Chapitre 35. Probabilités

Plan du chapitre

1 Univers associé à une expérience aléatoire

1.1 Expérience aléatoire

DÉFINITION 1. Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire le résultat.

Exemples.

• On lance une pièce de monnaie. Normalement, on ne peut pas prédire si on obtiendra Pile ou Face.
• On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. On ne peut pas prédire quel nombre entre 1 et 6 sortira.
• On tire 6 boules dans une sphère contenant 49 boules numérotées de 1 à 49. On ne peut pas prédire quels sont les six numéros que l'on obtiendra. ❑

Les différents résultats que l'on peut obtenir après une expérience aléatoire s'appellent les **issues** de cette expérience aléatoire ou aussi **les résultats possibles** ou les **éventualités** de cette expérience aléatoire.

1.2 Univers associé à une expérience aléatoire

La notion d'univers est le premier pas vers la modélisation d'une expérience aléatoire :

DÉFINITION 2. L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire. Il est noté Ω.
Un élément de Ω est une **issue**, une **éventualité**, un **résultat possible**.

⇨ **Commentaire** . *En maths sup, on ne considère que des univers finis (et non vides).*

Le choix d'un univers destiné à modéliser une expérience aléatoire est arbitraire. De la qualité de ce choix dépend la qualité de la modélisation. Par exemple, si on lance deux dés puis que l'on additionne les points obtenus sur les faces supérieures de ces dés, on peut choisir comme univers l'ensemble des différentes sommes possibles $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Dans ce cas, il y a 11 issues ou encore $\text{card}(\Omega) = 11$.
On peut aussi choisir pour Ω l'ensemble des paires non ordonnées de nombres entre 1 et 6 avec répétitions possibles (les deux nombres obtenus) : $\Omega = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 6\}\}$. Dans ce cas, $\text{card}(\Omega) = 21$. On peut encore choisir pour Ω l'ensemble $[\![1, 6]\!]^2$ correspondant au résultat obtenu sur un premier dé puis sur un second. Dans ce cas, $\text{card}(\Omega) = 36$.

1.3 Evénements

Dans tout ce qui suit, Ω est un ensemble fini et non vide.

1.3.1 Définition

DÉFINITION 3. Soit Ω un univers fini et non vide associé à une certaine expérience aléatoire.

Un **événement** est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
Un **événement élémentaire** est un singleton, élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Ω est l'**événement certain**.
$\varnothing$ est l'**événement impossible**.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Un événement est donc une partie d'un ensemble. Cette formalisation efficace va nous permettre le moment venu d'effectuer des calculs sur les événements.*

◇ *En toute rigueur, une issue n'est pas un événement élémentaire ou encore l'élément ω de Ω n'est pas le singleton $\{\omega\}$, élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. Dit autrement, on fait une différence entre ce qui peut se réaliser et ce qui se réalise.*

Exemple. On lance un dé cubique à 6 faces. On associe à cette expérience aléatoire l'univers fini $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ constitué des 6 résultats possibles.

L'événement A_1 : « on obtient un numéro pair » est $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
L'événement A_2 : « le numéro obtenu est strictement plus petit que 2 » est $A_2 = \{1\}$. C'est un événement élémentaire.
L'événement A_3 : « le numéro obtenu est inférieur ou égal à 6 » est $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$. A_3 est l'événement certain.
L'événement A_4 : « le numéro est négatif » est $A_4 = \varnothing$. A_4 est l'événement impossible.

❑

1.3.2 Opérations sur les événements

A partir de certains événements, on en construit d'autres.

DÉFINITION 4. Soit Ω un univers fini et non vide associé à une certaine expérience aléatoire. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

L'**événement contraire** de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$, égal à $C_{\Omega}(A)$.

DÉFINITION 5. Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$.

L'événement « A ou B » est l'événement $A \cup B$.
L'événement « A et B » est l'événement $A \cap B$.

Exemple. On lance deux fois une pièce de monnaie. On associe à cette expérience aléatoire l'univers $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.

Soit C l'événement : « on obtient au moins une fois Pile ». C est la réunion de l'événement A : « on obtient Pile au premier lancer » (ou encore $A = \{(P, F), (P, P)\}$) et de l'événement B : « on obtient Pile au deuxième lancer » (ou encore $B = \{(F, P), (P, P)\}$). Ainsi, $C = A \cup B = \{(P, F), (F, P), (P, P)\}$. ❏

Les propriétés de calcul de ces différentes opérations ont été exposées dans le chapitre « Ensembles, relations, applications ». Par exemple, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ... On voit ici tout l'intérêt de faire d'un événement un ensemble.

DÉFINITION 6. Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$.

On dit que l'événement A **implique** l'événement B si et seulement si $A \subset B$.

Exemple. On lance un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6. L'événement A « on obtient le 1 » (ou encore $A = \{1\}$) implique l'événement B « on obtient un numéro impair » (ou encore $B = \{1, 3, 5\}$). ❏

1.3.3 Système complet d'événements

DÉFINITION 7. Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$.

