# Chapitre 37. Fonctions numériques de deux variables

## Plan du chapitre

Avec ce chapitre, nous allons commencer à nous familiariser avec les fonctions à plusieurs variables

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n)).$$

C'est une notion délicate et le programme prévoir d'étudier d'abord en math sup les fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou encore les fonctions numériques réelles de deux variables réelles. C'est le cas $n = 2$ et $p = 1$. Dit autrement, passer de une à plusieurs variables commence par passer de une à deux variables.

# 1 Un peu de topologie

Les notions d'intervalles, d'intervalles ouverts, de segments, ont une grande importance en analyse pour les fonctions d'une seule variable réelle. Ce qui suit est un début de généralisation de ces notions.

Ensuite, dans $\mathbb{R}$, la distance entre deux réels couramment utilisée est

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x, y) = |y - x|.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, en math sup, nous utiliserons la distance euclidienne canonique qui vient de la norme euclidienne canonique.

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$
et
$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall v = (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ d(u, v) = \|u - v\|_2 = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

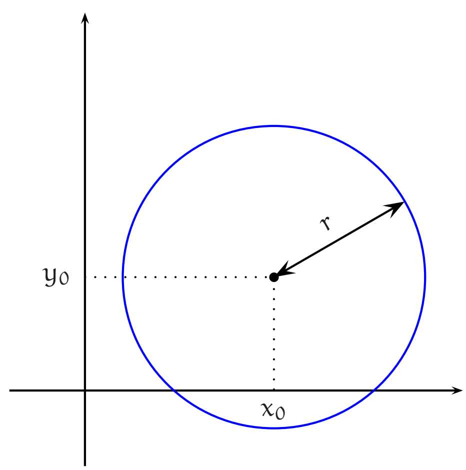
Dans ce chapitre, $\|\ \|_2$ sera notée plus simplement $\|\ \|$.

## 1.1 Boules de $\mathbb{R}^2$

Définition 1. Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $r > 0$. La **boule ouverte** de centre $a$ et de rayon $r$ est $B_o(a, r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\right\}$.

Soit $r \geqslant 0$. La **boule fermée** de centre $a$ et de rayon $r$ est $B_f(a, r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant r\right\}$.




La boule ouverte te (resp. fermée) de centre $(0, 0)$ et de rayon $1$ est appelée boule unité ouverte (resp. fermée).

La boule ouverte de centre $(x_0, y_0)$ généralise dans $\mathbb{R}^2$ la notion d'intervalle ouvert de centre $x_0$ et de rayon $r$ dans $\mathbb{R}$ :

$$]x_0 - r, x_0 + r[ = \{x \in \mathbb{R} /\ |x - x_0| < r\}.$$

La boule fermée de centre $(x_0, y_0)$ généralise dans $\mathbb{R}^2$ la notion d'intervalle fermé de centre $x_0$ et de rayon $r$ dans $\mathbb{R}$ :

$$[x_0 - r, x_0 + r] = \{x \in \mathbb{R} /\ |x - x_0| \leqslant r\}.$$

## 1.2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

DÉFINITION 2. Soit $O$ une partie non vide de $\mathbb{R}^2$.

$O$ est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si pour tout $a$ de $O$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset O$.

**Convention.** $\varnothing$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

⇨ **Commentaire** . *On dira en math spé qu'un ouvert est* ***voisinage de chacun de ses points****. L'idée est qu'une boule ouverte de centre* $a = (x_0, y_0)$ *est censée contenir tous les points « voisins de* $a$ *». En analyse réelle à une variable, on a par exemple le théorème : si* $f$ *est une fonction définie et dérivable sur un intervalle* ***ouvert*** $I$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, et si* $f$ *admet un extremum local en* $x_0$*, alors* $f'(x_0) = 0$*. Dans la démonstration de ce théorème, il est essentiel de pouvoir disposer des réels* $x$ *de* $I$ *au voisinage de* $x_0$*, à gauche et à droite de* $x_0$*, ce qui est dû au fait que* $I$ *est ouvert. De même, dans le paragraphe sur les extrema des fonctions numériques à deux variables par exemple, il sera essentiel dans certains théorèmes que* $f$ *soit définie sur un ouvert.*

**Théorème 1.**

Une réunion quelconque non vide d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

DÉMONSTRATION .

• Soient $I$ un ensemble non vide d'indices puis $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ indexée par $I$. Soit enfin $O = \bigcup_{i \in I} O_i$.

Si tous les $O_i$, $i \in I$, sont vides, alors $O = \varnothing$ et donc $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Sinon, il existe $i_0 \in I$ tel que $O_{i_0} \neq \varnothing$. On a alors $\varnothing \underset{\neq}{\subset} O_{i_0} \subset O$.

Soit $a \in O$. Il existe $i \in I$ tel que $a \in O_i$. Puisque $O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset O_i$. Mais alors, $B_o(a, r) \subset O$.

On a montré que pour tout $a$ de $O$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset O$ et donc $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(O_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de $n$ ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit enfin $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$.

Si $O = \varnothing$, $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Supposons maintenant $O \neq \varnothing$. Soit $a \in O$. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a \in O_i$.
Puisque chaque $O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B_o(a, r_i) \subset O_i$. Soit $r = \text{Min}\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_o(a, r) \subset B_o(a, r_i) \subset O_i$ et donc $B_o(a, r) \subset O$.

De nouveau, on a montré que pour tout $a$ de $O$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset O$ et donc $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

❑

⇨ **Commentaire** . *Le théorème 1 montre qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Mais une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Par exemple, pour* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $B_n = B_o\left((0,0), \dfrac{1}{n+1}\right)$*. L'exercice n° 2, énoncé et résolu plus loin, montre que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $B_n$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*. Mais* $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{(0,0)\}$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *car ne contient aucune boule ouverte. On note que* $B$ *est la boule fermée de centre* $(0,0)$ *et de rayon* $0$*.*

**Exercice 1.**

**1)** Montrer que $P_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > 0\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

**2)** Montrer que $P_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \geqslant 0\right\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

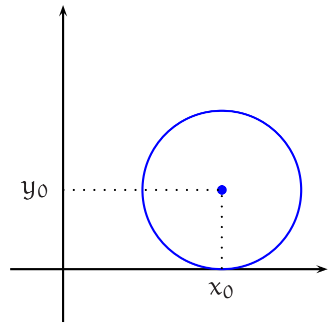
**Solution 1.**

**1)** Soit $a = (x_0, y_0) \in P_1$. Donc $y_0 > 0$. Soient $r = y_0$ puis $B = B_o(a, r)$. Vérifions que $B \subset P_1$. Soit $(x, y) \in B$. Alors,

$$|y - y_0| \leqslant \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r = y_0,$$

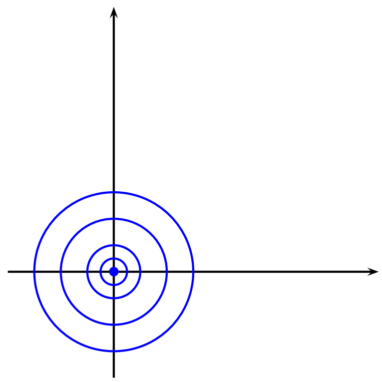
puis $y_0 - y = |y_0| - |y| \leqslant ||y_0| - |y|| \leqslant |y - y_0| < y_0$ et donc $y > 0$. Mais alors $(x, y) \in P_1$. Ceci montre que $B \subset P_1$.

