Planche n° 40. Produits scalaires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (*I)**

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(A^T A\right)}$. Montrer que N est une norme vérifiant de plus $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées A et B. N est-elle associée à un produit scalaire ?

Exercice n° 2 : (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $\| \ \|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. On se propose de démontrer que $\| \ \|$ est associée à un produit scalaire.

On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x, y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.

1) Montrer que pour tout (x, y, z) de E^3, on a : $f(x + z, y) + f(x - z, y) = 2f(x, y)$.
2) Montrer que pour tout (x, y) de E^2, on a : $f(2x, y) = 2f(x, y)$.
3) Montrer que pour tout (x, y) de E^2 et tout rationnel r, on a : $f(rx, y) = rf(x, y)$.

On admettra que pour tout réel λ et tout (x, y) de E^2 on a : $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).

4) Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3, $f(u, w) + f(v, w) = f(u + v, w)$.
5) Montrer que f est bilinéaire.
6) Montrer que $\| \ \|$ est une norme euclidienne.

Exercice n° 3 : (IT)**

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$.
On pose $F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^{\perp}$.

Exercice n° 4 : (***)

1) Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien.

a) Soit $u \in E$. Montrer que $x \mapsto (u|x)$ est une forme linéaire sur E.
b) Soit φ une forme linéaire sur E. Montrer qu'il existe un vecteur u de E et un seul tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (u|x)$.

2) a) Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\ dt = P(0)$?

b) Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\ dt = P(0)$?

Exercice n° 5 : (*I)** (Matrices et déterminants de Gram)

Soit $(E, |\ )$ un espace vectoriel euclidien de dimension p sur $\mathbb{R}$ ($p \geqslant 2$).
Pour $(x_1, ..., x_n)$ donné dans E^n, on pose $G(x_1, ..., x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (matrice de Gram) et $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de Gram).

1) a) Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $(E, |\ )$ puis $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que $G(x_1, \ldots, x_n) = M^T M$.

b) Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n)$ (on montrera d'abord que $\mathrm{Ker}\left(M^T M\right) = \mathrm{Ker}(M)$).

2) Montrer que $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.
3) On suppose que $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E (et donc $n \leqslant p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$.

Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$). Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}}$.

Exercice n° 6 : (I)**

Matrice de la projection orthogonale sur la droite D d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.

De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a, b, c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 7 : (*I)**

Existence, unicité et calcul de a et b tels que $\displaystyle\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\,dx$ soit minimum (trouver deux démonstrations, une utilisant des moyens élémentaires et une utilisant la notion de projection orthogonale).

Exercice n° 8 : (*I)**

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base quelconque d'un espace euclidien $(E, |\ )$ (de dimension $n \in \mathbb{N}^*$). Soient a_1,..., a_n n réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x|e_i = a_i$.

Exercice n° 9 : (**I)**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Une famille de p vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ est dite obtusangle si et seulement si pour tout (i, j) tel que $i \neq j$, $x_i|x_j < 0$. Montrer que l'on a nécessairement $p \leqslant n + 1$.

Exercice n° 10 : (****)

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt = 1$. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ |x| \leqslant 1\} = 2$. Cas d'égalité ?

Exercice n° 11 : (**)

Soit f continue strictement positive sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(t)\,dt$.

Montrer que la suite $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Exercice n° 12 : (**I)**

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P|Q = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1) Montrer que $(E, |\ )$ est un espace euclidien.

2) Pour p entier naturel compris entre 0 et n, on pose $L_p = ((X^2 - 1)^p)^{(p)}$. Montrer que $\left(\dfrac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E. Déterminer $\|L_p\|$.

Exercice n° 13 : (*I)**

Soit $(E, |\ )$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée de E.

1) Soit p une projection. Montrer que : p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

2) Soit p un endomorphisme de E. Soit $P = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
Montrer que : p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow P^2 = P$ et ${}^tP = P$
(pour $\Leftarrow$, vérifier d'abord que $\forall (x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$).

3) Soit s une symétrie d'un espace euclidien $(E, |\ )$. Montrer que s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|s(x)\| = \|x\|$.

4) Soit s un endomorphisme de E. Soit $S = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$.
Montrer que : s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow S^2 = I_n$ et ${}^tS = S$.