A et B sont **incompatibles** ou **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

DÉFINITION 8. Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire. Soient I un ensemble non vide d'indices puis $(A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{P}(\Omega))^I$.

$(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si et seulement si

- $\forall (i, j) \in I^2$, $(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$.
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

On dit que le système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de Ω si et seulement si de plus, chaque A_i, $i \in I$, est non vide.

Le théorème suivant, par ailleurs immédiat, fournit deux exemples très importants de systèmes complets d'événements.

Théorème 1. Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire.

1) Pour tout événement A, $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

2) $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements.

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Définition d'une probabilité sur un univers fini

DÉFINITION 9. Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire (ayant donc un nombre fini d'issues).

Une **probabilité** sur Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant de plus les deux axiomes :

- $P(\Omega) = 1$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $(A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B))$ (additivité de P).

La seule donnée de l'univers ne définit évidemment pas la probabilité. De même, qu'à une expérience aléatoire, on peut associer plusieurs univers, à un même univers on peut associer plusieurs probabilités. Par exemple, si on lance une pièce de monnaie, un univers associé à cette expérience, est $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$. Si la pièce n'est pas truquée, la probabilité associée est définie par $P(\{\text{Pile}\}) = P(\{\text{Face}\}) = \dfrac{1}{2}$ mais si la pièce est truquée, on peut avoir par exemple $P(\{\text{Pile}\}) = \dfrac{2}{3}$ et $P(\{\text{Face}\}) = \dfrac{1}{3}$.

De manière générale, on ne calcule pas des probabilités dans un univers mais on calcule des probabilités dans un univers muni d'une probabilité précise. D'où la définition :

Définition 10. Un **espace probabilisé fini** est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini non vide et P une probabilité sur Ω.

2.2 Propriétés de calcul des probabilités

Théorème 2. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
- $P(\varnothing) = 0$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et donc d'après l'axiome d'additivité entre autres,

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(\Omega) = 1,$$

puis $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

En particulier, $P(\varnothing) = P\left(\overline{\Omega}\right) = 1 - P(\Omega) = 0$.

❏

Théorème 3. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $(A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A))$.
- P est **croissante** : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $(A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B))$.

Démonstration. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P})^2$ tel que $A \subset B$. $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ et donc,

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$$

puis $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. En particulier, puisque $P(B \setminus A) \in [0, 1]$,

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A).$$

❏

Théorème 4. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. Soit $(A, B) \in (\mathcal{P})^2$. $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ avec $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \varnothing$. Donc, puisque $A \cap B \subset B$,

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus (A \cap B))) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

❏

Théorème 5. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $n \geqslant 2$ puis $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathcal{P}(\Omega))^n$.

- De manière générale, $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (inégalité de Boole).
- Si de plus les événements A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont deux à deux incompatibles, $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (additivité finie d'une probabilité).

Démonstration.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathcal{P}(\Omega))^n$, $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ et que de plus, si A_1, ..., A_n sont deux incompatibles, alors $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

• Soit $(A_1, A_2) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2),$$

avec égalité si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ car dans ce cas $P(A_1 \cap A_2) = 0$. Le résultat est donc vrai quand $n = 2$.

• Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat pour n événements. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in (\mathcal{P}(\Omega))^{n+1}$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\leqslant P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

Supposons de plus les A_i deux à deux incompatibles. Alors, chacune des deux inégalités ci-dessus est une égalité car $A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \varnothing$ et par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

2.3 Détermination d'une probabilité par les probabilités des événements élémentaires

Théorème 6. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On pose $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et les ω_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont deux à deux distincts. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_i = P(\{\omega_i\})$ ou aussi pour $\omega \in \Omega$, on pose $p_\omega = P(\{\omega\})$.

Alors :

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ou aussi $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

• $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \displaystyle\sum_{\omega \in A} p_\omega$ (avec la convention usuelle qu'une somme vide est nulle) ou aussi, si $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \neq \varnothing$, alors $P(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k}$.

Démonstration . Pour $i \in [\![1, n]\!]$, posons $A_i = \{\omega_i\}$. Puisque les A_i sont deux à deux disjoints,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

Soit $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \in (\mathcal{P}(\Omega) \setminus \varnothing)$. A_{i_1}, ..., A_{i_k} sont deux à deux disjoints et leur réunion est A. Donc,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} P(A_{i_j}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega,$$

ce qui reste vrai quand $A = \varnothing$ avec la convention usuelle qu'une somme vide est nulle.

❏

Théorème 7. Soit Ω un univers fini non vide associé à une certaine expérience aléatoire. On pose $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et les ω_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont deux à deux distincts.

Pour tout $(p_1, \ldots, p_n) \in [0, 1]^n$ tel que $p_1 + \ldots + p_n = 1$, il existe une probabilité P sur Ω et une seule telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$. De plus, si P est cette probabilité,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \text{ (où } p_\omega = P(\{\omega\})\text{)}.$$

Vocabulaire. La famille $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ s'appelle une **distribution de probabilités** : c'est une famille de réels positifs, indexée par Ω et de somme 1.

