Planche n° 35. Déterminants. Corrigé

Exercice n° 1 :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Notons Δ le déterminant de l'énoncé. Pour x réel, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$ (de sorte que $\Delta = D(a)$). D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de x^2 vaut

$$-(-2c) + (b+c) + (b+c) - (-2b) = 4(b+c).$$

Puis,

$$D(-b) = \begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = 2b(4bc - (b+c)^2) + 2b(c-b)^2 = 0,$$

et par symétrie des roles $D(-c) = 0$. De ce qui précède, on déduit que si $b \neq c$, $D(x) = 4(b+c)(x+b)(x+c)$ (même si $b + c = 0$ car alors D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul).

Ainsi, si $b \neq c$ (ou par symétrie des roles, si $a \neq b$ ou $a \neq c$), on a : $\Delta = 4(b+c)(a+b)(a+c)$. Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où $a = b = c$. Dans ce cas,

$$D(a) = \begin{vmatrix} -2a & 2a & 2a \\ 2a & -2a & 2a \\ 2a & 2a & -2a \end{vmatrix} = 8a^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3 = 4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour a et b fixés, la fonction Δ est une fonction continue de c et on obtient la valeur de Δ pour $c = b$ en faisant tendre c vers b dans l'expression de Δ déjà connue pour $c \neq b$).

Exercice n° 2 :

Soit $P = \begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$. P est un polynôme unitaire de degré 4.

En remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ et par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que P est divisible par $(X + a + b + c)$. Mais aussi, en remplaçant C_1 par $C_1 - C_2 - C_3 + C_4$ ou $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ ou $C_1 + C_2 - C_3 - C_4$, on voit que P est divisible par $(X - a - b + c)$ ou $(X - a + b - c)$ ou $(X + a - b - c)$.

Si les quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont deux à deux distincts, P est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, $P = (X + a + b + c)(X + a + b - c)(X + a - b + c)(X - a + b + c)$.
Notons alors que $-a - b - c = a + b - c \Leftrightarrow b = -a$ et que $-a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow a = b$. Par symétrie des rôles, deux des quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont égaux si et seulement si deux des trois nombres a, b ou c sont égaux en valeur absolue ce qui n'est pas le cas.

Exercice n° 3 :

1) Pour $n \geqslant 2$, posons $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1.

On effectue dans cet ordre les transformations $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ puis $C_{n-2} \leftarrow C_{n-2} - C_{n-1}$ puis ... puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & & \vdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Puis, on fait apparaître un déterminant triangulaire en constatant que $\det(L_1, L_2, ..., L_n) = \det(L_1, L_2 + L_1, ..., L_{n-1} + L_1, L_n + L_1)$, ce qui fournit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 0 & -2 & \times & & \times \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

.

2) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sin(a_i + a_j) = \sin a_i \cos a_j + \cos a_i \sin a_j$ et donc si on pose $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \cos a_2 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \sin a_2 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$,

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j = \cos a_j S + \sin a_j C.$$

En particulier, $\mathrm{Vect}(C_1, ..., C_n) \subset \mathrm{Vect}(C, S)$ et le rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\forall n \geqslant 3,\ \det\left(\sin\left(a_i + a_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 0.$$

Si $n = 2$, $\det\left(\sin\left(a_i + a_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} = \sin\left(2a_1\right)\sin\left(2a_2\right) - \sin^2\left(a_1 + a_2\right)$.

3) L'exercice n'a de sens que si le format n est pair. Posons $n = 2p$ où p est un entier naturel non nul.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{ (pour } 1 \leqslant j \leqslant p,\ C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j})$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{ (par linéarité par rapport aux colonnes } C_1,\ C_2, ...,\ C_p)$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \text{ (pour } p+1 \leqslant i \leqslant 2p,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}).$$

et $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2 - b^2)^p$ (déterminant triangulaire).

4) On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

5) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$\begin{aligned} L_{i+1}-L_i &= \left(\binom{n+i}{0}-\binom{n+i-1}{0}, \binom{n+i}{1}-\binom{n+i-1}{1}, \ldots, \binom{n+i}{p}-\binom{n+i-1}{p}\right) \\ &= \left(0, \binom{n+i-1}{0}, \binom{n+i-1}{1}, \ldots, \binom{n+i-1}{p-1}\right). \end{aligned}$$

On effectue alors dans cet ordre les transformations $L_p \leftarrow L_p - L_{p-1}$ puis $L_{p-1} \leftarrow L_{p-1} - L_{p-2}$ puis ... puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det\left(A_p\right) = \begin{vmatrix} 1 & \times \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = \ldots = \det(A_2) = 1$.