On a montré que pour tout $a$ de $P_1$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset P_1$ et donc $P_1$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.




**2)** Soit $a = (0, 0)$. $a$ est un point de $P_2$. Soit $r > 0$. Le point $\left(0, -\dfrac{r}{2}\right)$ est un point de $B_o(a, r)$ qui n'est pas dans $P_2$ et donc $B_o(a, r) \not\subset P_2$.

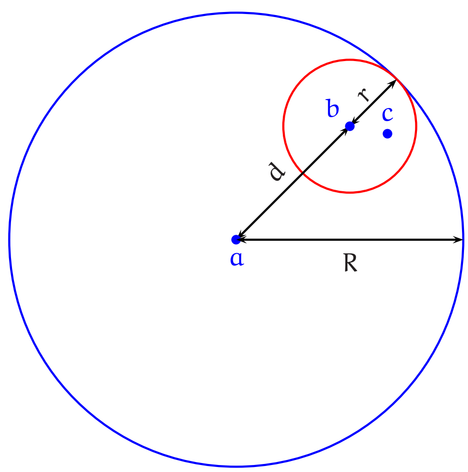
On a montré qu'il existe un point $a$ de $P_2$ tel que, pour tout $r > 0$, $B_o(a, r) \not\subset P_2$ et donc $P_2$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.



---

**Exercice 2.** Montrer qu'une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

**Solution 2.** Soient $R > 0$ et $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ puis $B = B_o(a, R)$. Montrons que $B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $b$ un point de $B$ puis $\delta = \|b - a\|$ puis $r = R - \delta$. Puisque $\|b - a\| < R$, on a $r > 0$. Montrons alors que $B_o(b, r) \subset B$.
Soit $c$ un point de $B_o(b, r)$. $\|c - a\| = \|(c - b) + (b - a)\| \leqslant \|c - b\| + \|b - a\| = \delta + \|c - b\| < \delta + r = R$ et donc $c \in B$.
Ceci montre que $B_o(b, r) \subset B$.




On a montré que pour tout point $b$ de $B$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(b, r) \subset B$ et donc $B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

---

# 2 Généralités sur les fonctions numériques de deux variables

## 2.1 Applications partielles

Pour commencer à appréhender une fonction de deux variables où « les deux variables varient », une première idée consiste à fixer l'une des deux variables. C'est la notion d'application partielle :

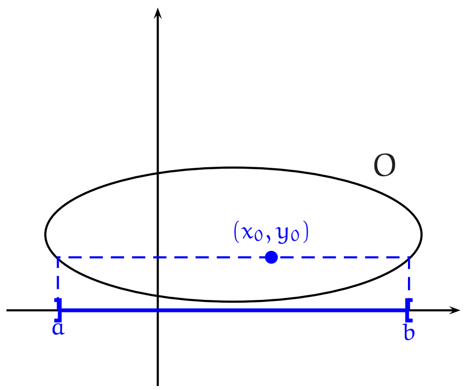
DÉFINITION 3. Soit $f$ une application définie sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in O$.

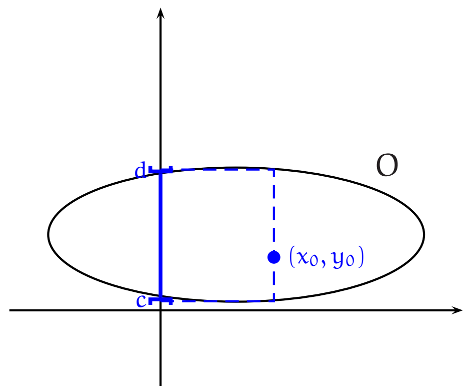
La première application partielle de $f$ en $(x_0, y_0)$ est l'application $x \mapsto f(x, y_0)$. La deuxième application partielle de $f$ en $(x_0, y_0)$ est l'application $y \mapsto f(x_0, y)$.

Dans chacun des deux cas, une des variables est fixée et l'autre varie.

Par exemple, si $f$ est la fonction $(x, y) \mapsto xe^{x^2+y^2}$, la première application partielle en $(0, 0)$ est $x \mapsto xe^{x^2}$ et la deuxième application partielle en $(0, 0)$ est $y \mapsto 0$. Plus généralement, la première application partielle en $(x_0, y_0)$ est $x \mapsto xe^{x^2+y_0^2}$ et la deuxième application partielle en $(x_0, y_0)$ est $y \mapsto x_0e^{x_0^2+y^2}$.

Un problème se pose quant au domaine de définition de chaque application partielle. Il se lit en projetant sur les axes de coordonnées. Dans le graphique ci-dessous, la première application partielle en $(x_0, y_0)$ est définie sur $]a, b[$ et la deuxième est définie sur $]c, d[$ :



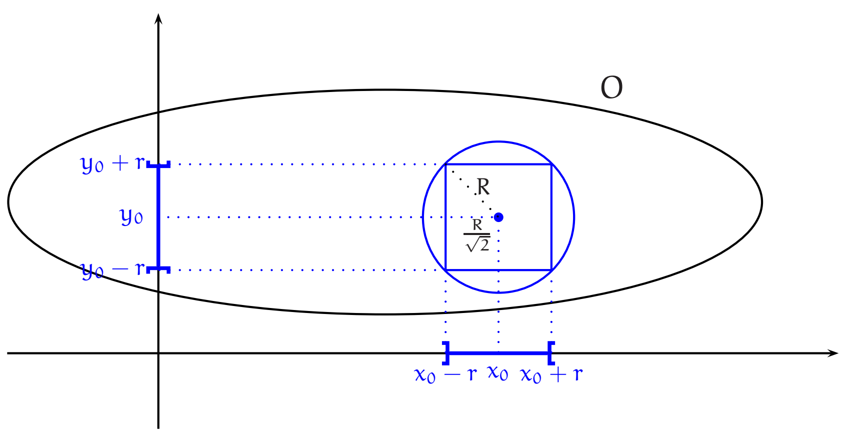




Nous établissons maintenant un théorème géométrique qui sera utile dans certaines démonstrations ultérieures.

**Théorème 2.** Soit $O$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $O$.

Il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[ \times ]y_0 - r, y_0 + r[ \subset O$.

