(0)$.

Exercice n° 5

1) a) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$ (M est une matrice de format (p, n)).
Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j est encore $x_i|x_j$.
Donc, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $C_i^T C_j = x_i|x_j$ ou encore $G = M^T \times M$ (car le coefficient ligne i colonne j, de $M^T M$ est le produit scalaire usuel de la ligne i de M^T par la colonne j de M ou encore le produit scalaire usuel de la colonne i de M par la colonne j de M.

b) Montrons que $\mathrm{Ker}\left(M^T M\right) = \mathrm{Ker}(M)$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$X \in \mathrm{Ker} M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow M^T \times MX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}\left(M^T M\right)$$

et, en notant $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($(X, Y) \mapsto X^T Y$),

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\left(M^T M\right) &\Rightarrow M^T MX = 0 \Rightarrow X^T M^T MX = 0 \Rightarrow (MX)^T MX = 0 \Rightarrow \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \\ &\Rightarrow X \in \mathrm{Ker} M. \end{aligned}$$

On a montré que $\mathrm{Ker}\left(M^T M\right) = \mathrm{Ker}(M)$. Mais alors, d'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}\left(M^T M\right) = n - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(M^T M\right)\right) = n - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(M\right)\right) = \mathrm{rg}(M)$$

$\mathrm{rg}\left(G\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n)$.

2) Si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée, $\mathrm{rg}\left(G\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n) < n$, et donc, puisque $G\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ est une matrice carrée de format n, $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det\left(G\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = 0$.

Si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre, la famille $(x_1, ..., x_n)$ engendre un espace F de dimension n. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de F et M la matrice de la famille $(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathscr{B}$. D'après 1), on a $G\left(x_1, \ldots, x_n\right) = M^T M$ et d'autre part, M est une matrice carrée, inversible car matrice d'une base de F dans une base de F. Par suite,

$$\gamma(x_1, ..., x_n) = \det\left(M^T M\right) = \det\left(M^T\right)\det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

3) On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x, x_1, ..., x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \|x\|^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ \left(x - p_F(x) + p_F(x)\right)|x_1 \\ \left(x - p_F(x) + p_F(x)\right)|x_2 \\ \vdots \\ \left(x - p_F(x) + p_F(x)\right)|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de Pythagore et dans les suivantes, $x - p_F(x) \in F^\perp$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x, x_1, ..., x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x), x_1, ..., x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x), x_1, ..., x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x, x_1, ..., x_n) = ||x - p_F(x)||^2 \gamma(x_1, ..., x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

Exercice n° 6

Un vecteur engendrant D est $\overrightarrow{u}=(2,1,3)$. Pour $\overrightarrow{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}p_D\left(\overrightarrow{v}\right)&=\frac{(x,y,z)|(2,1,3)}{||(2,1,3)||^2}(2,1,3)=\frac{2x+y+3z}{14}(2,1,3)\\&=\left(\frac{4x+2y+6z}{14},\frac{2x+y+3z}{14},\frac{6x+3y+9z}{14}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)=P=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&2&6\\2&1&3\\6&3&9\end{pmatrix}$ puis $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)=2P-I=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3&2&6\\2&-6&3\\6&3&2\end{pmatrix}$.

Plus géralement, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire (a,b,c) dans la base canonique orthonormée est $P=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax+by+cz=0$ dans la base canonique orthonormée est $I-P=\begin{pmatrix}1-a^2&-ab&-ac\\-ab&1-b^2&-bc\\-ac&-bc&1-c^2\end{pmatrix}$.

Exercice n° 7

1ère solution.

$$\begin{aligned}\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx&=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a^2+b^2-\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b+ab=\frac{1}{3}\left(a^2+a(3b-1)\right)+b^2-\frac{2}{5}b+\frac{1}{9}\\&=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2-\frac{1}{12}(3b-1)^2+b^2-\frac{2}{5}b+\frac{1}{9}\\&=\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{10}b+\frac{1}{36}\\&=\frac{1}{3}(a+\frac{1}{2}(3b-1))^2+\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{225}\geqslant\frac{4}{225},\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a+\frac{1}{2}(3b-1)=b+\frac{1}{5}=0$ ou encore $b=-\frac{1}{5}$ et $a=\frac{4}{5}$.

$\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx$ est minimum pour $a=\frac{4}{5}$ et $b=-\frac{1}{5}$ et ce minimum vaut $\frac{4}{225}$.