Démonstration . Le théorème précédent montre l'unicité de P : si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $P(\{\omega_i\}) = p_i$, alors nécessairement

$$P(\varnothing) = 0 \text{ et pour } A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \neq \varnothing,\ P(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} \quad (*).$$

Réciproquement, soit P définie par $(*)$. Montrons que P convient.

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \geqslant 0$.
- $P(\Omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
- Pour tout A, $0 \leqslant P(A) = \displaystyle\sum_{\omega \in A} p_\omega \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ et donc P est effectivement une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$.
- Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$. Si $B = \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) = P(A) + 0 = P(A) + P(B)$ et on a de même l'égalité si $A = \varnothing$.
Si $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$, posons $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, $B = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_l}\}$ où les ω_{i_u} sont deux à deux distincts, les ω_{j_v} sont deux à deux distincts et $\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \cap \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_l}\} = \varnothing$.

$$P(A \cup B) = P(\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}, \omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_l}\}) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} + p_{j_1} + \ldots + p_{j_l} = P(A) + P(B).$$

Finalement, P est une probabilité sur Ω qui convient.

❏

Exercice 1. On lance un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6. Ce dé est pipé. Le 1 a une chance sur 2 d'être obtenu et les 5 autres numéros ont tous la même probabilité d'être obtenus. Calculer la probabilité d'obtenir un numéro impair.

Solution 1. Notons p_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, la probabilité d'obtenir le numéro i après un lancer. $p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$. Puisque $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, on a $\dfrac{1}{2} + 5p_2 = 1$ et donc $p_2 = \dfrac{1}{10} = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$. La probabilité demandée est alors

$$p_1 + p_3 + p_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

2.4 Probabilité uniforme

C'est le cas où les événements élémentaires sont équiprobables :

Définition 11. Soit Ω un univers fini non vide associé à une certaine expérience aléatoire. On pose $\text{card}(\Omega) = n$.

La **probabilité uniforme** sur Ω est la probabilité P définie par les égalités : $\forall \omega \in \Omega$, $p_\omega = \dfrac{1}{n}$.

Théorème 8. Soit Ω un univers fini non vide associé à une certaine expérience aléatoire. Soit P la probabilité uniforme sur Ω. Alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Démonstration . On pose $n = \text{card}(\Omega) \in \mathbb{N}^*$. Soit A un événement. Si $A = \varnothing$, $P(A) = 0 = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ et si $A \neq \varnothing$, en posant $k = \text{card}(A)$,

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

❏

Quand on est en présence d'une probabilité uniforme, calculer des probabilités se ramène à des dénombrements. La formule $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ se réénonce traditionnellement sous la forme

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

les cas favorables étant les issues pour lesquelles l'événement A se réalise.

On rappelle qu'il y a trois situations type de dénombrements qui sont analysées une bonne fois pour toutes en cours :

- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$ (la deuxième égalité si $p \geqslant 1$).

  Ce nombre est le nombre de tirages simultanés de p objets parmi n, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, le nombre de façons de prendre p objets en vrac dans n objets, ...

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\ldots(n-p+1)$ (la deuxième égalité si $p \geqslant 1$).

  Ce nombre est le nombre de tirages successifs sans remise de p objets dans n objets, le nombre de suites ordonnées sans répétition possible de p objets issus de n objets, le nombre d'arrangements p à p d'un ensemble à n éléments...

- n^p.

  Ce nombre est le nombre de tirages successifs avec remise de p objets parmi n, le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments, le nombre de suites ordonnées avec répétitions possibles de p objets pris parmi n, ...

Ces trois situations sont examinées dans les exercices qui suivent, issues de la vie courante.

Exercice 2. (le loto)

Sur une grille sur laquelle sont écrits les numéros de 1 à 49, on coche 6 de ces numéros.

Dans une grosse boule transparente et creuse sont placées 49 boules numérotées de 1 à 49. Le jour du tirage du loto, 6 boules sont extraites au hasard de l'urne. On gagne si on a coché les 6 numéros extraits.

Quelle est la probabilité de gagner au loto ?

Solution 2. Dans la pratique, les boules sont extraites l'une après l'autre. Une fois, le tirage effectué l'ordre d'apparition des numéros n'a pas d'importance. On choisit donc pour univers Ω l'ensemble des tirages simultanés de 6 boules parmi 49.

$$\text{card}(\Omega) = \binom{49}{6} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 49 \times 47 \times 46 \times 3 \times 44 = 13\ 983\ 816.$$

On a tiré les 6 boules au hasard. On est dans la situation où les événements élémentaires sont équiprobables. Soit A l'événement : « on gagne ». Il existe un et un seul tirage pour lequel l'événement A est réalisé (quand les 6 numéros que l'on a coché sortent) ou encore $\text{card}(A) = 1$. La probabilité de gagner au loto est

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{13\ 983\ 816} = 7,1\ldots \times 10^{-8}.$$

Remarques. On a l'habitude d'entendre : « je ne joue pas 1 2 3 4 5 6 car il y a vraiment très peu de chances que ça sorte ». On doit noter qu'il n'y a pas plus ou moins de chances que sortent les numéros 3 12 13 27 31 et 42. On a aussi l'habitude d'entendre : « je ne joue pas 4 7 8 12 25 32 car c'est déjà sorti il y a deux ans ». On doit noter que la probabilité que les numéros 4 7 8 12 25 32 sortent est une bonne fois pour toutes $\frac{1}{13\ 983\ 816}$ et que cette probabilité ne dépend absolument pas des résultats des tirages antérieurs.