6) En développant suivant la dernière colonne, on obtient :

$$D_n = (X + a_{n-1})\, X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

où $\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} X & 0 & 0 & & & \\ \times & \ddots & 0 & & \times & \\ \times & \times & X & & & \\ \hline 0 & \ldots & 0 & -1 & \times & \times \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right| = (-1)^{n-1-k} X^k$ et donc

$$D_n = (X + a_{n-1})\, X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k (-1)^{n-1-k} X^k = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Exercice n° 4 :

Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts.

Soient $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$.

$$\det\left(A_n\right) = \frac{1}{\lambda_n} \det\left(C_1, \ldots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j\right) = \frac{1}{\lambda_n} \det\left(B_n\right),$$

où la dernière colonne de B_n est de la forme $\left(R\left(a_i\right)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $R = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X + b_j}$.

On prend $R = \dfrac{(X - a_1)\ldots(X - a_{n-1})}{(X + b_1)\ldots(X + b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ a_i \neq -b_j$). Les pôles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée.

Pour ce choix de R, puisque $R(a_1) = \ldots = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\det\left(A_n\right) = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n) \det\left(A_{n-1}\right),$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z \to -b_n} (z + b_n) R(z) = \frac{(-b_n - a_1)\ldots(-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1)\ldots(-b_n + b_{n-1})} = \frac{(a_1 + b_n)\ldots(a_{n-1} + b_n)}{(b_n - b_1)\ldots(b_n - b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n \geqslant 2,\ \det\left(A_n\right) = \frac{\left(a_n - a_1\right)\ldots\left(a_n - a_{n-1}\right)\left(b_n - b_1\right)\ldots\left(b_n - b_{n-1}\right)}{\left(a_n + b_1\right)\left(a_n + b_2\right)\ldots\left(a_n + b_n\right)..\left(a_2 + b_n\right)\left(a_1 + b_n\right)} \det\left(A_{n-1}\right).$$

En réitérant et compte tenu de $\det\left(A_1\right) = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$, on obtient

$$\det(A_n) = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1,\ldots,a_n)\times\mathrm{Van}(b_1,\ldots,b_n)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}.$$

Dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de HILBERT) à calculer :

$$H_n = \frac{\mathrm{Van}(1,2,\ldots,n)^2}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)}.$$

Mais,

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}k!}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2},$$

et d'autre part,

$$\mathrm{Van}(1,2,\ldots,n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k!.$$

Donc, $\forall n \geqslant 1$, $H_n = \dfrac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k!\right)^4}{n!^2\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}k!}$.

Exercice n° 5 :

On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$.

- Pour $n = 1$, c'est clair.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout déterminant Δ_n de format n et du type de l'énoncé soit un entier divisible par 2^{n-1}.

Soit Δ_{n+1} un déterminant de format $n+1$, du type de l'énoncé.
Si tous les coefficients $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} sont égaux à 1, puisque $n+1 \geqslant 2$, Δ_{n+1} a deux colonnes égales et est donc nul.
Dans ce cas, Δ_{n+1} est bien divisible par 2^n.
Sinon, on va changer petit à petit tous les -1 en 1.
Soit (i, j) un couple d'indices tel que $a_{i,j} = -1$ et Δ'_{n+1} le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de Δ_{n+1} sauf le coefficient ligne i et colonne j qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n) - \det(C_1,\ldots,C'_j,\ldots,C_n) = \det(C_1,\ldots,C_j - C'_j,\ldots,C_n),$$

où $C_j - C'_j = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ -2\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (-2 en ligne i). En développant ce dernier déterminant suivant sa j-ème colonne, on obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

où Δ_n est un déterminant de format n et du type de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence, Δ_n est divisible par 2^{n-1} et donc $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$ est divisible par 2^n. Ainsi, en changeant les -1 en 1 les uns après les autres, on obtient $\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \ldots & 1\end{vmatrix}$, (mod 2^n). Ce dernier déterminant étant nul, Δ_{n+1} est un entier divisible par 2^n.

