Planche n° 38. Séries numériques. Corrigé

Exercice n° 1 :

1) Soient a et b deux réels. Pour tout entier naturel n non nul, deux intégrations par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(at^2+bt\right)\cos(nt)\,dt &= \left[\left(at^2+bt\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2at+b)(-\sin(nt))\,dt\\ &=\frac{1}{n}\left(\left[(2at+b)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2a\cos(nt)\,dt\right)=\frac{1}{n^2}\left[(2at+b)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}\\ &=\frac{1}{n^2}\left((2a\pi+b)(-1)^n-b\right).\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi}\left(at^2+bt\right)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}&\Leftrightarrow\forall n\geqslant 1,\ \frac{1}{n^2}\left((2a\pi+b)(-1)^n-b\right)=\frac{1}{n^2}\\ &\Leftrightarrow\forall n\geqslant 1,\ (2a\pi+b)(-1)^n-b=1\\ &\Leftarrow b=-1\text{ et }a=\frac{1}{2\pi}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \frac{1}{n^2}=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt.}$$

2) Pour $n\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,dt$. Pour $t\in[0,\pi]$, posons $f_n(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$. Pour $t\in[0,\pi]$,

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{t}{2}\right)f_n(t)&=\sum_{k=1}^{n}2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right)\\ &=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)-\sin\left(\left(\frac{1}{2}\right)t\right)\text{ (somme télescopique)}\\ &=\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

Par suite, si $t\in]0,\pi]$ de sorte que $2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\neq 0$, $f_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}$ et d'autre part, $f_n(0)=n$.

3) Pour $t\in]0,\pi]$, $\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)f_n(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)$. Pour $t\in]0,\pi]$, on pose alors $g(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. La fonction g est continue sur $]0,\pi]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0)=-1$. En notant encore g le prolongement obtenu, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt+\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right).$$

Puisque la fonction g est continue sur le segment $[0,\pi]$, le lemme de Lebesgue (voir planche n° 37, exercice n° 5) permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)=0$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{6\pi}-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice n° 2 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,dt = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,dt \text{ (car } \forall t \in [0,1],\ -t \neq 1) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = \ln 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt.
\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$. Mais alors, la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ converge ou encore la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geqslant 1$, converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,dt = \frac{1}{2k+1}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-t)^{k}\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}\,dt \text{ (car } \forall t \in [0,1],\ -t^2 \neq 1) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1}$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt = 0$. Mais alors, la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k+1}\right)_{n\geqslant 1}$ converge ou encore la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n}}{2n+1}$, $n \geqslant 0$, converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 3 : La suite (u_n) est strictement positive.

1) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{3/2} \times \dfrac{\ln n}{n^2} = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ et donc $n^{3/2} \times \dfrac{\ln n}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$ ou encore $\dfrac{\ln n}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge et donc la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^2}$ converge.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n} = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln^2 n}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\ln^2 n} = +\infty$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ diverge.

2) Si $\alpha < 0$, on peut écrire $u_n = \dfrac{n^{-\alpha}}{\ln^\beta n}$ avec $-\alpha > 0$. D'après un théorème de croissance comparées, u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et donc la série de terme général u_n, $n \geqslant 2$, diverge grossièrement.

3) On suppose que $0 \leqslant \alpha < 1$. $n \times \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = \dfrac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta n}$ avec $1 - \alpha > 0$. D'après un théorème de croissances comparées, pour tout réel β, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta n} = +\infty$. Par suite, $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$ et donc la série de terme général u_n, $n \geqslant 2$, diverge.

4) On suppose que $\alpha > 1$. $n^{(\alpha+1)/2} \times \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = \dfrac{1}{n^{(\alpha-1)/2}\ln^\beta n}$ avec $\dfrac{\alpha - 1}{2} > 0$. D'après un théorème de croissances comparées, pour tout réel β, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{(\alpha-1)/2}\ln^\beta n} = 0$. Donc, $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$. Puisque $\dfrac{\alpha+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

5) Dans cette question, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{n\ln^\beta n}$.

a) Si $\beta < 0$, $u_n = \dfrac{\ln^{-\beta} n}{n}$ avec $-\beta > 0$. Dans ce cas, u_n est prépondérant devant $\dfrac{1}{n}$ en $+\infty$. Si $\beta = 0$, $u_n = \dfrac{1}{n}$. Dans tous les cas, si $\beta \leqslant 0$, la série de terme général u_n diverge.

b) • Soit $\beta > 1$. Vérifions que la série de terme général u_n converge. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on sait que la série de terme général u_n, $n \geqslant 2$, converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 2}$ est majorée.

