

Planche n° 34. Le groupe symétrique. Corrigé

Exercice n° 1 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

1) Les inversions de σ sont :

$$\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}, \{2, 11\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{9, 10\}, \{9, 11\}, \{9, 12\}.$$

Au total, il y a $2 + 8 + 5 + 2 + 3 = 20$ inversions. σ est donc une permutation paire (de signature 1).

2) $\tau_{11,12} \circ \sigma = (3 \ 10 \ 7 \ 1 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5 \ 11 \ 8 \ 9 \ 12)$.

$$\text{Puis, } \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3 \ 10 \ 7 \ 1 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5 \ 9 \ 8 \ 11 \ 12).$$

$$\text{Puis, } \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3 \ 8 \ 7 \ 1 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12).$$

$$\text{Puis, } \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3 \ 5 \ 7 \ 1 \ 2 \ 6 \ 4 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12).$$

$$\text{Puis, } \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3 \ 5 \ 4 \ 1 \ 2 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12).$$

$$\text{Puis, } \tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3 \ 2 \ 4 \ 1 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12).$$

$$\text{Puis, } \tau_{1,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{11,12} \circ \sigma = (3 \ 2 \ 1 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12) = \tau_{1,3}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{11,12}^{-1} \circ \tau_{9,11}^{-1} \circ \tau_{10,8}^{-1} \circ \tau_{8,5}^{-1} \circ \tau_{7,4}^{-1} \circ \tau_{5,2}^{-1} \circ \tau_{1,4}^{-1} \circ \tau_{1,3} \\ &= \tau_{11,12} \circ \tau_{9,11} \circ \tau_{10,8} \circ \tau_{8,5} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{5,2} \circ \tau_{1,4} \circ \tau_{1,3}. \end{aligned}$$

σ est le produit de 8 transpositions et on retrouve le fait que σ est une permutation paire.

3) $O(1) = \{1, 3, 4, 7\} = O(3) = O(4) = O(7)$, puis $O(2) = \{2, 5, 8, 10\} = O(5) = O(8) = O(10)$ puis $O(6) = \{6\}$ et $O(9) = \{9, 11, 12\} = O(11) = O(12)$. σ a 4 orbites, deux de cardinal 4, une de cardinal 3 et un singleton (correspondant à un point fixe).

4) σ est donc le produit commutatif des cycles $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ et $c_3 = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

On a $c_1^4 = c_2^4 = \text{Id}$ et $c_3^3 = \text{Id}$. Or, $2023 = 4 \times 505 + 3$. Donc,

$$c_1^{2023} = c_1^3 \circ (c_1^4)^{505} = c_1^3 = c_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

et de même $c_2^{2023} = c_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 10 \\ 5 & 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}$. Enfin, $c_3^{2023} = (c_3^3)^{674} c_1$. Puisque c_1 , c_2 et c_3 commutent deux à deux,

$$\sigma^{2023} = c_1^{2023} c_2^{2023} c_3^{2023} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 & 3 & 10 & 12 & 2 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 2 :

(S_n, \circ) est engendré par les transpositions. Il suffit donc de montrer que pour $2 \leq i < j \leq n$, la transposition $\tau_{i,j}$ est produit des $\tau_{1,k}$, $2 \leq k \leq n$. Mais

$$\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i} = \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ i & 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ j & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ i & 1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ 1 & j & i \end{pmatrix} = \tau_{i,j}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice n° 3 :

Les éléments de A_n sont les produits pairs de transpositions. Il suffit donc de vérifier qu'un produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3.

Soient i , j et k trois éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $\tau_{i,k} \circ \tau_{i,j}$ est le 3-cycle : $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$, ce qui montre qu'un 3-cycle est pair et que le produit de deux transpositions dont les supports ont en commun un singleton est un 3-cycle.