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice n° 6 :

En remplaçant les colonnes C_1,..., C_n par respectivement $C_1 + iC_{n+1}$,..., $C_n + iC_{2n}$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{pmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes L_{n+1},..., L_{2n} de la nouvelle matrice par respectivement $L_{n+1} - iL_1$,..., $L_{2n} - iL_n$, on obtient :

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB) = |\det(A+iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice n° 7 :

1ère solution.

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n} \text{ (car } 1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\ldots+n+\sigma(n) = 2(1+2+\ldots+n) \in 2\mathbb{N}) \\ &= \det A.\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie par -1 les lignes 2, 4, 6... puis les colonnes 2, 4, 6...On obtient $\det B = (-1)^{2p}\det A = \det A$ (où p est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

Exercice n° 8 :

Soit A un élément de $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall B \in M_n(\mathbb{C}),\ \det(A+B) = \det A + \det B$. En particulier, $2\det(A) = \det(2A) = 2^n \det A$ puis $(2^n - 2)\det A = 0$ puis $\det A = 0$ car $n \geqslant 2$ et donc $2^n - 2 \neq 0$. Donc, $A \notin GL_n(\mathbb{C})$.

Si $A \neq 0$, il existe une certaine colonne C_j qui n'est pas nulle. Puisque la colonne $-Cj$ n'est pas nulle, on peut compléter la famille libre $(-C_j)$ en une base $(C_1', \ldots, -C_j, \ldots, C_n')$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice B dont les colonnes sont justement C_1',...,$-C_j$,...,C_n' est alors inversible de sorte que $\det A + \det B = \det B \neq 0$. Mais, $A + B$ a une colonne nulle et donc $\det(A+B) = 0 \neq \det A + \det B$.

Ainsi, seule la matrice nulle peut donc être solution du problème. Réciproquement $A = 0$ est solution.

Exercice n° 9 :

Le coefficient ligne k, colonne l de P^2 vaut :

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k + l - 2 \in n\mathbb{Z}$. Mais, $0 \leqslant k + l - 2 \leqslant 2n - 2 < 2n$ et donc, $k + l - 2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k + l - 2 \in \{0, n\} \Leftrightarrow k + l = 2$ ou $k + l = n + 2$. Dans ce cas, $\alpha_{k,l} = n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1 - \left(\omega^{k+l-2}\right)^n}{1 - \omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1 - \omega^{k+l-2}} = 0.$$

Ainsi, $P^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & & & \iddots & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons ensuite PA. Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A. Le coefficient ligne k, colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k, $a_{n+k} = a_k$.

Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k, colonne l de PA vaut

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1.

$$\begin{aligned}\sum_{v=l-n+1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v + \sum_{v=l-n+1}^{0}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v\\
&= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v + \sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n} \text{ (en posant } w=v+n)\\
&= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v + \sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w)}a_{w}\\
&= \sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v = \omega^{(k-1)(l-1)}\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites a_k et ω_k ont même période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n} = \omega^{(k-1)(l-v)}a_v$).

Posons alors $S_k = \displaystyle\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v$ pour k élément de $[\![1,n]\!]$. On a montré que $PA = (\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.

$\det(PA) = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}S_k\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}S_k\det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\det P$.

Donc $\det P\ \det A = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\det P$. Finalement, puisque $\det P = \text{Van}\left(1\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}\right)\neq 0$ car les ω^k sont deux à deux distincts,

$$\det A = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\right).$$

Par exemple, pour $n=3$, $\det A = (a_1+a_2+a_3)\left(a_1+ja_2+j^2a_3\right)\left(a_1+j^2a_2+ja_3\right)$.

Exercice n° 10 :

On a toujours $A\times {}^t\text{com}A = (\det A)I_n$ et donc

$$(\det A)(\det(\text{com}A)) = (\det A)(\det({}^t\text{com}A)) = \det((\det A)I_n) = (\det A)^n.$$

Si $\det A\neq 0$, on obtient $\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
Si $\det A = 0$, alors $A^t\text{com}A = 0$ et $\text{com}A$ n'est pas inversible car sinon, $A=0$ puis $\text{com}A = 0$ ce qui est absurde.
Donc, $\det(\text{com}A) = 0$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\det(\text{com}A) = (\det A)^{n-1}.$$

Si $\text{rg}A = n$, alors $\text{com}A\in GL_n(\mathbb{K})$ (car $\det(\text{com}A)\neq 0$) et $\text{rg}(\text{com}A) = n$.