**DÉMONSTRATION .** Soit $(x_0, y_0) \in O$. Puisque $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $R > 0$ tel que $B_o((x_0, y_0), R) \subset O$. Le carré horizontal de centre $(x_0, y_0)$ et de demi-côté $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, bord non compris, est contenu dans $B_o((x_0, y_0), R)$ et donc dans $O$ :



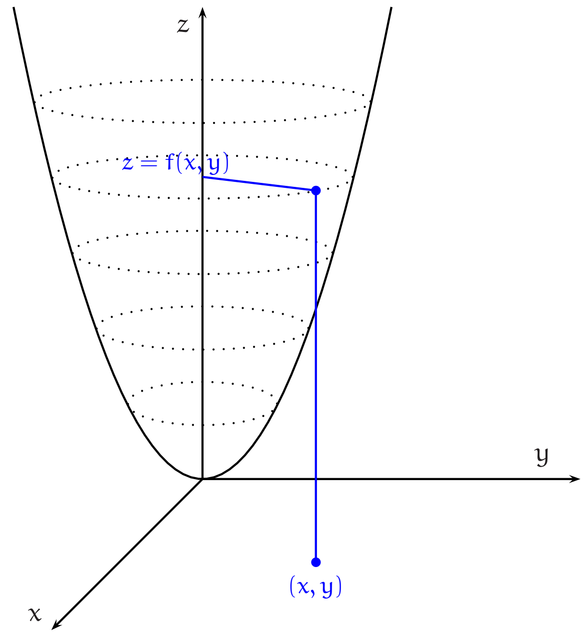

ou encore $]x_0 - r, x_0 + r[ \times ]y_0 - r, y_0 + r[$ est contenu dans $O$.

❏

## 2.2 Représentation graphique des fonctions numériques de deux variables

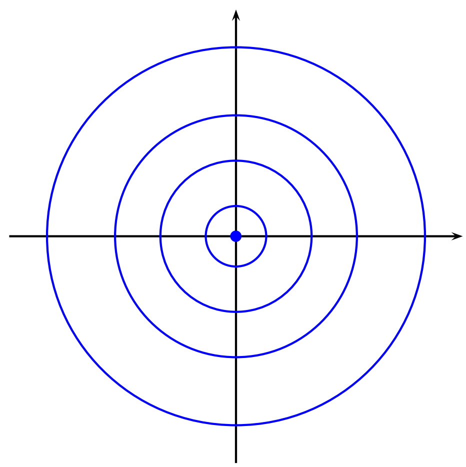
Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert $O$ non vide de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour se représenter les valeurs d'une fonction de deux variables, on munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Le graphe de $f$ est alors l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ où le couple $(x, y)$ décrit $O$. Dit autrement, le graphe de $f$ est la surface d'équation $z = f(x, y)$. Pour chaque $(x, y) \in O \subset \mathbb{R}^2$, on place en hauteur le nombre $z = f(x, y)$.

Par exemple, voici la représentation graphique de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$. On obtient un *paraboloïde de révolution*.




Les **lignes de niveaux** de la surface $(S)$ sont les sections de la surface $(S)$ avec les plans d'équations respectives $z = k$, $k \in \mathbb{R}$. Dans l'exemple, les lignes de niveaux de $(S)$ sont soit vides (quand $k < 0$), soit réduite à un point (quand $k = 0$), soit un cercle centré sur l'axe des $z$ (quand $k > 0$).

Les **lignes de niveaux** de la fonction $f$ sont les projections orthogonales des lignes précédentes sur le plan $(xOy)$. Ce sont les courbes d'équations respectives $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$, ou encore $x^2 + y^2 = k$, dans le repère orthonormé $\mathcal{R}' = \left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan $(x\Omega y)$. On obtient la famille des cercles centrés en $\Omega$.



# 3 Continuité

## 3.1 Définition de la continuité d'une fonction de deux variables

DÉFINITION 4. Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in O$. $f$ est continue en $a$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ \forall (x, y) \in O,\ (\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon).$$

$f$ est continue sur l'ouvert $O$ si et seulement si $f$ est continue en chaque point de $O$.

Même si aucun cours sur la notion de limite ne semble être prévu par le programme officiel, la continuité en $(x_0, y_0)$ peut (et doit) se lire sous la forme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0),\ (x,y)\neq(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

## 3.2 Opérations sur les fonctions continues

Le programme officiel dit que l'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme. Nous donnons sans démonstration les théorèmes généraux usuels pour disposer d'un stock raisonnable de fonctions continues. Ceci dit les démonstrations, qui seront effectuées en math spé, sont très proches de celles déjà effectuées pour les fonctions d'une seule variable. Il suffit d'adapter ces démonstrations en remplaçant $|\ |$ par $\|\ \|$ entre autres.

**Théorème 3.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in O$. Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue en $a$.

Si $f$ et $g$ sont continues sur $O$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur $O$.

**Théorème 4.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in O$. Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors $f \times g$ est continue en $a$.

Si $f$ et $g$ sont continues sur $O$, alors $f \times g$ est continue sur $O$.

**Théorème 5.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in O$. Si $f$ et $g$ sont continues en $a$ et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en $a$.

Si $f$ et $g$ sont continues sur $O$ et si $g$ ne s'annule pas sur $O$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $O$.

**Théorème 6.** Un polynôme à deux variables est continu sur $\mathbb{R}^2$.

Une fraction rationnelle à deux variables est continue sur son domaine de définition.

**Exercice 3.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

**1)** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

**2)** Montrer que $f$ est continue en $(0, 0)$.

**3)** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Solution 3.**

**1)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $0 \leqslant (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$ et donc $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

**2)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{\left(\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right)^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{4}\|(x, y)\|^2,$$

ce qui reste vrai quand $(x, y) = (0, 0)$. Soit alors $\varepsilon > 0$ (solution momentanée). Soit $\alpha = 2\sqrt{\varepsilon} > 0$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x, y) - (0, 0)\| \leqslant \alpha$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leqslant \frac{1}{4}\|(x, y)\|^2 \leqslant \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\|(x, y) - (0, 0)\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| \leqslant \varepsilon)$. Donc, la fonction $f$ est continue en $(0, 0)$.

Une solution définitive est : puisque $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}\|(x, y)\|^2 = 0$, le théorème des gendarmes montre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\neq(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ et donc $f$ est continue en $(0, 0)$.

**3)** D'autre part, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et finalement la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

### 3.3 Continuité partielle

Encore une fois, l'étude de la continuité n'est pas un objectif du programme ce qui exclut les développements théoriques. Nous disons néanmoins un mot de la notion de continuité partielle pour éviter que ne se mette en place une rédaction totalement fausse.

On suppose que $f$ est une fonction définie sur un ouvert $O$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de $O$. On dit que $f$ est **partiellement continue** en $a$ si et seulement si les deux applications partielles $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont continues en $x_0$ et $y_0$ respectivement.

Il est clair que si $f$ est continue en $a = (x_0, y_0)$, alors l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ est continue en $x_0$ et l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue en $y_0$. Dit autrement, la continuité entraine la continuité partielle. L'exercice suivant a pour but de montrer que la réciproque de cette implication est fausse.