2ème solution.

$(P,Q)\mapsto\int_0^1P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1(x^4-ax-b)^2dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme X^4 au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX+b$.

On doit calculer $\mathrm{Inf}\left\{\int_0^1(x^4-ax-b)^2\,dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ qui est le carré de la distance de X^4 à $F=\mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX+b$ est la projection orthogonale de X^4 sur F.

Trouvons une base orthonormale de F. L'orthonormalisée (P_0,P_1) de $(1,X)$ convient.

$||1||^2=\int_0^1 1\,dt=1$ et $P_0=1$. Puis $X-(X|P_0)P_0=X-\int_0^1 t\,dt=X-\frac{1}{2}$, et comme

$$\|X-(X|P_0)P_0\|^2=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

on a $P_1=2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2X-1)$.

La projection orthogonale de X^4 sur F est alors $(X^4|P_0)P_0+(X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0)=\int_0^1 t^4\,dt=\frac{1}{5}$ et

$(X^4|P_1)=\sqrt{3}\int_0^1 t^4(2t-1)\,dt=\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{15}$. Donc, la projection orthogonale de X^4 sur F est

$$\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X-1)=\frac{1}{5}(4X-1).$$

Le minimum cherché est alors $\displaystyle\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{5}(4t-1)\right)^2\ dt=\ldots=\frac{4}{225}$ et qu'il est atteint pour $a=\dfrac{4}{5}$ et $b=-\dfrac{1}{5}$.

Exercice n° 8

Soit $\varphi:\begin{array}{ccc}E&\to&\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto&(x|e_1,\ldots,x|e_n)\end{array}$. φ est clairement linéaire et $\mathrm{Ker}\varphi$ est $(e_1,\ldots,e_n)^\perp=E^\perp=\{0\}$.
Comme E et $\mathbb{R}^n$ ont mêmes dimensions finies, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout n-uplet $(a_1,\ldots,a_n)$ de réels, il existe un unique vecteur x tel que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ x|e_i=a_i$.

Exercice n° 9

1ère solution. Montrons par récurrence sur $n=\dim(E)$ que, si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, alors $p\leqslant n+1$.

• Pour $n=1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs x_1 et x_2 verifiant $x_1|x_2<0$, un vecteur x_3 quelconque est soit nul (auquel cas $x_3|x_1=0$), soit de même sens que x_1 (auquel cas $x_1|x_3>0$) soit de même sens que x_2 (auquel cas $x_2|x_3>0$). Donc $p\leqslant 2$.

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille obtusangle d'un espace E de dimension $n+1$. Si $p=1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p\geqslant 2$. x_p n'est pas nul et $H=x_p^\perp$ est un hyperplan de E et donc est de dimension n.
Pour $1\leqslant i\leqslant p-1$, notons $y_i=x_i-\dfrac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2}x_p$ le projeté orthogonal de x_i sur H.
Vérifions que la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle de H. Soit $(i,j)\in[\![1,p-1]\!]$ tel que $i\neq j$.

$$y_i|y_j=x_i|x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}-\frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{||x_p||^2}+\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{||x_p||^4}=x_i|x_j-\frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2}<0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p-1\leqslant 1+\dim H=n+1$ et donc $p\leqslant n+2$.

2ème solution. Montrons que si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_ix_i=0$ $(*)$.

Quite à multiplier les deux membres de $(*)$ par -1, on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i>0$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i>0$ et J l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i\leqslant 0$ (éventuellement J est vide). I et J sont disjoints. $(*)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_ix_i=-\sum_{i\in J}\lambda_ix_i$ (si J est vide, le second membre est nul). On a

$$0\leqslant\left\|\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right\|^2=\left(\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right)|\left(-\sum_{i\in J}\lambda_ix_i\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i(-\lambda_j)x_i|x_j\leqslant 0.$$

Donc, $\displaystyle\left\|\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right\|^2=0$ puis $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_ix_i=0$.

Mais, en faisant le produit scalaire avec x_p, on obtient $\displaystyle\left(\sum_{i\in I}\lambda_ix_i\right)|x_p=\sum_{i\in I}\lambda_i(x_i.x_p)<0$ ce qui est une contradiction.

Puisque la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est libre, son cardinal $p-1$ est inférieur ou égal à la dimension n et donc $p\leqslant n+1$.