La fonction $t \mapsto t\ln^\beta t$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions strictement positives et strictement croissantes sur $]1, +\infty[$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^\beta t}$ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ en tant qu'inverse de fonction strictement positive et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

On en déduit que pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^\beta k} &= \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^\beta k} \\
&\leqslant \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln^\beta t}\,dt = \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \int_{2}^{n} \frac{1}{t\ln^\beta t}\,dt \\
&= \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \left[-\frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} t}\right]_2^n = \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} 2} - \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} n} \\
&\leqslant \frac{1}{2\ln^\beta 2} + \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} 2} \text{ (car } \beta - 1 > 0).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 2}$ est majorée et donc la série de terme général u_n converge.

• Vérifions que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$ diverge. Par décroissance de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t\ln t}$ sur $]1,+\infty[$, pour $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}&\geqslant\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{t\ln t}\,dt=\int_{2}^{n+1}\frac{1}{t\ln t}\,dt\\&=[\ln|\ln t|]_2^{n+1}=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln 2).\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln 2))=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}=+\infty$ ou encore que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n\geqslant 2$, diverge.

Enfin, si $\beta<1$, $\dfrac{1}{n\ln^{\beta}n}$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{n\ln n}$ en $+\infty$ car $\dfrac{1/n\ln^{\beta}n}{1/n\ln n}=\ln^{1-\beta}n$ et donc $\dfrac{1/n\ln^{\beta}n}{1/n\ln n}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ car $1-\beta>0$. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^{\beta}n}$, $n\geqslant 2$, diverge.

En résumé, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln^{\beta}n}$, $n\geqslant 2$, converge si et seulement si $\beta>1$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$, $n\geqslant 2$, converge si et seulement si $\alpha>1$ ou ($\alpha=1$ et $\beta>1$).

Exercice n° 4 :

1) Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, u_n existe. De plus

$$\begin{aligned}u_n&=\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n\geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha>1$), la série de terme général u_n converge.

On peut aussi écrire : $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}-1=\dfrac{2}{n^2+n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{n^2}>0$.

2) Pour $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n\geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n\geqslant 2$, diverge et est à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

3) Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n\geqslant 1$, u_n existe et $u_n>0$.

$$\begin{aligned}\ln(u_n)&=\ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)=\ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)\left(-\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\ln 2\ln(n)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}-\ln 2\ln(n)+o(1).\end{aligned}$$

Donc $u_n=e^{\ln(u_n)}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-\ln 2\ln n}=\dfrac{1}{n^{\ln 2}}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\ln 2}}$, $n\geqslant 1$, diverge (série de Riemann d'exposant $\alpha=\ln 2\leqslant 1$) et est à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

4) Pour $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch}n)}$. u_n existe pour $n\geqslant 2$. $\ln(\operatorname{ch}n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\dfrac{e^n}{2}\right)=n-\ln 2\underset{n\to+\infty}{\sim}n$ puis $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n\ln(n)}>0$.

Vérifions alors que la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n\geqslant 2$, diverge. La fonction $x\to x\ln x$ est continue, croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Par suite, la fonction $x\to\dfrac{1}{x\ln x}$ est continue et décroissante sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Par suite, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

On en déduit que la série de terme général u_n diverge.

5) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \operatorname{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$. u_n existe pour $n \geqslant 1$ car pour $n \geqslant 1$, $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} \in [-1,1]$. De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(u_n) = \sin\left(\operatorname{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{1-1+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{n} > 0 \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.

6) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. Pour $n \geqslant 1$

$$n^2 u_n = n^2 \times \frac{n^3}{n!} = \frac{n^5}{n!}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, n^2u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

7) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. u_n est défini pour $n \geqslant 1$ car pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Ensuite

$$\begin{aligned} \ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Puis $n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La série de terme général $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$ est divergente et donc la série de terme général u_n diverge.