Si $\text{rg}A\leqslant n-2$, tous les mineurs (de format $n-1$) sont nuls et donc $\text{com}(A) = 0$. Dans ce cas, $\text{rg}(\text{com}A) = 0$.

Si $\text{rg}A = n-1$, il existe au moins un mineur non nul. Donc, $\text{com}(A)\neq 0$. Par suite, $\text{rg}(\text{com}A)\geqslant 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned}A\times{}^t(\text{com}A) = 0 &\Rightarrow \text{com}A\times{}^tA = 0\Rightarrow \text{Im}\left({}^tA\right)\subset\text{Ker}(\text{com}A)\Rightarrow\dim(\text{Ker}(\text{com}A))\geqslant\text{rg}({}^tA) = \text{rg}A = n-1\\
&\Rightarrow n-\text{rg}(\text{com}A)\geqslant n-1\\
&\Rightarrow \text{rg}(\text{com}A)\leqslant 1,\end{aligned}$$

et finalement si $\text{rg}A = n-1$, $\text{rg}(\text{com}A) = 1$. En résumé, $\text{rg}(\text{com}A) = \begin{cases} n \text{ si } \text{rg}A = n\\ 1 \text{ si } \text{rg}A = n-1\\ 0 \text{ si } \text{rg}A\leqslant n-2\end{cases}$.

Exercice n° 11 :

$\det A = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n}$ et donc la fonction $x\mapsto\det(A(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, en notant C_1, ..., C_n, les colonnes de A,

$$(\det A)' = \left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n}\right)' = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\left(\sum_{k=1}^{n}a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(k),k}...a_{\sigma(n),n}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(k),k}...a_{\sigma(n),n} = \sum_{k=1}^{n}\det(C_1,...,C'_k,...,C_n)$$

Applications.

1) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1\\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1\end{vmatrix}$. Δ_n est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui précède, $\Delta'_n = \sum_{k=1}^{n}\delta_k$ où δ_k est le déterminant déduit de Δ_n en remplaçant sa k-ème colonne par le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En développant δ_k par rapport à sa k-ème colonne, on obtient $\delta_k = \Delta_{n-1}$ et donc $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$.

On a déjà $\Delta_1 = X+1$ puis $\Delta_2 = (X+1)^2 - 1 = X^2 + 2X$ ...

Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$.

C'est vrai pour $n = 1$ puis, si pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$ alors $\Delta'_{n+1} = (n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1}$ et, par intégration, $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n + \Delta_{n+1}(0)$. Mais, puisque $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$ et $\Delta_{n+1}(0)$ est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques. Par suite, $\Delta_{n+1}(0) = 0$ ce qui montre que $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n$.

Le résultat est démontré par récurrence.

2) Soit $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x\\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & x\\ x & \dots & \dots & x & x+a_n\end{vmatrix}$. $\Delta_n = \det(a_1e_1 + xC, ..., a_ne_n + xC)$ où e_k est le k-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et C est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. Par linéarité par rapport à chaque colonne, Δ_n est somme de 2^n déterminants mais dès que C apparait deux fois, le déterminant correspondant est nul. Donc, $\Delta_n = \det(a_1e_1, ..., a_ne_n) + \det(a_1e_1, ..., xC, ..., a_ne_n)$. Ceci montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

La formule de Taylor fournit alors : $\Delta_n = \Delta_n(0) + X\Delta'_n(0)$. Immédiatement, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^{n}a_k = \sigma_n$ puis

$$\Delta'_n(0) = \sum_{k=1}^{n}\det(a_1e_1, ..., C, ..., a_ne_n) = \sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k}a_i = \sigma_{n-1}.$$

Donc, $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$.

Exercice n° 12 :

1) Pour le deuxième déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est $(-1)^{n-1}$. Pour le premier, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met $(n-1)$ en facteurs de la première colonne et on tombe sur le deuxième déterminant. Le premier déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}(n-1)$.