Exercice n° 10

L'application $(P,Q)\mapsto\displaystyle\int_0^1P(t)Q(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $E=\mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de E. Pour cela, déterminons (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0,P_1,P_2,P_3)=(1,X,X^2,X^3)$.

- $||P_0||^2=\displaystyle\int_{-1}^1 1^2\ dt=2$ et on prend $Q_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $P_1|Q_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^1 t\ dt=0$ puis $P_1-(P_1|Q_0)Q_0=X$ puis $\|P_1-(P_1|Q_0)Q_0\|^2=\displaystyle\int_{-1}^1t^2\ dt=\frac{2}{3}$ et $Q_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.
- $P_2|Q_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^1t^2\ dt=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1=0$. Donc, $P_2-(P_2|Q_0)Q_0-(P_2|Q_1)Q_1=X^2-\dfrac{1}{3}$,

puis $\|P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \, dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}$ et $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$.

- Enfin, $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$ et $P_3|Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t^4 \, dt = \frac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3 - (P_3|Q_0)Q_0 - (P_3|Q_1)Q_1 - (P_3|Q_2)Q_2 = X^3 - \frac{3}{5}X$, puis $\left\|X^3 - \frac{3}{5}X\right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 \, dt = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}\right) = 2\frac{25-21}{175} = \frac{8}{175}$, et $P_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$.

Une base orthonormée de E est (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) où $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$ et $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3 - 3X)$.

Soit alors P un élément quelconque de $E = \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^{1} P^2(t) \, dt = 1$. Posons $P = aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 + dQ_3$.

Puisque (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une base orthonormée de E, $\int_{-1}^{1} P^2(t) \, dt = ||P||^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Maintenant, pour $x \in [-1, 1]$, en posant $M_i = \text{Max}\{|Q_i(x)|, \ x \in [-1, 1]\}$, on a :

$$\begin{aligned}
|P(x)| &\leqslant |a| \times |Q_0(x)| + |b| \times |Q_1(x)| + |c| \times |Q_2(x)| + |d| \times |Q_3(x)| \leqslant |a|M_0 + |b|M_1 + |c|M_2 + |d|M_3 \\
&\leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}.
\end{aligned}$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en 1 (et -1) et donc

$$\sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x \in [-1, 1]$, $|P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|, \ x \in [-1, 1]\} \leqslant 2\sqrt{2}$.

Etudions les cas d'égalité. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|, \ x \in [-1, 1]\} = 2\sqrt{2}$.
Soit $x_0 \in [-1, 1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|, \ x \in [-1, 1]\} = |P(x_0)|$. Alors :

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2} = |P(x_0)| &\leqslant |a| \times |Q_0(x_0)| + |b| \times |Q_1(x_0)| + |c| \times |Q_2(x_0)| + |d| \times |Q_3(x_0)| \\
&\leqslant |a| \times M_0 + |b| \times M_1 + |c| \times M_2 + |d| \times M_3 \leqslant \sqrt{M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (Cauchy-Schwarz) est une égalité si et seulement si $(|a|, |b|, |c|, |d|)$ est colinéaire à $(1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ ou encore si et seulement si P est de la forme $\lambda\left(\pm Q_0 \pm \sqrt{3}Q_1 \pm \sqrt{5}Q_2 \pm \sqrt{7}Q_3\right)$ où $\lambda^2(1 + 3 + 5 + 7) = 1$ et donc $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0 \in \{-1, 1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1) + bQ_1(1) + cQ_2(1) + dQ_3(1)| = |a|Q_0(1) + |b|Q_1(1) + |c|Q_2(1) + |d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que a, b, c et d aient même signe et P est l'un des deux polynômes

$$\begin{aligned}
\pm\frac{1}{4}\left(Q_0 + \sqrt{3}Q_1 + \sqrt{5}Q_2 + \sqrt{7}Q_3\right) &= \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1 + 3X + \frac{5}{2}(3X^2 - 1) + \frac{7}{2}(5X^3 - 3X)\right) \\
&= \pm\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(35X^3 + 15X^2 - 15X - 3\right)
\end{aligned}$$

Exercice n° 11

L'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
I_n I_{n+2} &= \int_0^1 f^n(t) \, dt \int_0^1 f^{n+2}(t) \, dt = \int_0^1 \left(\left(\sqrt{f(t)}\right)^n\right)^2 dt \int_0^1 \left(\left(\sqrt{f(t)}\right)^{n+2}\right)^2 dt \\
&\geqslant \left(\int_0^1 \left(\sqrt{f(t)}\right)^n \left(\sqrt{f(t)}\right)^{n+2} \, dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f^{n+1}(t) \, dt\right)^2 = I_{n+1}^2
\end{aligned}$$

Comme f est continue et strictement positive sur $[0,1]$, I_n est strictement positif pour tout entier naturel n. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$. La suite $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ est définie et croissante.