**Exercice 4.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

**1)** Montrer que $f$ est continue partiellement en $(0, 0)$.

**2)** Montrer que $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

**Solution 4.**

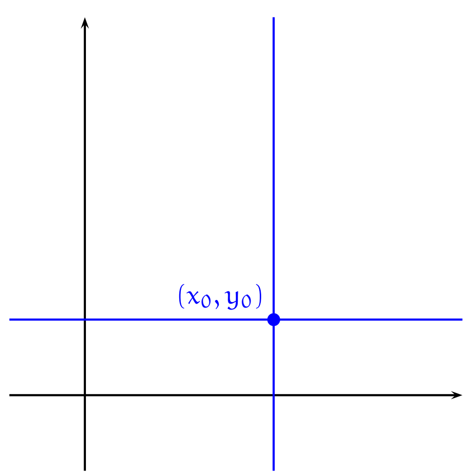
**1)** Les deux applications partielles en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ sont respectivement $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} = 0$ et $y \mapsto 0$. Ces deux applications sont continues en $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ respectivement. Donc, $f$ est partiellement continue en $(0, 0)$.

**2)** On note que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x, x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \dfrac{1}{2}$.
Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. Soit $\alpha > 0$. Soit $(x, y) = \left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}, \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$.
Alors, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \left\|\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}, \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \alpha \leqslant \alpha$ mais $|f(x, y) - f(0, 0)| = \dfrac{1}{2} > \varepsilon$.

On a montré que : $\exists \varepsilon > 0 / \ \forall \alpha > 0, \ \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ (\|(x, y) - (0, 0)\| \leqslant \alpha$ et $|f(x, y) - f(0, 0| > \varepsilon)$. Donc, $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

---

Ainsi, la continuité partielle n'entraine pas la continuité. Donc une solution du genre « la fonction de $x$ à $y$ fixé est continue et la fonction de $y$ à $x$ fixé est continue et donc $f$ est continue » est totalement fausse.
Le problème vient du fait que quand on analyse la continuité partielle de $f$ en $(x_0, y_0)$, on est très loin d'analyser toutes les valeurs que prend $f$ au voisinage de $(x_0, y_0)$. On analyse seulement les valeurs que prend $f$ sur « l'horizontale et la verticale » passant par $(x_0, y_0)$.



## 4 Dérivées partielles d'ordre 1

### 4.1 Définition des dérivées partielles en un point

DÉFINITION 5. Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de $O$.

$f$ admet en $a$ une **dérivée partielle par rapport à sa première variable** $x$ si et seulement si la première application partielle de $f$ en $a$ est dérivable en $x_0$. En cas d'existence, la dérivée par rapport à $x$ de $f$ en $a$ est la dérivée en $x_0$ de la première application partielle de $f$ en $a$. Elle se note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

$f$ admet en $a$ une **dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable** $y$ si et seulement si la deuxième application partielle de $f$ en $a$ est dérivable en $y_0$. En cas d'existence, la dérivée par rapport à $y$ de $f$ en $a$ est la dérivée en $y_0$ de la deuxième application partielle de $f$ en $a$. Elle se note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Ainsi, par définition,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.}$$

**Exemple.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x, y) = ye^{x^2+y^2}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Pour obtenir $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, on dérive la première application partielle $x \mapsto y_0 e^{x^2+y_0^2}$ puis on évalue en $x_0$. Dit autrement, on dérive la fonction de $x$ à $y$ fixé. On obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 y_0 e^{x_0^2+y_0^2}.$$

De même, pour obtenir $\frac{\partial f}{\partial xy}(x_0, y_0)$, on dérive la deuxième application partielle $y \mapsto ye^{x_0^2+y^2}$ puis on évalue en $y_0$ ou encore on dérive la fonction de $y$ à $x$ fixé. On obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = e^{x_0^2+y_0^2} + 2y_0^2 e^{x_0^2+y_0^2} = \left(1 + 2y_0^2\right) e^{x_0^2+y_0^2}.$$

❏

### 4.2 Lien avec la continuité

On a déjà vu que la continuité partielle n'entraine pas la continuité. On va voir dans l'exercice suivant que l'existence de dérivées partielles en $(x_0, y_0)$ n'entraine pas la continuité en $(x_0, y_0)$.

**Exercice 5.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Montrer que $f$ admet en $(0, 0)$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable et une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et déterminer ces dérivées partielles.

**Solution 5.** Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$. Donc, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$. Par suite, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable $x$ en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

De même, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable $y$ en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

---

On a déjà vu que la fonction $f$ ci-dessus n'est pas continue en $(0, 0)$ et d'après ce qui précède, $f$ admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables en $(0, 0)$. On redit donc que l'existence de dérivées partielles n'entraine pas la continuité.

### 4.3 Fonctions dérivées partielles

Définition 6. Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

Si $f$ admet dérivée partielle par rapport à sa première variable $x$ (resp. sa deuxième variable $y$) en chacun des points de $\mathcal{O}$, on peut définir la fonction première (resp. deuxième) dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \quad \left(\text{resp. } \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right).$$

⇨ **Commentaire** . *On doit prendre garde à donner un sens précis aux notations. Dans l'expression* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$*, la même lettre* $x$ *est utilisée deux fois mais elle ne désigne pas la même chose suivant son emplacement. En dénominateur, elle indique par rapport à quoi on a dérivé et en numérateur, elle indique la première composante du point en lequel on a dérivé. Si on évalue en* $(x_0, y_0)$*, on obtient* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *et non pas* $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0)$.

### 4.4 Opérations sur les dérivées partielles

Puisqu'une dérivée partielle est obtenue en dérivant une fonction d'une seule variable, l'autre étant fixée, on a immédiatement les théorèmes généraux suivants :

**Théorème 7.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Si $f$ et $g$ admettent sur $\mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à leur première variable $x$ (resp. deuxième variable $y$), alors $\lambda f + \mu g$ admet sur $\mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable $x$ (resp. deuxième variable $y$) et de plus,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \text{ (resp. } \frac{\partial}{\partial y}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y}).$$

**Théorème 8.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

Si $f$ et $g$ admettent sur $\mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à leur première variable $x$ (resp. deuxième variable $y$), alors $f \times g$ admet sur $\mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable $x$ (resp. deuxième variable $y$) et de plus,

$$\frac{\partial (f \times g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x} \text{ (resp. } \frac{\partial (f \times g)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial y}).$$

**Théorème 9.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

Si $f$ et $g$ admettent sur $\mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à leur première variable $x$ (resp. deuxième variable $y$) et si $g$ ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$, alors $\frac{f}{g}$ admet sur $\mathcal{O}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable $x$ (resp. deuxième variable $y$) et de plus,

$$\frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \times g - f \times \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \text{ (resp. } \frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \times g - f \times \frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}).$$

### 4.5 Fonctions de classe $C^1$

Définition 7. Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.