2) Pour (i, j) élément de $[\![1, n]\!]^2$, $(i+j-1)^2 = j^2 + 2(i-1)j + (i-1)^2$. Donc,

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ C_j = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2j(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n} + ((i-1)^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice sont donc éléments de $\text{Vect}\left((1)_{1\leqslant i\leqslant n}, (i-1)_{1\leqslant i\leqslant n}, \left((i-1)^2\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$ qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang inférieur ou égal à 3. Donc, si $n \geqslant 4$, $\Delta_n = 0$. Il reste ensuite à calculer $\Delta_1 = 1$ puis $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4\\ 4 & 9\end{vmatrix} = -7$ puis $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9\\ 4 & 9 & 16\\ 9 & 16 & 25\end{vmatrix} = (225-256) - 4(100-144) + 9(64-81) = -31 + 176 - 153 = -8$.

3)

$$\Delta_n=\det(C_1,...,C_n)=\det(C_1+...+C_n,C_2,...,C_n)=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix}1&b&\dots&\dots&b\\1&a&\ddots&&\vdots\\\vdots&b&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&b\\1&b&\dots&b&a\end{vmatrix},$$

par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros 2,..., n, on retranche la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_n=(a+(n-1)b)\begin{vmatrix}1&b&\dots&\dots&b\\0&a-b&0&\dots&0\\\vdots&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\dots&0&a-b\end{vmatrix}=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

4) Par n linéarité, D_n est somme de 2^n déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il contient au moins deux colonnes de x. Ainsi, en posant $\Delta_n=\det(C_1+xC,...,C_n+xC)$ où $C_k=\begin{pmatrix}b\\\vdots\\b\\a_k\\b\\\vdots\\b\end{pmatrix}$ et $C=(1)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on obtient :

$$\Delta_n=\det(C_1,...,C_n)+\sum_{k=1}^{n}\det\left(C_1,...,C_{k-1},xC,C_{k+1},...,C_n\right),$$

ce qui montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Posons $\Delta_n=AX+B$ et $P=\prod_{k=1}^{n}(a_k-X)$. Quand $x=-b$ ou $x=-c$, le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc :

1er cas. Si $b\neq c$. $\Delta_n(-b)=P(b)$ et $\Delta_n(-c)=P(c)$ fournit le système $\left\{\begin{array}{l}-bA+B=P(b)\\-cA+B=P(c)\end{array}\right.$ et donc $A=-\dfrac{P(c)-P(b)}{c-b}$ et $B=\dfrac{cP(b)-bP(c)}{c-b}$. Ainsi, si $b\neq c$,

$$\Delta_n=-\frac{P(c)-P(b)}{c-b}x+\frac{cP(b)-bP(c)}{c-b}\text{ où }P=\prod_{k=1}^{n}(a_k-X).$$

2ème cas. Si $b=c$, l'expression obtenue en fixant x et b est clairement une fonction continue de c car polynomiale en c. On obtient donc la valeur de Δ_n quand $b=c$ en faisant tendre c vers b dans l'expression déjà connue de Δ_n pour $b\neq c$. Maintenant, quand b tend vers c, $-\dfrac{P(c)-P(b)}{c-b}$ tend vers $-P'(b)$ et

$$\frac{cP(b)-bP(c)}{c-b}=\frac{c(P(b)-P(c))+(c-b)P(c)}{c-b},$$

tend vers $-bP'(b)+P(b)$. Si $b=c$,

$$\Delta_n=-xP'(b)+P(b)-bP'(b)\text{ où }P=\prod_{k=1}^{n}(a_k-X).$$

5) $\Delta_2=3$ et $\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=2\times3-2=4$. Puis, pour $n\geqslant4$, on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n=2\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}.$$

D'où, pour $n \geqslant 4$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ et la suite $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n\geqslant 3}$ est constante. Par suite, pour $n \geqslant 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$ et donc la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour $n \geqslant 2$, $\Delta_n = \Delta_2 + (n-2)\times 1 = n+1$ (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = n+1.$$

Exercice n° 13 :

1) a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Donc, le système proposé à une solution et une seule.

b) $B = AX = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j C_j$.

c) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Par linéarité par rapport à la i-ème colonne,