8)

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)\right) = \ln\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n\pi} < 0. \end{aligned}$$

Donc, la série de terme général u_n diverge.

9) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$.

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif. De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0}\, dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

La série de terme général $\dfrac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n converge.

10) $-\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right) = -\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis

$$-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln(n) + o(1).$$

Par suite,

$$0 < u_n = e^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln n} = \frac{1}{n}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

11) $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e - e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} > 0.$$

La série de terme général $\dfrac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

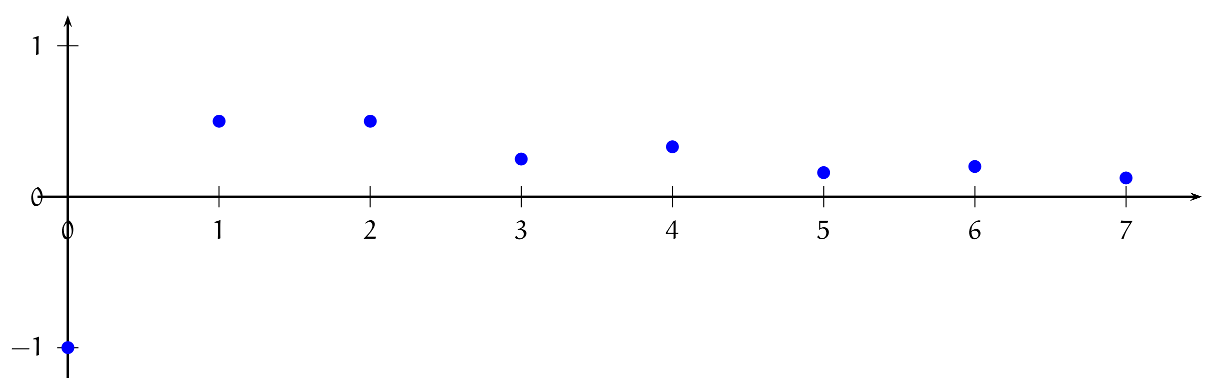
Exercice n° 5

1) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + (n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

La suite $\left((-1)^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général u_n converge donc en vertu du critère spécial aux séries alternées.

2) Attention, la suite $\left(\dfrac{1}{n+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroisante à partir d'un certain rang. Voici sa représentation graphique :



Ensuite,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

3) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont convergentes et la série de terme général $-\dfrac{1}{2n}$ est divergente. Si la série de terme général u_n convergeait alors la série de terme général $-\dfrac{1}{2n} = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergerait ce qui n'est pas. Donc la série de terme général u_n diverge.

Remarque. La série de terme général u_n diverge bien que u_n soit équivalent au terme général d'une série convergente.

4) Pour $x \in]0,+\infty[$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > e$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x} < 0$.
Donc, la fonction f est décroissante sur $[e,+\infty[$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ est une suite décroissante. Mais alors la série de terme général $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

5) • Si $\deg P \geqslant \deg Q$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n est grossièrement divergente.
• Si $\deg P \leqslant \deg Q - 2$, $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général u_n est absolument convergente.
• Si $\deg P = \deg Q - 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\dfrac{\mathrm{dom}P}{n\,\mathrm{dom}Q} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. u_n est alors somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général u_n converge.
En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $\deg P < \deg Q$.

6) $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ puis pour $n \geqslant 2$, $n!e = 1 + n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$.
Pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\dfrac{n!}{k!}$ est un entier divisible par $n(n-1)$ et est donc un entier pair que l'on note $2K_n$. Pour $n \geqslant 2$, on obtient

$$\sin(n!\pi e) = \sin\left(2K_n\pi + (n+1)\pi + \pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}\right).$$

Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!}.$$

Maintenant, pour $k \geqslant n+3$, $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)\dots(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{k-n}}$ et donc

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \leqslant \sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=n+3}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement , $\sin(n!\pi e) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
$\sin(n!\pi e)$ est somme de deux termes généraux de séries convergentes et la série de terme général $\sin(n!\pi e)$ converge.
Si $p \geqslant 2$, $|\sin^p(n!\pi e)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^p}{n^p}$ et la série de terme général $\sin^p(n!\pi e)$ converge absolument.