Exercice 3. (les cartes)

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On distribue 5 cartes de ce jeu à un joueur (un ensemble de 5 cartes ainsi obtenu s'appelle une main de 5 cartes). Calculer la probabilité des événements suivants :

1) A : « Le joueur ne reçoit que des cœurs ».
2) B : « Le joueur reçoit exactement 3 rois et 2 dames ».
3) C : « Le joueur reçoit exactement 2 as ».
4) D : « Le joueur reçoit au moins 4 piques ».
5) E : « Le joueur reçoit exactement 2 rois et 2 piques ».

Solution 3. L'ordre dans lequel le joueur reçoit ses cartes n'a pas d'importance. On choisit donc pour univers Ω l'ensemble des tirages simultanés de 5 cartes parmi 32.

$$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 4 \times 31 \times 2 \times 29 \times 28 = 201\ 376.$$

Il y a donc 201 376 mains de 5 cartes possibles quand le jeu a 32 cartes.

1) Le nombre de tirages simultanés de 5 cartes prises parmi 8 cœurs est $\binom{8}{5}$ ou encore

$$\mathrm{card}(A) = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56.$$

La probabilité demandée est $P(A) = \dfrac{56}{201\ 376} = \dfrac{1}{3\ 596} = 2,7\ldots \times 10^{-4}$.

2) Le nombre de tirages de 3 cartes parmi les 4 rois est $\binom{4}{3} = 4$. Pour chacun de ces tirages, il y a $\binom{4}{2} = 6$ tirages de 2 cartes parmi les 4 dames. Il y a donc $\binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24$ mains de 5 cartes contenant exactement 3 rois et 2 dames. La probabilité demandée est

$$P(B) = \frac{\binom{4}{3} \times \binom{4}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{24}{201\ 376} = \frac{3}{25\ 172} = 1,1\ldots \times 10^{-4}.$$

3) On sépare le paquet de 32 cartes en 2 paquets, un paquet de 4 as et un paquet de 28 cartes qui ne sont pas des as. On prend 2 cartes parmi les 4 as, ce qui donne $\binom{4}{2} = 6$ possibilités. Pour chacune de ces possibilités, On a $\binom{28}{3}$ choix de 3 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des as. Au total,

$$\mathrm{card}(C) = \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 6 \times \frac{28 \times 27 \times 26}{3 \times 2} = 28 \times 27 \times 26 = 19\ 656.$$

La probabilité demandée est

$$P(C) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{19\ 656}{201\ 376} = \frac{351}{3596} = 9,7\ldots \times 10^{-2}.$$

4) L'événement D est la réunion disjointe des événements « obtenir exactement 4 piques » et « obtenir excatement 5 piques ». Donc,

$$\mathrm{card}(D) = \binom{8}{4} \times \binom{24}{1} + \binom{8}{5} \times \binom{24}{0} = 70 \times 24 + 56 = 1736,$$

puis

$$P(D) = \frac{1736}{201\ 376} = \frac{1}{116} = 8,6\ldots \times 10^{-3}.$$

5) Il faut prendre garde au roi de pique et compter séparément les mains contenant 2 rois et 2 piques mais pas le roi de pique et les mains contenant 2 rois et 2 piques dont le roi de pique. On note que le nombre de cartes qui sont un roi ou un pique est $4 + 8 - 1 = 11$ et donc le nombre de cartes qui ne sont ni des rois, ni des piques est $32 - 11 = 21$.

Le nombre de mains contenant 2 rois et 2 piques mais pas le roi de pique est $\binom{3}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1}$.

Le nombre de mains contenant 2 rois et 2 piques dont le roi de pique est $\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{2}$ puis

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(E) &= \binom{3}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1} + \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{2} \\ &= 3 \times 21 \times 21 + 3 \times 7 \times 210 = 5\ 733\end{aligned}$$

puis

$$P(E) = \frac{5\ 733}{201\ 376} = 2,8\ldots \times 10^{-2}$$

Exercice 4. (le poker)

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On distribue 5 cartes à un joueur. L'ordre des cartes est As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7 soit un total de 8 *hauteurs*. Il y a quatre *couleurs* : $\diamondsuit$ (carreau), $\heartsuit$ (cœur), $\spadesuit$ (pique) et $\clubsuit$ (trèfle). Calculer la probabilité des événements suivant

1) Obtenir une quinte floche (5 cartes consécutives dans une même couleur).

2) Obtenir un carré (4 cartes d'une même hauteur et une autre carte).

