Planche n° 39. Familles sommables. Corrigé

Exercice n° 1 :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\dfrac{1}{n^2-p^2} = \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{1}{n-p} - \dfrac{1}{n+p}\right)$. Donc pour $N > p$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n\neq p}} \frac{1}{n^2-p^2} &= \frac{1}{2p}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n\neq p}}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{2p}\left(\sum_{\substack{1-p\leqslant k\leqslant N-p\\ k\neq 0}}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{p+1\leqslant k\leqslant N+p\\ k\neq 2p}}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k} + \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p} - \sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, $\displaystyle\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k} = \frac{1}{N-p+1} + \ldots + \frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Puisque $2p$ est constant quand N varie, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k} = 0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\times\frac{3}{2p} = \frac{3}{4p^2} \text{ puis } \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2} = -\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{p^2-n^2} = -\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right) = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Ainsi, les deux sommes existent et ne sont pas égales ou encore $\displaystyle\sum_n\sum_p \neq \sum_p\sum_n$. Ceci montre que la suite double $\left(\dfrac{1}{n^2-p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ n\neq p}$ n'est pas sommable.

Exercice n° 2 :

1) Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^2q^2}$.

- Pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{p,q} \in \mathbb{R}^+$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $u_{p,q}$, $q \geqslant 1$, converge et

$$\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{p^2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6p^2}.$$

- La série de terme général $U_p = \displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{\pi^2}{6p^2}$, $p \in \mathbb{N}^*$, converge et a pour somme $\dfrac{\pi^4}{36}$.

On sait alors que la suite $(u_{p,q})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et que $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2q^2} = \frac{\pi^4}{36}$.

2) Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $v_{p,q} = \dfrac{1}{p^2+q^2}$. Pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $v_{p,q} \in \mathbb{R}^+$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La série de terme général $\dfrac{1}{p^2+q^2}$, $q \geqslant 1$, converge et

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2}\geqslant\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+2pq+q^2}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^2}=\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$
$$\geqslant\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=p+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{p+1}\text{ (série télescopique).}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{p+1}$, $p\geqslant 1$, est divergente. Il en est de même de la série de terme général $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2+q^2}$, $p\geqslant 1$. On en déduit que la suite $\left(v_{p,q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Exercice n° 3 :

1) a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $|u_n|=\dfrac{1}{n}$. La série de terme général $|u_n|$ diverge et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

b) La suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant. Donc, la série de terme général u_n converge d'après le critère spécial aux séries alternées.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,dt=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)dt$$
$$=\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t}\,dt-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt$$
$$=\ln(2)-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt\leqslant\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$. On en déduit que $(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors, quand n tend vers $+\infty$ on obtient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln(2).}$$

2) Soit $(pq)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers termes de la série considérée et on pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Il est connu que $H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Soit $m\in\mathbb{N}^*$.

$$S_{m(p+q)}=\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right)-\left(\frac{1}{2q+2}+\ldots+\frac{1}{4q}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2(m-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2mp-1}\right)-\left(\frac{1}{2(m-1)q+2}+\ldots+\frac{1}{2mq}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k}=H_{2mp}-\frac{1}{2}(H_{mp}+H_{mq})$$

puis

$$S_{m(p+q)}\underset{m\to+\infty}{=}(\ln(2mp)+\gamma)-\frac{1}{2}(\ln(mp)+\gamma+\ln(mq)+\gamma)+o(1)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)+o(1).$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{m(p+q)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Montrons alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Il existe un unique entier naturel non nul m_n tel que $m_n(p+q)\leqslant n<(m_n+1)(p+q)$ à savoir $m_n=\left\lfloor\dfrac{n}{p+q}\right\rfloor$.

$$\begin{aligned}|S_n-S_{m_n(p+q)}|&\leqslant\frac{1}{2m_np+1}+\ldots+\frac{1}{2(m_n+1)p-1}+\frac{1}{2m_nq+2}+\frac{1}{2(m_n+1)q}\\&\leqslant\frac{p}{2m_np+1}+\frac{q}{2m_nq+2}\leqslant\frac{p}{2m_np}+\frac{q}{2m_nq}=\frac{1}{m_n}.\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon>0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=+\infty$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{1}{m_n}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ et aussi $\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n\geqslant n_0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|S_n-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|&\leqslant|S_n-S_{m_n(p+q)}|+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|\leqslant\frac{1}{m_n}+\left|S_{m_n(p+q)}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left(n\geqslant n_0\Rightarrow\left|S_n-\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)\right)\right|<\varepsilon\right)$ et donc, la série proposée converge et a pour somme $\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Exercice n° 4 :

1) Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit I l'intervalle $[x,0]$ si $x\leqslant 0$ et $[0,x]$ si $x\geqslant 0$.
Soit f la fonction définie sur I par : $\forall t\in I$, $f(t)=e^t$. Soit enfin $n\in\mathbb{N}$.

f est de classe C^{n+1} sur I et pour tout t de I, $f^{(n+1)}(t)=e^t$ puis $\left|f^{(n+1)}(t)\right|=e^t\leqslant\left\{\begin{array}{l}1\text{ si }x\leqslant 0\\ e^x\text{ si }x\geqslant 0\end{array}\right.\leqslant e^{|x|}$.

D'après l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE,

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=e^x$. On a montré que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.}$$

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$.

- $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left|\frac{n^px^p}{n!p!}\right|=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(n|x|)^p}{p!}=\frac{e^{n|x|}}{n!}<+\infty.$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left|\frac{n^px^p}{n!p!}\right|\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{|x|}\right)^n}{n!}=e^{\left(e^{|x|}\right)}<+\infty.$

Donc, la famille $\left(\dfrac{n^px^p}{n!p!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

b) Puisque la famille $\left(\dfrac{n^px^p}{n!p!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable,

$$
\begin{aligned}
e^{(e^x)} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^p x^p}{n!p!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p x^p}{n!p!}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p}{n!}\right)x^p.
\end{aligned}
$$

Donc, si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $a_p = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p}{n!}$, alors pour tout réel x, $e^{(e^x)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$.

Exercice n° 5 : Soit $x \in]-1,1[$.

1) Pour $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $u_{n,p} = x^{kl}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{l=1}^{+\infty}|u_{k,l}| = \sum_{l=1}^{+\infty}\left(|x|^k\right)^l = \frac{|x|^k}{1-|x|^k} < +\infty$.
- Puisque $\dfrac{|x|^k}{1-|x|^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} |x|^k$ et que la série géométrique de terme général $|x|^k$ converge. Il en est de même de la série

de terme général $\dfrac{|x|^k}{1-|x|^k}$.

Mais alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{+\infty}|u_{k,l}|\right) < +\infty$. Ceci montre que la famille $\left(x^{k,l}\right)_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2) On peut donc écrire

$$
\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^p} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{kp}\right) = \sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} u_{k,l}.
$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = \left\{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2 \;/\; kl = n\right\}$. Tout couple $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ est dans un et un seul des A_n à savoir A_{kl}. De plus, aucun des A_n, $n \in \mathbb{N}^*$ n'est vide car A_n contient $(1,n)$. La famille de parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de couples $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $k \times l = n$ est encore le nombre d'entiers naturels non nuls k tels que k divise n. Donc, $\operatorname{card}(A_n) = d(n)$

D'après le théorème de sommation par paquets,

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^p} &= \sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} u_{k,l}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,l)\in A_n} x^{kl}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,l)\in A_n} 1\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{card}(A_n)\,x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n.
\end{aligned}
$$