Exercice n° 6

1) Si P n'est pas un polynôme unitaire de degré 3, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Soit P un polynôme unitaire de degré 3. Posons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned}
u_n &= n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/4} - \left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

• Si $a \neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
• Si $a = 0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3} \neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{n}$. u_n est donc de signe constant pour n grand et est équivalent au terme général d'une série divergente. Donc la série de terme général u_n diverge.
• Si $a = 0$ et $\frac{1}{2}-\frac{b}{3} = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas, la série de terme général u_n converge (absolument).

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$ et $b = \frac{3}{2}$ ou encore la série de terme général u_n converge si et seulement si P est de la forme $X^3 + \frac{3}{2}X + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2) Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha}S(n)$. Pour $n \geqslant 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n} = \frac{1}{2}S(n)$$

et donc $\forall n \geqslant 2$, $S(n) \leqslant \frac{S(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}\frac{S(2)}{2^{n-2}}.$$

On en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc que, pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

3) $\forall u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Par suite, $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et par suite $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$. La série de terme général u_n diverge.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \tan(u_n)\\
&= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{2a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Par suite, la série de terme général u_n converge si et seulement si $a = 0$.

5) La fonction $x \mapsto x^{3/2}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc pour $k \geqslant 1$, $\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant k^{3/2} \leqslant \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx = \int_1^{n+1} x^{3/2}\,dx$$

ce qui fournit

$$\frac{2}{5}n^{5/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \frac{2}{5}((n+1)^{5/2}-1) \text{ et donc } \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{5}{2}}} > 0$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{7}{2}$.

Exercice n° 7

1) D'après un théorème de croissances comparées, $\dfrac{n+1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par suite, la série de terme général $\dfrac{n+1}{3^n}$ converge.

1er calcul. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\\ &= (S-1) - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que $S = \dfrac{9}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}.}$$

2ème calcul. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k.$$

Par suite, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = f_n'(x) = \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}.$$

Pour $x=\dfrac{1}{3}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{3^k} = \frac{\frac{n-1}{3^n}-\frac{n}{3^{n-1}}+1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$ et quand n tend vers l'infini, on obtient de nouveau $S=\dfrac{9}{4}$.

2) Pour $k\geqslant 3$, $\dfrac{2k-1}{k^3-4k} = \dfrac{3}{8(k-2)} + \dfrac{1}{4k} - \dfrac{5}{8(k+2)}$. Puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{4}\left(-1-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \frac{5}{8}\left(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{8} + \frac{125}{96} + o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1).\end{aligned}$$

La série proposée est donc convergente de somme $\dfrac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$. Pour $n \geqslant 3$

$$u_n = \frac{(n-1)(n-2)+3n-3+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} + 3\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{1}{(n-3)!}$, $\dfrac{1}{(n-2)!}$ et $\dfrac{1}{(n-1)!}$ converge et donc la série de terme général u_n converge. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} &= 1+4+\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = 5+\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\\ &= 5+\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 5+e+3(e-1)+e-2 = 5e.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = 5e.}$$

4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+1-2+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$

Donc, la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 2$, converge.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{2}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées et la série de terme général $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge absolument et donc converge.

On en déduit que la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geqslant 2$, converge.

Remarque. Il ne fallait surtout pas écrire que $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1)^n}{n}$ (ce qui est vrai), car $\dfrac{-1)^n}{n}$ n'étant pas de signe constant pour n grand, on ne peut rien en déduire quand à la convergence ou la divergence de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_{2p+1} &= \sum_{k=2}^{2p+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}(\ln(2k+1) - \ln(2k) + \ln(2k) - \ln(2k+1)) = 0.\end{aligned}$$

D'autre part, $S_{2p} = S_{2p+1} - \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2p+1}\right)$. Mais alors les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont mêmes limites, à savoir 0. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ou encore la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geqslant 2$, converge et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.}$$

6) Si $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors, pour tout entier naturel n, $\dfrac{a}{2^n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right) > 0$.
Ensuite, $\ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 + O\left(\dfrac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$ et la série converge. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) \text{ (produit télescopique)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\times\frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right) \text{ (car } \frac{\sin(2a)}{2a} \neq 1\text{).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).}$$