Exercice n° 12

1) La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)\ dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [-1,1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour vérifier que la famille $\left(\dfrac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E, nous allons vérifier que

- **a)** $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}(L_0, L_1, ..., L_p) = \text{Vect}(1, X, ..., X^p)$,
- **b)** $\left(\dfrac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est orthonormale,
- **c)** $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $L_p|X^p > 0$.

Pour a), on note que L_p est un polynôme de degré p (et de coefficient dominant $\dfrac{(2p)!}{p!}$). Par suite, $(L_0, L_1, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}\,(L_0, L_1, ..., L_p) = \text{Vect}\,(1, X, ..., X^p)$.

Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Si $p \geqslant 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^p\right)^{(p)} P(t)\ dt = \left[((t^2-1)^p)^{(p-1)} P(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} ((t^2-1)^p)^{(p-1)} P'(t)\ dt \\ &= -\int_{-1}^{1} ((t^2-1)^p)^{(p-1)} P'(t)\ dt. \end{aligned}$$

En effet, 1 et -1 sont racines d'ordre p de $(t^2-1)^p$ et donc d'ordre $p-k$ de $\left((t^2-1)^p\right)^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$ et en particulier, racines de chaque $\left((t^2-1)^p\right)^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

En réitérant, on obtient pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $L_p|P = (-1)^k \displaystyle\int_{-1}^{1} ((t^2-1)^p)^{(p-k)} P^{(k)}(t)\ dt$ et pour $k = p$, on obtient enfin $L_p|P = (-1)^p \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)^p P^{(p)}(t)\ dt$, cette formule restant vraie pour $p = 0$.

Soient p et q deux entiers tels que $0 \leqslant q < p \leqslant n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q = (-1)^p \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)^p L_q^{(p)}(t)\ dt = 0$ car $q = \deg(L_q) < p$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une famille orthogonale de $n+1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que $\left(\dfrac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, $L_p|X^p = (-1)^p \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)^p (t^p)^{(p)}\ dt = p! \int_{-1}^{1} (1-t^2)^p\ dt > 0$. On a montré que la famille $\left(\dfrac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p \in (L_0, ..., L_{p-1})^\perp = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$. Par suite,

$$\begin{aligned}\|L_p\|^2 &= L_p|L_p = L_p|\mathrm{dom}(L_p)X^p \text{ (car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp)\\
&= \frac{(2p)!}{p!}L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!}p!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^p\ dt = 2(2p)!\int_0^1(1-t^2)^p\ dt\\
&= 2(2p)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 u)^p(-\sin u)\ du = 2(2p)!\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}u\ du\\
&= 2(2p)!W_{2p+1} \text{ (Intégrales de Wallis)}\\
&= 2(2p)!\frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} \text{ (à revoir).}\\
&= 2(2p)!\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2}{2p+1}2^{2p}(p!)^2.\end{aligned}$$

Donc, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\|L_p\| = \sqrt{\dfrac{2}{2p+1}}2^p p!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2p+1}{2}}\dfrac{1}{2^p p!}((X^2-1)^p)^{(p)}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).

Exercice n° 13

1) • Supposons que p soit une projection orthogonale. Posons $F = \mathrm{Im}(p)$ de sorte que $p = p_F$. On sait que $\mathrm{Ker}(p) = F^\perp$.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|p_F(x) + (x - p_F(x))\|^2\\
&= \|p_F(x)\|^2 + \|(x - p_F(x))\|^2 \text{ (car } x - p_F(x) \in \mathrm{Ker}(p) = F^\perp \text{ et d'après le théorème de Pythagore)}\\
&\geqslant \|p_F(x)\|^2\end{aligned}$$

et donc $\|x\| \geqslant \|p_F(x)\|$.