3) Obtenir une couleur (5 cartes d'une même couleur, ne constituant pas une quinte floche).

4) Obtenir un full (3 cartes d'une même hauteur et deux d'une même autre hauteur).

5) Obtenir une suite (5 cartes consécutives ne constituant pas une quinte floche).

6) Obtenir un brelan (3 cartes d'une même hauteur et deux autres ne constituant pas un full).

7) Obtenir une double paire (2 cartes d'une même hauteur, deux autres d'une même hauteur et une cinquième carte, ne constituant pas un carré ou un full).

8) Obtenir une paire (2 cartes d'une même hauteur et rien de mieux).

9) Ne rien obtenir.

Solution 4.
Le nombre de mains (ou encore le cardinal de Ω) est le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Il y en a

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 8 \times 31 \times 29 \times 28 = 201\ 376.$$

Avec un jeu de trente-deux cartes, il y a $201\ 376$ mains de cinq cartes.

1) Il y a quatre couleurs (carreau, cœur, pique trèfle) et quatre hauteurs possibles (à l'as, au roi, à la dame et au valet) pour une quinte floche. Au total, il y a $4 \times 4 = 16$ quintes floches (dont quatre royales). Donc la probabilité d'obtenir une quinte floche est

$$p_1 = \frac{16}{201\ 376} = \frac{1}{12\ 586} = 0,000\ 079\ldots$$

2) Chaque carré d'as peut être accompagné d'une carte choisie parmi les 28 qui ne sont pas des as. Il y a donc 28 jeux contenant un carré d'as. Comme il y a 8 hauteurs de carré possibles, il y a $28 \times 8 = 224$ mains contenant un carré. La probabilité d'avoir un carré est donc

$$p_2 = \frac{224}{201\ 376} = \frac{1}{899} = 0,001\ 1\ldots$$

3) Il y a 4 couleurs (carreau, cœur, pique ou trèfle). Le nombre de mains contenant 5 carreaux est le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble à 8 éléments. Il y en a

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56,$$

et donc au total, $4 \times 56 = 224$ mains contenant 5 cartes de couleurs identiques. On doit enlever à ces mains les quintes floches au nombre de 16 (qui sont à ranger dans la catégorie des quintes floches et pas la catégorie des couleurs). Il reste $224 - 16 = 208$ couleurs. La probabilité d'avoir une couleur est donc

$$p_3 = \frac{208}{201\ 376} = \frac{13}{12\ 586} = 0,001\ 03\ldots$$

4) Comptons le nombre de mains contenant un full aux as par les rois (brelan d'as et paire de roi). Il y a 4 brelans d'as et $\binom{4}{2} = 6$ paires de rois. Il y a donc $4 \times 6 = 24$ mains contenant un full aux as par les rois. Maintenant, il y a 8 hauteurs possibles pour le brelan et pour chacune de ces hauteurs, il y a 7 hauteurs pour la paire soit au total $8 \times 7 = 56$ hauteurs pour le full. Il y a donc $24 \times 56 = 1344$ mains contenant un full. La probabilité d'avoir un full est donc

$$p_4 = \frac{1\ 344}{201\ 376} = \frac{6}{899} = 0,006\ 6\ldots$$

5) Comptons le nombre de suites à l'as. Il y a 4 as, 4 rois, 4 dames, 4 valets et 4 dix et donc 4^5 mains contenant la séquence As, roi, dame, valet, dix. Une suite peut commencer à l'as, au roi, à la dame ou au valet et donc il y a $4 \times 4^5 = 4^6$

mains contenant 5 cartes qui se suivent. On doit retirer de ces mains celles qui fournissent une quinte floche et il reste $4^6 - 16 = 4080$ mains contenant une suite. La probabilité d'avoir une suite est donc

$$p_5 = \frac{4\ 080}{201\ 376} = \frac{255}{12\ 856} = 0,019\ldots$$

6) Il y a 8 hauteurs possibles du brelan et pour chaque hauteur $\binom{4}{3} = 4$ brelans possibles. Donc, $8 \times 4 = 32$ brelans possibles. On a 28 possibilités de compléter ce brelan par une quatrième carte puis 24 possibilités de compléter par une cinquième carte. L'ordre dans lequel on a reçu les deux dernières cartes n'a pas d'importance et donc il y a $32 \times \frac{28 \times 24}{2} = 10\ 752$ mains contenant un brelan. La probabilité d'avoir un brelan est donc

$$p_6 = \frac{10\ 752}{201\ 376} = \frac{48}{899} = 0,053\ldots$$

7) Il y a $\binom{8}{2} = 28$ hauteurs possibles des deux paires et pour chaque hauteur $\binom{4}{2} = 6$ paires possibles. Donc, $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 28 \times 6 \times 6 = 1\ 008$ doubles paires possibles. On a ensuite 24 possibilités de compléter ces deux paires par une cinquième carte. Il y a $1\ 008 \times 24 = 24\ 192$ mains contenant deux paires. La probabilité d'avoir deux paires est donc