On dit que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathcal{O}$ si et seulement si $f$ admet sur $\mathcal{O}$ des dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables et de plus, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, qui sont des fonctions de deux variables définies sur $\mathcal{O}$, sont continues sur $\mathcal{O}$.

On verra au paragraphe suivant qu'une application de classe $C^1$ est en particulier continue (alors que la seule existence des dérivées partielles est insuffisante pour entraîner la continuité).

On « admet » que les théorèmes généraux usuels restent valables : une combinaison linéaire de fonctions de classe $C^1$ est de classe $C^1$, un produit de fonctions de classe $C^1$ est de classe $C^1$, un quotient de fonctions de classe $C^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas est de classe $C^1$, un polynôme à deux variables est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, une fraction rationnelle à deux variables est de classe $C^1$ sur son domaine de définition.

Voici maintenant un exercice assez long et pénible, pas tout à fait dans l'esprit du programme officiel, mettant en œuvre les différentes notions mises en place jusqu'ici. On considère comme acquise l'inégalité $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, valable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 6.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Solution 6.**

• $f$ est continue puis de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car coïncide sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = y\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$ puis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{\left(3x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3-xy^2\right)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

et de même (ou en remarquant que $f(y,x) = -f(x,y)$),

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

**Continuité de $f$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = |xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$$

ce qui reste vrai quand $(x,y) = (0,0)$. Mais alors, avec une solution identique à celle de l'exercice n° 3, page 7, $f$ est continue en $(0,0)$ et finalement $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \dfrac{0-0}{x-0} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Ainsi, $f$ admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables définies par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

**Continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &= \frac{|y|\left|x^4+4x^2y^2-y^4\right|}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &\leqslant \frac{|y|\left(x^4+4x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \leqslant \frac{|y|\left(2x^4+4x^2y^2+2y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2|y|\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= 2|y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\|(x,y)\| \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $(x,y) = (0,0)$.

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 2\|(x,y)\|$. Mais alors, comme dans l'exercice n° 3, ceci montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. On montre de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.

En résumé, $f$ admet sur $\mathbb{R}^2$, des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et aussi en $(0,0)$. Finalement, $f$ admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

## 4.6 Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe $C^1$ en un point

On met maintenant en place la formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 1 pour les fonctions de deux variables. Dans cette formule apparaît l'expression $o(\|(h,k)\|)$ quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$. Cette expression doit être comprise sous la forme

$$o(\|(h,k)\|) = \|(h,k)\| \times \varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(h,k)$ tend vers $0$ quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$. Aucun cours n'a été fait sur la notion de limite. On peut se contenter d'une vision intuitive : évidemment que, quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$ ou encore quand $h$ et $k$ tendent vers $0$ de manière indépendante, l'expression $h^2+k^2$ (par exemple) tend vers $0$. On peut aussi faire référence à la continuité : en posant $\varepsilon(0,0)=0$, dire que $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0),\ (h,k)\neq(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$, c'est encore dire que la fonction $\varepsilon$ est continue en $(0,0)$.

**Théorème 10.** (développement limité d'ordre 1)

Soit $f$ une fonction définie et de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0,y_0)$ un point de $O$. Alors, $f$ admet en $(x_0,y_0)$ un développement limité d'ordre 1, son développement de TAYLOR-YOUNG : quand $(x,y)$ tend vers $(x_0,y_0)$,

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + o(\|(h,k)\|).$$

**DÉMONSTRATION .** Soit $(x_0,y_0)\in O$. Puisque $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le théorème 2, page 5, permet d'affirmer qu'il existe $r>0$ tel que la carré ouvert $C = ]x_0-r,x_0+r[\times]y_0-r,y_0+r[$ est contenu dans $O$. Pour $(h,k)\in C$ fixé, on commence par écrire

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = (f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k)) + (f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)).$$

La fonction $g\ :\ t\mapsto f(x_0+t,y_0+k)$ est définie et dérivable sur $]-r,r[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $h>0$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c\in]0,h[\subset]-r,r[$ tel que $g(h)-g(0)=hg'(c)$. Si $h<0$, on peut fournir $c$ dans $]h,0[$ tel que $g(h)-g(0)=hg'(c)$ et si $h=0$, le réel $c=0$ est tel que $g(h)-g(0)=hg'(c)$.

Dans tous les cas, il existe un réel $c$, dépendant de $h$ et de $k$, tel que $|c|\leqslant|h|$ et

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k) = g(h)-g(0) = hg'(c) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c,y_0+k).$$

De même, il existe un réel $d$ tel que $|d|\leqslant k$ et $f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0) = k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+d)$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
&\left|f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k\right)\right| \\
&\qquad = \left|h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\right| \\
&\qquad \leqslant |h|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| + |k|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $(h,k)\in C^2$, il existe $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ tel que $|c|\leqslant|h|$, $|d|\leqslant|k|$ et (puisque $|h|\leqslant\sqrt{h^2+k^2}=\|(h,k)\|$ et $|k|\leqslant\|(h,k)\|$)

$$\left|f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k\right)\right| \leqslant \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(h,k) = \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+c,y_0+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+d) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|$.

Maintenant, puisque $|c|\leqslant|h|$ et $|d|\leqslant|k|$, $c$ et $d$ tendent vers $0$ quand $h$ et $k$ tendent vers $0$. Par suite, $(x_0+c,y_0+k)$ et $(x_0,y_0+d)$ tend vers $(x_0,y_0)$ quand $h$ et $k$ tendent vers $0$. Puisque les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(x_0,y_0)$, $\varepsilon(h,k)$ tend vers $0$ quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$. Mais alors, $\dfrac{1}{\|(h,k)\|}\left(f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k\right)$ tend vers $0$ quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$ ou encore, quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + o(\|(h,k)\|).$$

❏

On note que l'application $(h,k) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ ou encore un polynôme à deux variables de degré inférieur ou égal à 1. C'est la meilleure approximation linéaire de la différence $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ pour $(h,k)$ au voisinage de $(0,0)$.

Interprétons géométriquement, l'égalité de Taylor-Yonug. Soit $(S)$ la surface d'équation $z = f(x,y)$, $(x,y) \in O$. Soit $(x_0,y_0,z_0)$ un point de la surface $(S)$. Donc, $(x_0,y_0) \in O$ et $z_0 = f(x_0,y_0)$. Si $(x,y,z)$ est un point de $(S)$, le développement limité précédent s'écrit aussi

$$z - z_0 = f(x,y) - f(x_0,y_0) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y - y_0) + o\left(\|(x-x_0, y-y_0)\|\right).$$

On note alors $(P_0)$ le plan d'équation $z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x-x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y-y_0)$. Si $M$ et $N$ sont respectivement les points de $(S)$ et $(P_0)$ dont la projection orthogonale sur $(xOy)$ est $(x,y,0)$, alors $z_M = f(x,y)$ et $z_N = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x-x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y-y_0)$, puis

$$z_M - z_N \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} o\left(\|(x-x_0, y-y_0)\|\right).$$

Le contact entre la surface $(S)$ et le plan $(P_0)$ semble donc plus fort que le contact entre $(S)$ et tout autre plan $(P)$ passant par $M_0$. $(P_0)$ est par définition le **plan tangent** à la surface $(S)$ en $M_0$. On peut montrer que comme pour la tangente à une courbe, le plan tangent est obtenu comme position limite d'une certaine famille de plans passant par $M_0$.