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \det(C_1,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,C_n) = \det\left(C_1,\ldots,C_{i-1},\sum_{j=1}^{n} x_jC_j, C_{i+1},\ldots,C_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1,\ldots,C_{i-1},C_j,C_{i+1},\ldots,C_n).\end{aligned}$$

Quand $j \neq i$, $\det(C_1,\ldots,C_{i-1},C_j,C_{i+1},\ldots,C_n)$ est un déterminant ayant deux colonnes identiques (la i-ème et la j-ème) et donc ce déterminant est nul. Quand $j = i$, $\det(C_1,\ldots,C_{i-1},C_j,C_{i+1},\ldots,C_n) = \det(C_1,\ldots,C_{i-1},C_i,C_{i+1},\ldots,C_n) = \det(A) = \Delta$. Donc, $\Delta_i = x_i\Delta$ puis, Δ étant non nul,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

2) a) $\det(S) = 2(m(m-5)-6) + (3(m-5)-3) + 7(6-m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6)$. Le système est de Cramer si et seulement si $m \in \{1,6\}$.

• Si $m \notin \{1,6\}$, les formules de Cramer fournissent alors :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{4(m^2-5m-6)-5(3m-18)-7(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1} \\
y &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(5m-39))+(4m-27)+21}{2(m-1)(m-6)} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1} \\
z &= \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{2(7m-15)+9+7(-4m+15)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}
\end{aligned}$$

Si $m \notin \{1,6\}$, $\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{2m-9}{m-1}, \dfrac{7}{m-1}, -\dfrac{7}{m-1}\right)\right\}$.

• Si $m \in \{1,6\}$, $\det(S) = 0$. Le système formé par les deux premières équations s'écrit $\left\{\begin{array}{l} 2x+z = 4-3y \\ -x+2z = 5-my \end{array}\right.$ et équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \dfrac{14-(2m+3)y}{5} \end{array}\right.$.

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent si $m \in \{1,6\}$).

$$7x+3y+(m-5)z=7 \Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5}+3y+(m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5}=7 \Leftrightarrow 21+14(m-5)-35=0$$
$$\Leftrightarrow 14(m-6)=0 \Leftrightarrow m=6.$$

Si $m=1$, le système n'a pas de solution et si $m=6$, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{3}{5},y,-\frac{y}{5}\right),\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

b) $\det(M)=\mathrm{Van}(1,2,...,n)\neq 0$ et le système est de CRAMER. Posons $\Delta=\det M$. Les formules de CRAMER fournissent alors pour $k\in[\![1,n]\!]$, $x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}$ où

$$\Delta_k=\mathrm{Van}(1,...,k-1,0,k+1,...,n)=(-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n\\ 1 & & (k-1)^2 & (k+1)^2 & & n^2\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & & n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

(en développant par rapport à la k-ème colonne). Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a

$$\begin{aligned}\Delta_k&=(-1)^{k+1}1\times 2...\times(k-1)\times(k+1)...\times n\times\mathrm{Van}(1,2,...,k-1,k+1,...,n)\\&=(-1)^{k+1}\frac{n!}{k}\times\frac{\mathrm{Van}(1,2,...,n)}{(k-(k-1))...(k-1)((k+1)-k)....(n-k)}=(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\Delta.\end{aligned}$$

Donc, $\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice n° 14 :

(1) $\Rightarrow$ (2). Montrons par récurrence sur $n\geqslant 1$ que : $(\forall(a_1,...,a_n)\in E^n/\ (\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=0)\Rightarrow((f_1,...,f_n)$ liée).

• Pour $n=1$,

$$(\forall a_1\in E/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant 1}=0)\Rightarrow(\forall a_1\in E/\ f_1(a_1)=0)\Rightarrow(f_1=0)\Rightarrow(f_1)\text{ liée.}$$

• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $(\forall(a_1,...,a_n)\in E^n/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=0)\Rightarrow(f_1,...,f_n)$ liée.
Soient f_1,..., f_{n+1} $n+1$ fonctions telles que $\forall(a_1,...,a_{n+1})\in E^{n+1}/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}=0$.
Si $(f_1,...,f_n)$ est liée alors $(f_1,...,f_{n+1})$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée. Si $(f_1,...,f_n)$ est libre, par hypothèse de récurrence, il existe a_1,...,a_n n éléments de E tels que $\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0$. Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x\in E,\ \det(f_i(a_1),...,f_i(a_n),f_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n+1}=0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f_i(x)=0$ où les λ_i sont indépendants de x ou encore une égalité du type $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f_i=0$ avec $\lambda_{n+1}=\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0$ ce qui montre encore que $(f_1,...,f_{n+1})$ est liée.