$$p_7 = \frac{24\ 192}{201\ 376} = \frac{108}{899} = 0,12\ldots$$

8) Il y a $8 \times \binom{4}{2} = 48$ paires. On complète par une 3ème, 4ème et 5ème carte soit $28 \times 24 \times 20$ possibilités. L'ordre dans lequel on reçoit ces cartes n'a pas d'importance et il y a donc $48 \times \frac{28 \times 24 \times 20}{3 \times 2} = 107\ 520$ mains contenant une paire. La probabilité d'avoir une paire est donc

$$p_8 = \frac{107\ 520}{201\ 376} = 0,53\ldots$$

9) La probabilité d'obtenir une annonce est

$$\frac{107\ 520}{201\ 376} + \frac{24\ 192}{201\ 376} + \frac{10\ 752}{201\ 376} + \frac{4\ 080}{201\ 376} + \frac{1\ 344}{201\ 376} + \frac{208}{201\ 376} + \frac{224}{201\ 376} + \frac{16}{201\ 376} = \frac{148\ 336}{201\ 376}$$

et donc la probabilité de ne rien obtenir est

$$p_9 = 1 - \frac{148\ 336}{201\ 376} = \frac{53\ 040}{201\ 376} = 0,26\ldots$$

soit un peu plus d'une chance sur quatre.

Exercice 5. (le tiercé)

Une course de chevaux a 18 partants numérotés de 1 à 18. Tous les chevaux terminent la course et il n'y a pas d'exæquo. Avant la course, un joueur coche au hasard sur une grille 3 chevaux dans leur ordre d'arrivée. Calculer la probabilité que le joueur gagne.

Solution 5. Une arrivée de trois chevaux dans l'ordre est encore un arrangement 3 à 3 d'un ensemble à 18 éléments ou aussi une suite ordonnée sans répétition à 3 éléments d'un ensemble à 18 éléments. Donc,

$$\text{Card}(\Omega) = A_{18}^3 = 18 \times 17 \times 16 = 4\ 896.$$

Parmi ces 4 896 arrivées possibles, une et une seule est favorable au joueur. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{1}{4\ 896} = 0,2\ldots \times 10^{-3}.$$

Exercice 6. (le loto foot)

Une grille de loto foot est constituée de 14 lignes correspondant à 14 matches de football. Chaque ligne est constituée du nom du match et de trois cases : 1 N et 2, 1 correspondant à la victoire de la première équipe citée, 2 correspondant à la victoire de la deuxième équipe citée et N correspondant à un match nul entre les deux équipes.

Un joueur coche au hasard une et une seule des cases dans chaque ligne (avant que les matches aient lieu). Le joueur gagne si et seulement si il a fait à chaque ligne le bon choix. Calculer la probabilité que le joueur gagne.

Solution 6. Une grille est une suite ordonnée avec répétition possible des 3 éléments de l'ensemble $\{1\ \mathrm{N}\ 2\}$ ou aussi un 14-uplet d'éléments de l'ensemble $\{1, \mathrm{N}, 2\}$. Il y a

$$3 \times \ldots \times 3 = 3^{14} = 4\,782\,969$$

grilles possibles. Une grille et une seule est favorable au joueur. Donc, la probabilité demandée est

$$p = \frac{1}{4\,782\,969} = 0,2\ldots \times 10^{-6}.$$

---

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition des probabilités conditionnelles

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$. On suppose savoir que l'événement A est réalisé. On change donc d'univers. L'ensemble des issues possibles est A.

On veut alors évaluer la probabilité qu'un événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ soit réalisé. Puisque l'on sait que A est réalisé, B est réalisé si et seulement si $A \cap B$ est réalisé.

Supposons de plus que P soit la probabilité uniforme sur Ω. Pour tout événement B élément de $P(\Omega)$, l'événement $B \cap A$ est un élément de $\mathcal{P}(A)$ et la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé est :

$$\frac{\mathrm{card}(A \cap B)}{\mathrm{card}(A)} = \frac{\dfrac{\mathrm{card}(A \cap B)}{\mathrm{card}(\Omega)}}{\dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On pose donc la définition suivante :

DÉFINITION 12. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement B, la **probabilité de** B **sachant** A, notée $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$ ou $P_{/A}(B)$ ...), est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

3.2 Propriétés des probabilités conditionnelles

Théorème 9. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

P_A est une probabilité sur Ω.

DÉMONSTRATION . Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

• Pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \cap B \subset A$ et donc $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(A)$. Puisque $P(A) > 0$, après division des trois membres de l'encadrement par $P(A)$, on obtient

$$0 \leqslant P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leqslant 1.$$

Donc, P_A est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$.

• $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1.$

• Soient B et C deux événements incompatibles. Alors, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset B \cap C = \varnothing$ et donc par additivité de P,

$$P_A(B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C).$$

P_A est donc une probabilité sur Ω.