On retiendra qu'une équation du plan tangent à la surface $(S)$ d'équation $z = f(x,y)$ en un point $(x_0,y_0,z_0)$ de $(S)$ est

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y-y_0).$$

**Exercice 7.** L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

où $\Omega = (a,b,c)$ est un point donné de $\mathbb{R}^3$ et $R$ est un réel strictement positif.

**1)** Déterminer une équation une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ de $\mathcal{S}$ tel que $z_0 > c$.

**2)** Vérifier que ce plan tangent est orthogonal au rayon $[\Omega, M_0]$.

**Solution 7.**

**1)** Pour $z > c$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Leftrightarrow z = c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$. Donc, au voisinage de $M_0$, $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = f(x,y)$ où $f$ est la fonction $(x,y) \mapsto c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$. $f$ est de classe $C^1$ au voisinage de $(a,b)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{x_0 - a}{\sqrt{R^2 - (x_0-a)^2 - (y_0-b)^2}} = -\frac{x_0-a}{z_0-c}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{y_0 - b}{\sqrt{R^2 - (x_0-a)^2 - (y_0-b)^2}} = -\frac{y_0-b}{z_0-c}.$$

Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M_0$ a donc pour équation $z - z_0 = -\dfrac{x_0-a}{z_0-c}(x-x_0) + \dfrac{y_0-b}{z_0-c}(y-y_0)$ ou encore, avec une écriture plus symétrique,

$$(x_0-a)(x-x_0) + (y_0-b)(y-y_0) + (z_0-c)(z-z_0) = 0.$$

**2)** Un vecteur normal à ce plan tangent est le vecteur de coordonnées $(x_0-a, y_0-b, z_0-c)$ ou encore un vecteur normal à ce plan tangent est le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_0}$.

**Théorème 11.** Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**Si** $f$ est de classe $C^1$ sur $O$, **alors** $f$ est continue sur $O$.

Démonstration. Supposons $f$ de classe $C^1$ sur $O$. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $O$. D'après le théorème 10, quand $(h, k)$ tend vers $(0, 0)$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|).$$

Puisque $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)+o(\|(h, k)\|) = 0$, on en déduit en particulier que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0),\ (h,k)\neq(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$. $f$ est donc continue en $(x_0, y_0)$.

❏

## 4.7 Vecteur gradient

Dans ce paragraphe et les suivants, le plan $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Définition 8. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $O$.

Le **vecteur gradient** de la fonction $f$ en le point $(x_0, y_0)$ est le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ dans la base $\mathcal{B}$. Il se note $\nabla f(x_0, y_0)$ ($\nabla$ se lit nabla).

Le développement limité de $f$ à l'ordre 1 en $(x_0, y_0)$ s'écrit alors

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} \langle\nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

On suppose de plus que le vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$ n'est pas nul. En première approximation, la variation $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ est égale à $\langle\nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle\nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle \leqslant |\langle\nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle| \leqslant \|\nabla f(x_0, y_0)\| \, \|(x - x_0, y - y_0)\|$$

avec égalité si et seulement le vecteur $(x - x_0, y - y_0)$ est colinéaire au vecteur $\nabla f(x_0, y_0)$ et de même. Le vecteur gradient, quand il n'est pas nul, donne donc, localement, la direction dans laquelle $f$ croît le plus vite.

## 4.8 Dérivée suivant un vecteur

Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de $O$. Jusqu'ici, nous avons analysé les dérivées partielles de $f$ en $(x_0, y_0)$. Pour la première dérivée partielle en $(x_0, y_0)$, on a analysé $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$. Cette limite peut encore s'écrire $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a + te_1) - f(a))$ en posant $x - x_0 = t$ et en constatant que

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0) = f((x_0, y_0) + t(1, 0)) - f(x_0, y_0) = f(a + te_1) - f(a).$$

Nous nous sommes ainsi intéressé aux variations de $f$ quand la variable $(x, y)$ varie dans la direction de $e_1$. On dit aussi que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la dérivée de $f$ suivant le vecteur $e_1$. Nous allons généraliser cette notion.

Définition 9. Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de $O$.

Soit $u = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que $f$ est **dérivable suivant le vecteur $u$ en** $a = (x_0, y_0)$ si et seulement si la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}(f(a + tu) - f(a))$ a une limite réelle quand $t$ tend vers 0. En cas d'existence, cette limite est la **dérivée de $f$ suivant le vecteur $u$ en** $(x_0, y_0)$ et se note $D_u f(x_0, y_0)$. Ainsi,

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a + tu) - f(a)).$$

**Théorème 12.** Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de $O$.

Soit $u = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. $f$ est dérivable suivant le vecteur $u$ en $(x_0, y_0)$ et de plus,

$$D_u f(x_0, y_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle.$$

**Démonstration .** Puisque $f$ est de classe $C^1$ sur $O$, on dispose du développement

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon$ est une fonction qui tend vers $0$ quand $(h,k)$ tend vers $(0,0)$. En particulier, pour $t$ réel suffisamment petit,

$$f(a + tu) = f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) = f(a) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\beta\right) + |t|\|(\alpha, \beta)\|\varepsilon(t\alpha, t\beta)$$

et donc, pour $t$ réel suffisamment petit et non nul,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(f(a + tu) - f(a)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\beta + \mathrm{sgn}(t)\|(\alpha, \beta)\|\varepsilon(t\alpha, t\beta)\\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle + \mathrm{sgn}(t)\|(\alpha, \beta)\|\varepsilon(t\alpha, t\beta).\end{aligned}$$

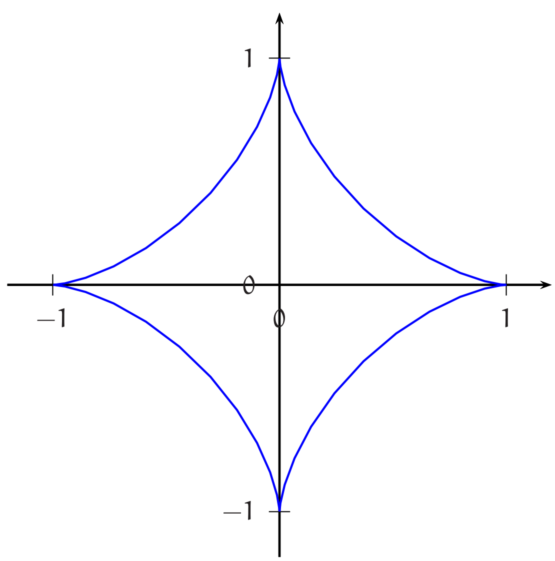
Enfin, $|\mathrm{sgn}(t)\, \|(\alpha, \beta)\|\varepsilon(t\alpha, t\beta)| = \|(\alpha, \beta)\|\, |\varepsilon(t\alpha, t\beta)|$ tend vers $0$ quand $t$ tend vers $0$ et donc $\frac{1}{t}(f(a + tu) - f(a))$ tend vers $\langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$ quand $t$ tend vers $0$.