7) Vérifions que pour tout réel x on a $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left(\left(e^x + e^{-x}\right)^2 + \left(e^x - e^{-x}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) = \operatorname{ch}(2x)$$

et

$$2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = \operatorname{sh}(2x)$$

puis, en multipliant numérateur et dénominateur par le réel non nul $\operatorname{ch}^2 x$,

$$\frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x} = \frac{2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \operatorname{th}(2x).$$

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} = \dfrac{1+\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x}$ puis $\operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$. Mais alors, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right) \\
&= \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{2^n\operatorname{th}\frac{a}{2^n}} \text{ (somme télescopique)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a},
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a}.}$$

Exercice n° 8 :

Il faut vérifier que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
0 < (2n)u_{2n} &= 2(\underbrace{u_{2n} + \ldots + u_{2n}}_{n}) \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \text{ (car la suite } u \text{ est décroissante)}\\
&= 2(S_{2n} - S_n).
\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)u_{2n} = 0$.
Ensuite, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc les suites des termes de rangs pairs et impairs extraites de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite à savoir 0. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ ou encore que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Contre exemple avec u non monotone. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré parfait non nul} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

La suite u est positive et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^2} < +\infty$. Pourtant, $p^2 u_{p^2} = 1 \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ et donc la suite (nu_n) admet une suite extraite convergeant vers 1. La suite (nu_n) ne converge donc pas vers 0.

Exercice n° 9 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!}\\
&= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + \sum_{k=n+6}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k}.
\end{aligned}$$

On a $0 < \sum_{k=n+6}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k} \leqslant \sum_{k=n+6}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} = \dfrac{1}{(n+2)^5} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} = \dfrac{1}{(n+2)^4(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^5}$.

On en déduit que $\sum_{k=n+6}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+3)\ldots k} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\\
&\quad + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^3}\right) + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{19}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(1 - \frac{9}{n}\right) + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{(n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Exercice n° 10 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$. D'après la formule du binôme de Newton, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ où A_n et B_n sont des entiers naturels. Un calcul conjugué fournit aussi $\left(2-\sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}$. Par suite, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2A_n$ est un entier pair. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sin\left(2A_n\pi - \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right).$$

Mais $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ et donc $\left(2-\sqrt{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série de terme général u_n converge.

Exercice n° 11 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\sqrt{u_n} - \dfrac{1}{n}\right)^2 \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant \dfrac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série terme général $\dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge, la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice n° 12 :

Pour $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{u_n+1-1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} = \dfrac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})} - \dfrac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$ et d'autre part $v_1 = 1 - \dfrac{1}{1+u_1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_1)\dots(1+u_n)} \text{ (somme télescopique).}$$

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $0 < u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1+u_n)$. Donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge ou encore la suite $\left(\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ. Mais alors la suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel strictement positif $P = e^\ell$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1 - \dfrac{1}{P}$.

Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même que la suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$. Dans ce cas, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Exercice n° 13 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} 2n^3 - 3n^2 + 1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15n^2 - 22n - 11 = 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53n + 79 \\ &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53(n+3) - 80 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!}\right) = 2e - 15(e-1) + 53(e-2) - 80\left(e - \frac{5}{2}\right) \\ &= -40e + 109. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -40e + 109.}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{a+n+1} u_n$. Par suite $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n + (1-a)u_n$ puis

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left((k+a+1)u_{k+1} - (k+a)u_k\right) = (n+a+1)u_{n+1} - (a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1} - 1.$$

Si $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $a > 1$, la suite u est strictement positive et la suite des sommes partielles (S_n) est majorée par $\dfrac{1}{a-1}$. Donc la série de terme général u_n converge. Il en est de même de la suite $((a+n+1)u_{n+1})$. Soit $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $\ell \neq 0$, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n+a+1}$ contredisant la convergence de la série de terme général u_n. Donc $\ell = 0$ et

$$\boxed{\forall a > 1, \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.}$$

Si $0 < a < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \dfrac{1 \times 2 \times \ldots \times n}{2 \times 3 \ldots \times (n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$. Dans ce cas, la série diverge.