❑

Une probabilité conditionnelle vérifie donc toutes les règles de calcul usuelles : $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$, $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C) \ldots$

3.3 La formule des probabilités composées

Puisque $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on a aussi :

Théorème 10. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Convention. Le programme officiel prévoit que si $P(A) = 0$, conventionnellement $P_A(B) \times P(A) = 0$ (bien que $P_A(B)$ n'ait aucun sens).

Plus généralement,

Théorème 11. (formule des probabilités composées)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $n \geqslant 2$ puis $A_1, \ldots, A_n$ n événements tels que $P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$.

$$P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}\left(A_n\right) \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}}\left(A_{n-1}\right) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2}\left(A_3\right) \times P_{A_1}\left(A_2\right) \times P\left(A_1\right).$$

Démonstration . Puisque pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}$, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ on a $P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}\right) \geqslant P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) > 0$ et donc, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}}\left(A_k\right)$ est défini puis

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n} P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}}\left(A_k\right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap A_k\right)}{P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}\right)} \\ &= \frac{P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right)}{P\left(A_1\right)} \text{ (produit télescopique)}\end{aligned}$$

et donc $P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right) \displaystyle\prod_{k=2}^{n} P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}}\left(A_k\right)$.

❑

On note que la convention du programme officiel permet de s'affranchir de l'hypothèse $P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$.

3.4 La formule des probabilités totales

Théorème 12. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A un événement tel que $0 < P\left(A\right) < 1$. Pour tout événement B,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

Démonstration . $B = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$ avec $(B \cap A) \cap \left(B \cap \overline{A}\right) = \varnothing$. Donc, $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$. De plus, $P(A) \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \neq 0$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B).$$

❑

Plus généralement, par le même raisonnement,

Théorème 13. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $n \geqslant 2$ puis $\left(A_1, \ldots, A_n\right)$ un système complet d'événements tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P\left(A_k\right) \neq 0$. Pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \times P_{A_k}(B).$$

Exercice 7. (d'après CCP 2017 MP Mathématiques 2)

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

• si au temps n, la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$, elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$

• si au temps n, la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

On note A_n l'événement « au temps n, la particule est à l'état 1 » et T_n l'événement « la première fois que la particule est à l'état 1 est le temps n ».

On note p_n la probabilité de l'événement A_n et on suppose que $p_0 = \frac{1}{2}$.

1) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n en fonction de n.

2) Calculer $P(T_0)$ et $P(T_1)$ puis $P(T_n)$ pour $n \geqslant 2$.

Solution 7.

1) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
&= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n}\right) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
&= p_n \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Pour x réel, $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

et donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{4^n}\left(p_0 - \frac{1}{3}\right)$ puis $p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^n}$.

2) $P(T_0) = P(A_0) = \frac{1}{2}$ puis $P(T_1) = P\left(\overline{A_0} \cap A_1\right) = P\left(\overline{A_0}\right) \times P_{\overline{A_0}}(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Ensuite, pour $n \geqslant 2$, d'après la formule des probabilités composées et puisque l'état de la particule à un moment donné ne dépend que de son état au moment précédent,

$$\begin{aligned}
P(T_n) &= P\left(\overline{A_0} \cap \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right) = P\left(\overline{A_0} \cap \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}\right) \times P_{\overline{A_0} \cap \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}}(A_n) \\
&= P\left(\overline{A_0}\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} P_{\overline{A_0} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}}\left(\overline{A_k}\right)\right) \times P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = P\left(\overline{A_0}\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} P_{\overline{A_{k-1}}}\left(\overline{A_k}\right)\right) \times P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{8} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$ (mais pas quand $n = 0$).

$$P(T_0) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ P(T_n) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

3.5 La formule de Bayes

Théorème 14. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements tesl que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}.$$

Si de plus $P\left(\overline{A}\right) \neq 0$,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)}.$$

Démonstration. Puisque $P(A) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$. Si de plus $P\left(\overline{A}\right) \neq 0$, alors d'après la formule des probabilités totales,

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)}.$$

❑

Plus généralement,

Théorème 15. (formule de Bayes).

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements et B un événement tels que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

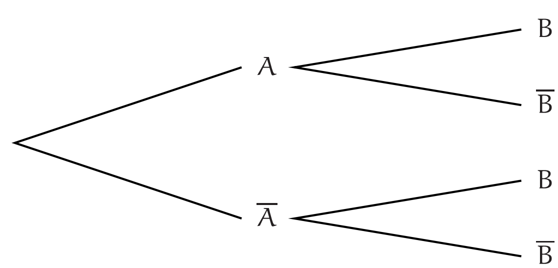
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P_B(A_k) = \frac{P(A_k) \times P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)}.$$

Démonstration. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P_B(A_k) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \times P_{A_k}(B)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}.$$

❑

La formule de Bayes est une formule qui « remonte le temps ». Les événements A et B sont pensés comme se réalisant dans un certain ordre chronologique : A d'abord et B ensuite ou encore la **cause** d'abord et l'**effet** ensuite. La formule de Bayes inverse cet ordre et donne la probabilité de A sachant B ou encore donne la **probabilité de la cause sachant l'effet**. Pour cette raison la formule de Bayes est aussi appelée « formule de probabilité des causes ».