Ceci montre que $f$ est dérivable suivant le vecteur $u$ et que $D_u f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$. ❏

## 4.9 Dérivées partielles de fonctions composées

Nous commençons par analyser un cas « simple ». On considère une fonction $f$ de deux variables, de classe $C^1$ sur un ouvert $O$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère ensuite une fonction $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ d'une seule variable, définie sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $O \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$, $t \in I$, est en général une courbe (on dit aussi un arc) contenue dans $O$. Par exemple, voici l'ensemble des points $(\cos^3(t), \sin^3(t))$, $t \in \mathbb{R}$ (la courbe obtenue est un *astroïde*).




On dit que la fonction $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$, qui est une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $O \subset \mathbb{R}^2$, est de classe $C^1$ sur $I$ si et seulement si les deux fonctions $x$ et $y$ sont de classe $C^1$ sur $I$. Dans ce cas, la dérivée de $\gamma$ en $t$ est $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. On peut démontrer que si ce vecteur n'est pas nul, il dirige la tangente au point $\gamma(t)$.

On va apprendre à dériver la fonction $f \circ \gamma$ qui s'interprète comme la dérivée de la fonction $f$ le long de l'arc $\gamma$. On peut énoncer :

**Théorème 13.** (règle de la chaine)

Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert $O$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma\ :\ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ une application de classe $C^1$ sur un intervalle ouvert $I$ à valeurs dans $O$.

Alors, $f \circ \gamma$ est de classe $C^1$ sur $I$ et pour tout réel $t$ de $I$,

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y'(t)$$

ou encore

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle .$$

**Démonstration .** La fonction $f \circ \gamma$ est une fonction d'une seule variable $t \in I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. Pour tout réel $t$ de $I$,

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) &= f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))(x(t) - x(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))(y(t) - y(t_0)) + o(\|(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\|) \end{aligned}$$

puis, pour $t \neq t_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - t_0}(f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))) =& \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ &+ \frac{\|(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\|}{t - t_0} \varepsilon(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0)) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0)) \underset{t \to t_0}{\to} 0$ (entre autre par continuité des fonctions $x$ et $y$ en $t_0$).

Déjà, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\, x'(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\, y'(t_0)$ quand $t$ tend vers $t_0$.

Ensuite, si $t > t_0$, on peut écrire $\dfrac{\|(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\|}{t - t_0} = \sqrt{\left(\dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}$. Cette expression tend vers $\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} = \|\gamma'(t_0)\|$ quand $t$ tend vers $t_0$ par valeurs supérieures et donc $\dfrac{\|(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\|}{t - t_0} \varepsilon(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))$ tend vers $\|\gamma'(t_0)\| \times 0 = 0$ quand $t$ tend vers $t_0$ par valeurs supérieures. Le même travail peut être effectué pour $t < t_0$ avec un signe $-$. Finalement, $\dfrac{\|(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\|}{t - t_0} \varepsilon(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))$ tend vers $0$ quand $t$ tend vers $t_0$. Ceci montre que $f \circ \gamma$ est dérivable en $t_0$ et que

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\, x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\, y'(t_0) = \langle \nabla f(t_0), \gamma'(t_0) \rangle .$$

Enfin, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t_0))\, y'(t)$ est continue sur $I$ par continuité de $x$ et $y$ sur $I$ puis de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $O$. Donc, $f \circ \gamma$ estime de classe $C^1$ sur $I$.

❏

Revenons sur les lignes de niveaux de la fonction $f$. Avec les notations du théorème précédent, supposons que pour tout réel $t$ de $I$, $f(x(t), y(t)) = k$ où $k$ est un réel donné. L'ensemble des points $M(t)$ est alors contenu dans la ligne de niveau $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ f(x, y) = k\right\}$.

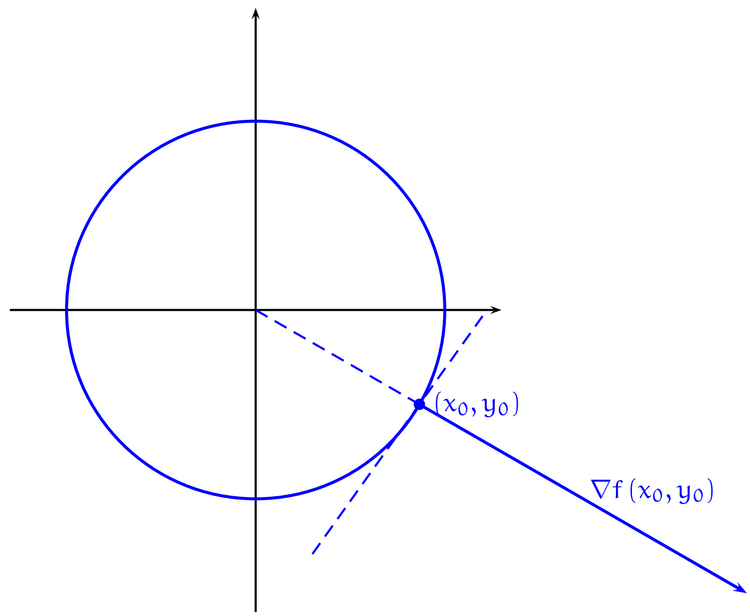
La fonction $f \circ \gamma$ est constante sur $I$ et donc sa dérivée est nulle sur $I$. Le théorème précédent montre que pour tout réel $t$ de $I$, $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = (f \circ \gamma)'(t) = 0$. Le vecteur gradient de $f$ au point $\gamma(t)$ est donc orthogonal au vecteur $\gamma'(t)$. Si on admet que le vecteur $\gamma'(t)$ dirige la tangente à l'arc $\gamma$ au point $\gamma(t)$ quand le vecteur $\gamma'(t)$ n'est pas nul, on vient de montrer qu'en tout point de l'arc ou presque, le vecteur gradient de $f$ en $\gamma(t)$ est orthogonal à la tangente à l'arc en $\gamma(t)$. Dans cette situation, on dit que le vecteur gradient de $f$ en $\gamma(t)$ est orthogonal à la ligne de niveau de $f$ passant par $\gamma(t)$.

On a « montré » que le vecteur gradient de $f$ en un point d'une ligne de niveau de $f$ est orthogonal à cette ligne de niveau.