Le cas $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j} = \text{Id} = (231)(312)$ est immédiat. Il reste à étudier le produit de deux transpositions à supports disjoints. Soient i , j , k et l quatre éléments de deux à deux distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l} = (jikl) \circ (ijlk) = (jilk) = (ljik) \circ (jkil).$$

Donc, $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l}$ est un bien un produit de 3-cycles ce qui achève la démonstration.

Exercice n° 4 :

D'après le n° 2, il suffit de montrer que pour $2 \leq i \leq n$, $\tau_{1,i}$ peut s'écrire en utilisant uniquement $\tau = \tau_{1,2}$ et $c = (2\ 3 \dots n\ 1)$. On note que $c^n = \text{Id}$.

Tout d'abord, pour $1 \leq i \leq n-1$, étudions $\sigma = c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1}$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \tau \circ c^{n-i+1}(k) \neq c^{n-i+1}(k) &\Leftrightarrow c^{n-i+1}(k) \in \{1, 2\} \Leftrightarrow k \in \{c^{-n+i-1}(1), c^{-n+i-1}(2)\} \Leftrightarrow k \in \{c^{i-1}(1), c^{i-1}(2)\} \\ &\Leftrightarrow k \in \{i, i+1\}. \end{aligned}$$

Donc, si $k \notin \{i, i+1\}$,

$$\sigma(k) = c^{i-1}(k)(\tau \circ c^{n-i+1}(k)) = c^{i-1}(c^{n-i+1}(k)) = c^n(k) = k,$$

et la restriction de σ à $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ est l'identité de cet ensemble. Comme σ n'est pas l'identité (car sinon $\tau = c^{-i+1-n+i-1} = c^{-n} = \text{Id}$ ce qui est faux), σ est donc nécessairement la transposition $\tau_{i,i+1}$.

On a montré que $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1} = \tau_{i,i+1}$.

Vérifions maintenant que les $\tau_{1,i}$ s'écrivent à l'aide des $\tau_{j,j+1}$. D'après le n° 2, $\tau_{1,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$, et donc bien sûr, plus généralement, $\tau_{1,j} = \tau_{k,i} \circ \tau_{k,j} \circ \tau_{k,i}$.

Par suite, $\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}$ puis, $\tau_{2,i} = \tau_{2,3} \circ \tau_{3,i} \circ \tau_{2,3}$, puis, $\tau_{3,i} = \tau_{3,4} \circ \tau_{4,i} \circ \tau_{3,4} \dots$ et $\tau_{i-2,i} = \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1}$. Finalement,

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \dots \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \dots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2},$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice n° 5 :

Soit (G, \times) un groupe. Pour x élément de G , on considère $f_x : G \rightarrow G$. f_x est une application de G vers G et de $y \mapsto xy$ plus, clairement $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = \text{Id}_G$. Donc, pour tout élément x de G , f_x est une permutation de G .

Soit alors $\varphi : (G, \times) \rightarrow (S_G, \circ)$. D'après ce qui précède, φ est une application. De plus, φ est de plus un morphisme de groupes. En effet, pour $(x, x', y) \in G^3$, on a :

$$\varphi((xx'))(y) = f_{xx'}(y) = xx'y = f_x(f_{x'}(y)) = f_x \circ f_{x'}(y) = (\varphi(x) \circ \varphi(x'))(y),$$

et donc $\forall (x, x') \in G^2$, $\varphi(xx') = \varphi(x) \circ \varphi(x')$.

Enfin, φ est injectif car, pour (x, x') élément de G^2 , tout élément d'un groupe étant simplifiable,

$$\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow \forall y \in G, xy = x'y \Rightarrow x = x',$$

(e désignant l'élément neutre de G).

φ est ainsi un isomorphisme de groupes de (G, \times) sur $(f(G), \circ)$ qui est un sous groupe de (S_G, \circ) . (G, \times) est bien isomorphe à un sous groupe de (S_G, \circ) .

Exercice n° 6 :

Montrons d'abord par récurrence sur $l \geq 2$ que la signature d'un cycle de longueur l est $(-1)^{l-1}$.