Exercice n° 14 :

Pour tout entier naturel non nul n, $0 < \dfrac{1}{2^p n^{p-1}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ et la série de terme général u_n converge si et seulement si $p > 2$.

Exercice n° 15 :

La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $n \geqslant 1$, est absolument convergente et donc convergente.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

Exercice n° 16 :

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$, $k \geqslant 1$, converge, la suite (R_n) est définie et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{(k-1)k}.$$

Soient n un entier naturel non nul puis N un entier supérieur ou égal à $n+1$. En sommant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right),$$

ou encore $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{N+1}\leqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{N}$. Quand N tend vers $+\infty$, n étant fixé, on obtient

$$\frac{1}{n+1}\leqslant R_n\leqslant\frac{1}{n}.$$

Le théorème des gendarmes montre alors que nR_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ ou encore $R_n\underset{n\rightarrow+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$ ou enfin

$$\boxed{R_n\underset{n\rightarrow+\infty}{=}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

3) Soient n un entier naturel non nul puis N un entier naturel supérieur ou égal à $n+1$.

$$\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\text{ (somme télescopique).}$$

Quand N tend vers $+\infty$, n étant fixé, on obtient $\dfrac{1}{n}=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right)$. Par suite, pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned}R_n-\frac{1}{n}&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k(k-1)}\right)\\&=-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)}.\end{aligned}$$

Pour tout $k\geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)}\leqslant\frac{1}{k^2(k-1)}\leqslant\frac{1}{(k-2)(k-1)k}$$

et donc

$$\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}\leqslant\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2(k-1)}\leqslant\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{(k-2)(k-1)k}$$

Ensuite, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{N(N+1)}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{(k-2)(k-1)k}=$ $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-2)(k-1)}-\frac{1}{(k-1)k}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{(N-1)N}\right)$ et donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{N(N+1)}\right)\leqslant\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2(k-1)}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{(N-1)N}\right).$$

Quand N tend vers $+\infty$, n étant fixé, on obtient $\dfrac{1}{2n(n+1)}\leqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2(k-1)}\leqslant\dfrac{1}{2(n-1)n}$ puis

$$-\frac{1}{2(n-1)n}\leqslant R_n-\frac{1}{n}\leqslant-\frac{1}{2n(n+1)}.$$

Le théorème des gendarmes montre que $-2n^2\left(R_n-\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\rightarrow+\infty}{=}1+o(1)$ ou encore

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\underset{n\rightarrow+\infty}{=}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Exercice n° 17 :

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}\,dt$$
$$= \int_0^1 \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\,dt.$$

Par suite, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Or $\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{2N+2}\,dt = \frac{1}{2N+3}$. Comme $\frac{1}{2N+3}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même de $(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt$. On en déduit que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \times \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{t}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$

Exercice n° 18 :

1) On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers. Notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{p_n} = 0$. Par suite, $0 < \frac{1}{p_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ et les séries de termes généraux $\frac{1}{p_n}$ et $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ sont de même nature.

Il reste donc à étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$.

2) Montrons que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geqslant \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right)$.

Soit $n \geqslant 1$. Alors $\frac{1}{p_n} < 1$ et la série de terme général $\frac{1}{p_n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, est une série géométrique convergente de somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}.$$

Soit alors N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p_1 < p_2 ... < p_n$ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N.

Tout entier entre 1 et N s'écrit de manière unique $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = E\left(\frac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$ et deux entiers distincts ont des décompositions distinctes. Donc

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right)\ \left(\text{car } \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}>1\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^i}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k}\frac{1}{p_k^i}\right)\\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k}\frac{1}{p_k^i}\right)\right) = \ln\left(\sum_{0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1,\ldots,\ldots 0\leqslant\beta_n\leqslant\alpha_n}\frac{1}{p_1^{\beta_1}\ldots,\ p_n^{\beta_n}}\right)\\
&\geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right).
\end{aligned}
$$

Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel non nul N. Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty}\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\right)=+\infty$, quand N tend vers $+\infty$, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right)\geqslant+\infty$ et donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right)=+\infty$.

La série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge et il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$.

(Ceci montre qu'il y a beaucoup de nombres premiers et en tout cas beaucoup plus de nombres premiers que de carrés parfaits par exemple).

