Planche n° 35. Déterminants

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (***)

Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

Indication : considérer le polynôme $x \mapsto \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$.

Exercice n° 2 : (**)

Pour a, b et c donnés, dont les valeurs absolues sont deux à deux distinctes, factoriser $\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$.

Exercice n° 3 : (***)

Calculer :

1) $\det(|i-j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ **2)** $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (a_1,...,a_n étant n réels donnés) **3)** $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & & \dots & a \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **5)** $\det\left(\binom{n+i-1}{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}$ 6) $\begin{vmatrix} X & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}$

Exercice n° 4 : (****) (Déterminant de Cauchy et déterminant de Hilbert)

Soit $A_n = \left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a_1,..., a_n, b_1,...,b_n sont $2n$ réels tels que toutes les sommes a_i+b_j soient non nulles. Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de Vandermonde par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i = b_i = i$.

Exercice n° 5 : (****)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout i et tout j, $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice n° 6 : (***) (utilise des déterminants par blocs (hors programme de sup))

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(C) \geqslant 0$.

Exercice n° 7 : (**)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{i+j}a_{i,j}$. Montrer que $\det B = \det A$.

Exercice n° 8 : (***)

Déterminer les matrices A, carrées de format $n \geqslant 2$, telles que pour toute matrice carrée B de format n on a $\det(A+B) = \det A + \det B$.

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Exercice n° 9 : (****) (Déterminant circulant)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $P = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA. En déduire $\det A$.

Exercice n° 10 : (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$. Calculer $\det(\mathrm{com}(A))$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\mathrm{com}(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice n° 11 : (***) (Dérivée d'un déterminant)

Soient $a_{i,j}$ ((i,j) élément de $[\![1,n]\!]^2$) n^2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et $A = (ai,j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \det(A(x))$.

Applications. Calculer : **1)** $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$

Exercice n° 12 : (***)

Calculer :

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2)** $\det\left((i+j-1)^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ **3)** $\begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$ a_k, b, c complexes **5)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Exercice n° 13 : (***) (formules de Cramer)

1) Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $C_1, \dots, C_n$, les colonnes de A.

a) Montrer que l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ a une solution et une seule. (Le système $AX = B$ est appelé système de Cramer : c'est un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues tel que la matrice A du système soit inversible.)

b) On note $X_0 = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ cette solution. Montrer que $B = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j C_j$.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ où $\Delta = \det(A)$ et pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\Delta_i = \det\left(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n\right)$ (formules de Cramer).

2) Applications :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en discutant en fonction du paramètre réel m le système $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{array}\right.$ (S).

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

b) Résoudre le système $MX = U$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 14 : (***)

Soit E un ensemble contenant au moins n éléments et $(f_1, f_2 ..., f_n)$ un n-uplet de fonctions de E dans $\mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1) la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre ;
2) il existe n éléments a_1, a_2,..., a_n dans E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$.

Exercice n° 15 : (*I)**

1) Pour $a \in \mathbb{C}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = e^{ax}$. Soient $a_1, \dots, a_n$, n nombres complexes deux à deux distincts.
Montrer que la famille de fonctions $(f_{a_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

2) Soient $q_1, \dots, q_p$ p nombres complexes deux à deux distincts.
Montrer que la famille de suites $\left((q_k^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre.

Exercice n° 16 : (***)

Dans le plan, on donne n points A_1, ... , A_n. Existe-t-il n points M_1,..., M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3]$,..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$.

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.