Planche n° 36. Fonctions uniformément continues. Corrigé

Exercice n° 1

1) a) Soit $\varepsilon > 0$. Soient x et y deux réels de $[0, 1]$. Supposons que $x \leqslant y$.

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leqslant x + y - 2\sqrt{x^2} = y - x = |x - y|\,.$$

En échangeant les rôles de x et y, l'égalité précédente est encore valable si $x \geqslant y$. On a donc démontré que pour tous réels x et y de $[0, 1]$, $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \leqslant |y - x|$ ou encore $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

Soit alors $\alpha = \varepsilon^2 > 0$. Soient x et y deux réels de $[0, 1]$ tels que $|x - y| \leqslant \alpha$. On a

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y - x|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ \left(|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \varepsilon\right),$$

et donc que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Remarque. Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, le théorème de Heine permet d'affirmer directement que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur le segment $[0, 1]$.

b) Il s'agit de vérifier que $M = \text{Sup}\left\{\left|\dfrac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x}\right|,\ (x, y) \in [0, 1]^2\right\}$ est égal à $+\infty$.

$\left\{\left|\dfrac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x}\right|,\ (x, y) \in [0, 1]^2\right\}$ contient $\left\{\dfrac{\sqrt{x}}{x},\ x \in]0, 1]\right\}$. Donc, pour tout $x \in]0, 1]$, $M \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Quand x tend vers 0, on obtient $M = +\infty$. Ceci montre que f n'est pas lipshitzienne sur $[0, 1]$ (mais est uniformément continue sur $[0, 1]$).

2) Soient x et y deux réels de $[1, +\infty[$.

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{|y - x|}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}|y - x|.$$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ et en particulier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

3) Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque f est uniformément continue sur $[0, 1]$, $\exists \alpha_1 > 0/\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ \left(|x - y| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Puisque f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$, $\exists \alpha_2 > 0/\ \forall (x, y) \in [1, +\infty[^2,\ \left(|x - y| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Soit $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ tel que $|x - y| \leqslant \alpha$.

- Si x et y sont dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} |x - y| \leqslant \alpha &\Rightarrow |x - y| \leqslant \alpha_1 \text{ (car } \alpha \leqslant \alpha_1) \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \text{ (car } \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon). \end{aligned}$$

- Si x et y sont dans $[1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} |x - y| \leqslant \alpha &\Rightarrow |x - y| \leqslant \alpha_2 \text{ (car } \alpha \leqslant \alpha_2) \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \text{ (car } \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon). \end{aligned}$$

- Si par exemple, $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant y$, alors $|x - 1| \leqslant |x - y| \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ et donc $|f(x) - f(1)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|y - 1| \leqslant |x - y| \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ et donc $|f(y) - f(1)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Mais alors

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(1)|+|f(1)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall (x,y)\in[0,+\infty[^2,\ (|x-y|\leqslant\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon)$ et donc que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice n° 2

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $x_n=\sqrt{2n\pi}$ et $y_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

- Pour tout entier naturel n, $y_n-x_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}-\sqrt{2n\pi}=\dfrac{\pi/2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}+\sqrt{2n\pi}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$.
- Pour tout entier naturel n, $f(y_n)-f(x_n)=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(y_n)-f(x_n))=1\neq 0$.

On a trouvé deux suites de réels positifs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que x_n-y_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $f(x_n)-f(y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On sait alors que la fonction $f\ :\ x\mapsto\sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice n° 3

Posons $\ell=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
Soit $\varepsilon>0$. $\exists A>0/\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ \left(x\geqslant A\Rightarrow|f(x)-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Soit $(x,y)\in[A,+\infty[^2$. Alors, $|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-\ell|+|\ell-f(y)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0,A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine.
Donc, $\exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in[0,A]^2,\ |x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$.

Résumons. $\alpha>0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0,+\infty[$ vérifiant $|x-y|\leqslant\alpha$.

- Si $(x,y)\in[0,A]^2$, on a $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\varepsilon$.
- Si $(x,y)\in[A,+\infty[^2$, on a $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}\leqslant\varepsilon$.
- Si enfin on a $0\leqslant x\leqslant A\leqslant y$ alors, puisque $|A-x|\leqslant|x-y|\leqslant\alpha$, on a $|f(x)-f(A)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A,+\infty[$, on a $|f(y)-f(A)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(A)|+|f(y)-f(A)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in[0,+\infty[^2,\ (|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice n° 4

Soit T une période strictement positive de f. f est continue sur le segment $[0,T]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,T]$. M est encore un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon>0$.
f est continue sur le segment $[0,T]$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists\alpha\in]0,T[/\ \forall(x,y)\in[0,T]^2,\ \left(|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Soient x et y deux réels tels que $|x-y|\leqslant\alpha(<T)$.

- S'il existe un entier naturel k tel que $(x,y)\in[kT,(k+1)T]^2$, alors $x-kT\in[0,T]$, $y-kT\in[0,T]$, puis $|(x-kT)-(y-kT)|=|y-x|\leqslant\alpha$ et donc $|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon$.
- Sinon, en supposant par exemple que $x\leqslant y$, puisque l'on a choisi $\alpha<T$,

$$\exists k\in\mathbb{Z}/\ (k-1)T\leqslant x\leqslant kT\leqslant y\leqslant(k+1)T.$$

Mais alors, $|x-kT|\leqslant|y-x|\leqslant\alpha$ et $|y-kT|\leqslant|y-x|\leqslant\alpha$. Par suite,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(kT)|+|f(y)-f(kT)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x-y|\leqslant\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