Considérons par exemple la fonction $f\ :\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Soit $k > 0$ puis $\mathcal{L}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ f(x, y) = k\right\}$ ($\mathcal{L}_k$ est une ligne de niveau de $f$). $\mathcal{L}_k$ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{k}$. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{L}_k$. Le vecteur gradient de $f$ en $(x_0, y_0)$ est

$$\nabla f(x_0, y_0) = 2(x_0, y_0).$$

Ce vecteur est colinéaire au rayon $\overrightarrow{OM_0}$ et est donc orthogonal à la tangente au cercle en $M_0$ ou encore, ce vecteur gradient est orthogonal au cercle en $M_0$.




Maintenant, on généralise un peu la règle de la chaine :

**Théorème 14.** (règle de la chaine)

Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $\varphi : (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ et $\psi : (u, v) \mapsto \psi(u, v)$ deux applications de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $\Omega$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(u, v)$ de $\Omega$, $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in O$.

Alors, l'application $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ et pour tout $(u, v)$ de $\Omega$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v).$$

**Démonstration.** Pour calculer $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)$, on dérive la fonction d'une seule variable $u \mapsto f(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0))$ puis on évalue en $u_0$. On applique le théorème 13 aux fonctions $x : u \mapsto \varphi(u, v_0)$ et $y : u \mapsto \psi(u, v_0)$. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0), y(u_0))\, x'(u_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0), y(u_0))\, y'(u_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)) \times \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0)\end{aligned}$$

et de même pour la deuxième dérivée partielle.

❏

A titre d'exemple de mise en œuvre de la formule, nous allons analyser le passage en polaires. On considère une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $x = r\cos(\theta) = \varphi(r, \theta)$ et $y = r\sin(\theta) = \psi(r, \theta)$ et on considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = f(\varphi(r, \theta), \psi(r, \theta)).$$

Les formules du théorème 14 s'écrivent formellement

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)$$

Ensuite, $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta)$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)$ et $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)$. On obtient donc

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

# 5 Extremums des fonctions numériques

## 5.1 Définitions

Définition 10. Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $O$.

$f$ admet un **maximum global** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in O$, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **maximum global strict** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in O \setminus \{(x_0, y_0)\}$, $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **maximum local** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_o((x_0, y_0), r) \subset O$ et pour tout $(x, y) \in B_o((x_0, y_0), r)$, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **maximum local strict** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_o((x_0, y_0), r) \subset O$ et pour tout $(x, y) \in B_o((x_0, y_0), r) \setminus \{(x_0, y_0)\}$, $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

$f$ admet un **minimum global** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in O$, $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **minimum global strict** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in O \setminus \{(x_0, y_0)\}$, $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **minimum local** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_o((x_0, y_0), r) \subset O$ et pour tout $(x, y) \in B_o((x_0, y_0), r)$, $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **minimum local strict** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_o((x_0, y_0), r) \subset O$ et pour tout $(x, y) \in B_o((x_0, y_0), r) \setminus \{(x_0, y_0)\}$, $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

$f$ admet un **extremum global** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si $f$ admet un maximum global ou un minimum global en $(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **minimum global strict** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si $f$ admet un maximum global strict ou un minimum global strict en $(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **minimum local** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si $f$ admet un maximum local ou un minimum local en $(x_0, y_0)$.
$f$ admet un **minimum local strict** en $(x_0, y_0)$ si et seulement si $f$ admet un maximum local strict ou un minimum local strict en $(x_0, y_0)$.

Par exemple, la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ admet un minimum global en $(0, 0)$ et ce minimum est $f(0, 0) = 0$ ou encore, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geqslant 0 = f(0, 0)$.

## 5.2 Applications des dérivées partielles à la recherche d'extremums

De même que la dérivée d'une fonction d'une seule variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un outil pour déterminer les extremums locaux d'une telle fonction, les dérivées partielles d'une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont un outil pour déterminer les extremums locaux d'une telle fonction :

Définition 11. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $O$.

$(x_0, y_0)$ est un **point critique** de $f$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Il revient au même de dire que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

On dispose du résultat suivant :

**Théorème 15.** Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert non vide $O$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $O$.

**Si** $f$ admet en $(x_0, y_0)$ un extremum local, **alors** $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$.

**DÉMONSTRATION .** Supposons par exemple que $f$ admet un maximum local en $(x_0, y_0)$.

D'après le théorème 2, il existe $r > 0$ tel que la première application partielle en $(x_0, y_0)$ à savoir $g : x \mapsto f(x, y_0)$ est définie et de classe $C^1$ sur $]-r, r[$. $f$ admet un maximum local en $(x_0, y_0)$ et en particulier, $g$ admet un maximum local en $x_0$. On sait alors que $g'(x_0) = 0$ ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

❏

⇨ **Commentaire** . *De même que la réciproque de l'implication du théorème à une variable est fausse ($f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow f$ admet un extremum local en $x_0$), la réciproque de l'implication du théorème 13 est malheureusement fausse. L'exercice qui suit fournira un contre exemple.*

**Exercice 3.** Déterminer les extremums locaux de la fonction $f : (x, y) \mapsto -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

**Solution 3.** La fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, en tant que polynôme à deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, si $f$ admet un extremum local en un point $(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$, le point $(x_0, y_0)$ est un point critique de la fonction $f$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x-y) + 4y^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 = x - y \\ y^3 = -(x-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^3 = -x^3 \\ -(x-y) + x^3 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x \\ x^3 - 2x3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = 0 \\ y = -x \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f$ admet trois points critiques, les points $(0,0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

**Etude en $(0,0)$.** Pour tout réel $x$ non nul, $f(x,x) - f(0,0) = 2x^4 > 0$. Donc, toute boule ouverte de centre $(0,0)$ contient des couples $(x,y)$ tels que $f(x,y) > f(0,0)$ (la boule $B_o((0,0), r)$, $r > 0$, contient par exemple le couple $\left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{2}\right)$ qui est un tel couple). Ensuite, Pour tout réel $x$ de $\left]0, \sqrt{2}\right[$, $f(x,0) = -2x^2 + x^4 = -x^2\left(2 - x^2\right) < 0$ et donc toute boule ouverte de centre $(0,0)$ contient des couples $(x,y)$ tels que $f(x,y) < f(0,0)$. On en déduit que la fonction $f$ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

**Etude en $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.** $f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -2\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)^4 = -8$ puis, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(x,y) - f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 8 = x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 4xy + 8 \\
&\geqslant x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) + 8 \text{ (car } (x-y)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 2xy \geqslant -\left(x^2+y^2\right)) \\
&= \left(x^4 - 4x^2 + 4\right) + \left(y^4 - 4y^2 + 4\right) = \left(x^2 - 2\right)^2 + \left(y^2 - 2\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc, $f$ admet en $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ un minimum global (et même global strict) égal à $-8$.

**Etude en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.** Puisque $f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geqslant f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Donc, $f$ admet un minimum global en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.