Dans la vie courante, un exemple type est l'utilisation d'un test de dépistage d'une certaine maladie. Dans une population donnée, un individu peut être atteint d'une certaine maladie (événement M) ou pas. On fait un test de dépistage sur un individu et le test peut être positif (événement T) ou pas.
On suppose que 10% de la population est constituée de personne malades (ou encore $P(M) = 0,1$), que 93% des personnes malades ont un test positif (ou encore $P_M(T) = 0,93$) et que 97% des personnes non malades ont un test négatif (ou encore $P_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right) = 0,97$ ou aussi $P_{\overline{M}}(T) = 0,03$).
Ici, la cause est le fait d'être malade ou pas et l'effet est d'avoir un test positif ou pas. On veut maintenant la probabilité d'être malade sachant que l'on a un test positif ou encore on veut $P_T(M)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(M) \times P_M(T) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T)} = \frac{0,1 \times 0,93}{0,1 \times 0,93 + 0,9 \times 0,03} = 0,775.$$

Exercice 8. (exercice 106 de la banque d'oraux des CCP).

1) Enoncer et démontrer la formule de Bayes.

2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

(a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

(c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Solution 8.
1) Formule de Bayes.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $P(B) \neq 0$ et $P(A_i) \neq 0$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Puisque $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(A_j) \neq 0$, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B).$$

Donc,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

2) (a) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements. On a $P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 0$. Ensuite $P_A(B) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\frac{1}{2}$.

(b) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements. On a toujours $P(A) = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6^n}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé.

---

4 Indépendance

4.1 Couple d'événements indépendants

Définition 13. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements.

Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

On a immédiatement

Théorème 16. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Le théorème 16 éclaire la définition de l'indépendance. Quand A et B sont indépendants (et A a une probabilité non nulle), savoir A n'a aucune incidence sur la probabilité de B.

Il faut prendre garde de ne pas confondre la notion d'incompatibilité de deux événements et la notion d'indépendance de deux événements. Déjà, la notion d'incompatibilité est une notion ensembliste (A et B incompatibles si et seulement si $A \cap B = \varnothing$). Cette notion est définie sans qu'intervienne des probabilités alors que la définition de l'indépendance fait référence à une probabilité.
Les quatre situations sont possibles : incompatibles et indépendants, incompatibles et non indépendants, non incompatibles et indépendants, non incompatibles et non indépendants. Par exemple, si A et B sont incompatibles et tous deux de probabilité non nulle, alors $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$, et donc A et B ne sont pas indépendants.

Théorème 17. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements.

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration . Supposons les événements A et B indépendants. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$$

et donc

$$P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P\left(\overline{A}\right).$$

Donc, $\overline{A}$ et B sont indépendants. En appliquant ce résultat aux événements B et A, ou aux événements A et $\overline{B}$, on obtient le fait que A et $\overline{B}$ sont indépendants et le fait que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

❏

Exercice 9. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A, B_1, ..., B_n, des événements tels que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A et B_k sont indépendants et de plus, les événements B_1, ..., B_n, sont deux à deux incompatibles.

Montrer que les événements A et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ sont indépendants.

Solution 9.

$$\begin{aligned}
P\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) \text{ (car pour } i \neq j,\ (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) \subset B_i \cap B_j = \varnothing) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A) \times P(B_k) = P(A) \times \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\
&= P(A) \times P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right).
\end{aligned}$$

Donc, A et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ sont des événements indépendants.

4.2 Famille d'événements indépendants

Définition 14. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $n \geqslant 2$ puis A_1, ..., A_n, n événements.

1) A_1, ..., A_n sont **deux à deux indépendants** si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$.

2) A_1, ..., A_n sont **mutuellement indépendants** (ou plus simplement **indépendants**) si et seulement si pour tout partie non vide I de $[\![1, n]\!]$, on a $\displaystyle P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Il est clair que :

Théorème 18. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient $n \geqslant 2$ puis A_1, ..., A_n, n événements.

Si A_1, ..., A_n sont indépendants, alors A_1, ..., A_n sont deux à deux indépendants.

On prendra garde au fait que la réciproque de ce résultat est fausse. Pour s'en convaincre, construisons un exemple de trois événements deux à deux indépendants mais non indépendants : si A, B et C sont trois événements,

$$\begin{aligned}
A,\ B \text{ et } C \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ et } P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \text{ et } P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \\
\text{et } P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C).
\end{aligned}$$

Considérons un univers à quatre éléments $\Omega = \{a, b, c, d\}$ muni de la probabilité uniforme notée P. Soient $A = \{b, c\}$, $B = \{a, c\}$ et $C = \{a, b\}$.

- $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$.
- $P(A \cap B) = P(\{c\}) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(A) \times P(B)$ et de même $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ et $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$. Donc, les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
- $P(A \cap B \cap C) = P(\varnothing) = 0 \neq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(A) \times P(B) \times P(C)$. Donc, A, B et C ne sont pas indépendants.