• Supposons que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrons que p est une projection orthogonale. Posons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$ (de sorte que p est la projection sur F parallèlement à G) et montrons que $G = F^\perp$. Soient $x \in F$ et $y \in G \setminus \{0\}$. Pour tout réel λ, on a

$$\|x\|^2 = \|p(x+\lambda y)\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2,$$

et donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0$. Le polynôme $\lambda \mapsto 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2$ est un trinôme du second degré (car $\|y\|^2 > 0$) et est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant est réduit est donc négatif ou nul.
On en déduit que $(x|y)^2 \leqslant 0$ puis que $x|y = 0$. On a montré que tout vecteur de G est orthogonal à tout vecteur de F et donc que $G \subset F^\perp$. D'autre part, G et $F^\perp$ sont deux supplémentaires de F. F et G ont donc mêmes dimensions finies. On en déduit que $G = F^\perp$ et donc que p est une projection orthogonale.

2) • Supposons que p soit une projection orthogonale. Puisque p est une projection, on a $p^2 = p$ et donc $P^2 = P$. Vérifions alors que P est une matrice symétrique.
Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ de P qui est la i-ème coordonnée de $p(e_j)$ dans $\mathscr{B}$ est encore $(p(e_i)|e_j)$. Pour montrer que P est symétrique, on doit donc vérifier que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(p(e_i)|e_j) = (e_i|p(e_j))$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}(p(e_i)|e_j) &= (p(e_i)|p(e_j) + e_j - p(e_j)) = (p(e_i)|p(e_j)) + (p(e_i)|e_j - p(e_j))\\
&= (p(e_i)|p(e_j)) \text{ (car } p(e_i) \in \mathrm{Im}(p) \text{ et } e_j - p(e_j) \in \mathrm{Ker}(p) = (\mathrm{Im}(p))^\perp).\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, on a aussi $(e_i|p(e_j)) = (p(e_i)|p(e_j))$ et finalement $(p(e_i)|e_j) = (e_i|p(e_j))$. On a montré que la matrice P est symétrique.

• Supposons que $P^2 = P$ et ${}^tP = P$ et montrons que p est une projection orthogonale. Puisque $P^2 = P$, on a $p^2 = p$ et donc p est une projection.

Vérifions que $\forall (x,y) \in E^2$, $p(x)|y = x|p(y)$. Soient $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux éléments de E.

$$\begin{aligned}
p(x)|y &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p\left(e_i\right)\right) | \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \left(p\left(e_i\right)|e_j\right) \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \left(e_i|p\left(e_j\right)\right) \text{ (d'après plus haut)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) | \left(\sum_{j=1}^{n} y_j p\left(e_j\right)\right) \\
&= x|p(y).
\end{aligned}$$

Montrons alors que tout élément de $\mathrm{Im}(p) = F$ est orthogonal à tout élément de $\mathrm{Ker}(p) = G$. Soient $x \in E$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$.

$$p(x)|y = x|p(y) = x|0 = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(p) \subset (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$ puis $\mathrm{Im}(p) = (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$ comme précédemment car $\mathrm{Im}(p)$ et $(\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$ ont mêmes dimensions finies. On a montré que p est une projection orthogonale.

3)

$$\begin{aligned}
\forall x \in E,\ \|s(x)\| = \|x\| &\Leftrightarrow \forall (y,z) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Is}) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}),\ \|y - z\|^2 = \|y + z\|^2 \\
&\Leftrightarrow \forall (y,z) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Is}) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}),\ \|y\|^2 - 2(y|z) + \|z\|^2 = \|y\|^2 + 2(y|z) + \|z\|^2 \\
&\Leftrightarrow \forall (y,z) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Is}) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}),\ y|z = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) \subset (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}))^{\perp}.
\end{aligned}$$

Enfin, puisque $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires, comme à la question 1),

$$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) \subset (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}))^{\perp} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}))^{\perp} \Leftrightarrow s \text{ symétrie orthogonale.}$$

4)

$$\begin{aligned}
s \text{ symétrie orthogonale} &\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + s) \text{ projection orthogonale} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\left(I_n + S\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(I_n + S\right) \text{ et } {}^t\left(\frac{1}{2}\left(I_n + S\right)\right) = \frac{1}{2}\left(I_n + S\right) \text{ (d'après 2))} \\
&\Leftrightarrow I_n + 2S + S^2 = 2I_n + 2S \text{ et } I_n + {}^tS = I_n + S \\
&\Leftrightarrow S^2 = I_n \text{ et } {}^tS = S.
\end{aligned}$$