(2) $\Rightarrow$ (1). On suppose que $\exists(a_1,...,a_n)\in E^n/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0)$. Montrons que $(f_1,...,f_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i=0$. En particulier : $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(a_j)=0$. Les n égalités précédentes fournissent un système d'équations linéaires en les λ_i à n inconnues, n équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de CRAMER homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution $(\lambda_1,...,\lambda_n)=(0,...,0)$. On a montré que $(f_1,...,f_n)$ est libre.

Exercice n° 15 :

1) Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{C}^n$.

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_{a_k}=0\Rightarrow \forall p\in[\![0,n-1]\!],\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_{a_k}^{(p)}=0\Rightarrow \forall p\in[\![0,n-1]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k^p e^{a_k x}=0$$
$$\Rightarrow \forall p\in[\![0,n-1]\!],\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k^p=0 \text{ (égalités obtenues pour } x=0).$$

Les n dernières égalités écrites constituent un système (S) de n équations linéaires à n inconnues $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Le déterminant de ce système est $\text{Van}(a_1,\ldots,a_n)$. Ce déterminant n'est pas nul car les a_k sont deux à deux distincts. Par suite, (S) est un système de Cramer homogène. (S) admet donc l'unique solution $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=(0,\ldots,0)$. On a montré que la famille $(f_{a_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

2) Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant p}\in\mathbb{C}^p$.

$$\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\left(q_k^n\right)_{n\in\mathbb{N}}=0\Rightarrow \forall n\in[\![0,p-1]\!],\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k q_k^n=0.$$

Les n dernières égalités écrites constituent un système (S) de p équations linéaires à p inconnues $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. Le déterminant de ce système est $\text{Van}(q_1,\ldots,q_p)$. Ce déterminant n'est pas nul car les q_k sont deux à deux distincts. Par suite, (S) est un système de Cramer homogène. (S) admet donc l'unique solution $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)=(0,\ldots,0)$. On a montré que la famille $\left((q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

Exercice n° 16 :

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k, le problème posé équivaut au système :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ z_k+z_{k+1}=2a_k \text{ et } z_n+z_1=2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0\\ 0 & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times 1^{n-1}+(-1)^{n+1}\times 1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)}$$
$$=1-(-1)^n.$$

• Si n est impair, $\det S=2\neq 0$ et le système admet une et une seule solution.
On obtient $z_2=2a_1-z_1$, $z_3=2a_2-2a_1+z_1$,..., $z_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}+\ldots+2a_2-2a_1+z_1$ et enfin :

$$2a_{n-1}-2a_{n-2}+\ldots+2a_2-2a_1+z_1+z_1=2a_n,$$

et donc $z_1=a_1-a_2+\ldots-a_{n-1}+a_n$ puis $z_2=a_1+a_2-a_3+\ldots+a_{n-1}-a_n$ puis $z_3=-a_1+a_2+a_3-a_4\ldots+a_n$ ... puis $z_n=-a_1+a_2-a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n$.

• Si n est pair, $\det S=0$ mais le mineur formé des $n-1$ premières lignes et $n-1$ dernières colonnes est non nul. On résout le système constitué par les $n-1$ premières équations comme un système de Cramer en z_2,...,z_n. On obtient

$$z_2=2a_1-z_1,\ z_3=2a_2-2a_1+z_1,\ldots,\ z_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}+\ldots-2a_2+2a_1-z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1}-2a_{n-2}+\ldots-2a_2+2a_1-z_1+z_1=2a_n\Leftrightarrow a_1+a_3\ldots=a_2+a_4+\ldots$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points $(A_1,A_3,\ldots)$ et $(A_2,A_4,\ldots)$ ont même isobarycentre.

En résumé, si n est pair et si les systèmes de points $(A_1,A_3,\ldots)$ et $(A_2,A_4,\ldots)$ n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solution.
Si n est pair et si les systèmes de points $(A_1,A_3,\ldots)$ et $(A_2,A_4,\ldots)$ ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions : M_1 est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points A_1, A_2 ...