- C'est connu pour $l = 2$ (signature d'une transposition).
- Soit $l \geq 2$. Supposons que tout cycle de longueur l ait pour signature $(-1)^{l-1}$. Soit c un cycle de longueur $l+1$. On note $\{x_1, x_2, \dots, x_{l+1}\}$ le support de c et on suppose que, pour $1 \leq i \leq l$, $c(x_i) = x_{i+1}$ et que $c(x_{l+1}) = x_1$. Montrons alors que $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ est un cycle de longueur l . $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ fixe déjà x_{l+1} puis, si $1 \leq i \leq l-1$,

$$\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_i) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}$$

(car x_{i+1} n'est ni x_1 , ni x_{l+1}), et enfin $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c(x_l) = \tau_{x_1, x_{l+1}}(x_{l+1}) = x_1$. $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ est donc bien un cycle de longueur l . Par hypothèse de récurrence, $\tau_{x_1, x_{l+1}} \circ c$ a pour signature $(-1)^{l-1}$ et donc, c a pour signature $(-1)^{(l+1)-1}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Montrons maintenant que si σ est une permutation quelconque de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant k orbites la signature de σ est $(-1)^{n-k}$. Si σ est l'identité, σ a n orbites et le résultat est clair.

Si σ n'est pas l'identité, on décompose σ en produit de cycles à supports disjoints.

Posons $\sigma = c_1 \dots c_p$ où p désigne le nombre d'orbites de σ non réduites à un singleton et donc $k-p$ est le nombre de points fixes de σ . Si l_i est la longueur de c_i , on a donc $n = l_1 + \dots + l_p + (k-p)$ ou encore $n-k = l_1 + \dots + l_p - p$. Mais alors,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^p \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^p (-1)^{l_i-1} = (-1)^{l_1+\dots+l_p-p} = (-1)^{n-k}.$$

Exercice n° 7 :

1) a) Soient σ et σ' deux éléments de S_n . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne i , colonne j de $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} \delta_{k, \sigma'(j)} = \delta_{i, \sigma(\sigma'(j))} \text{ (obtenu quand } k = \sigma'(j)\text{),}$$

et est donc aussi le coefficient ligne i , colonne j de la matrice $P_{\sigma \circ \sigma'}$. Par suite,

$$\forall (\sigma, \sigma') \in (S_n)^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}.$$

b) Soit $\sigma \in S_n$. D'après a), $P_\sigma \times P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = P_{\text{Id}} = I_n = P_{\sigma^{-1}} \times P_\sigma$. On en déduit que toute matrice P_σ est inversible, d'inverse $P_{\sigma^{-1}} \in G$. Par suite, $G \subset GL_n(\mathbb{R})$. De plus, $I_n = P_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}} \in G$ et en particulier, $G \neq \emptyset$.

Soit alors $(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2$.

$$P_\sigma \times (P_{\sigma'})^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma'^{-1}} \in G,$$

car $\sigma \circ \sigma'^{-1} \in S_n$. On a montré que G est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Soit $\varphi : S_n \rightarrow G$. D'après a), φ est un morphisme de groupes. φ est clairement surjectif. Il reste à vérifier que φ est injectif.

Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma') &\Rightarrow P_\sigma = P_{\sigma'} \Rightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \delta_{i, \sigma(j)} = \delta_{i, \sigma'(j)} \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_{i, \sigma(i)} = \delta_{i, \sigma'(i)} \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) = \sigma'(i) \\ &\Rightarrow \sigma = \sigma'. \end{aligned}$$

Donc φ est injectif.

Finalement, φ est un isomorphisme du groupe (S_n, \circ) sur le groupe (G, \times) et on a montré que (G, \times) est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, isomorphe à (S_n, \circ) .

2) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne i , colonne j de AP_σ vaut :

$$\sum_{k=1}^n a_{i, k} \delta_{k, \sigma(j)} = a_{i, \sigma(j)} \text{ (obtenu quand } k = \sigma(j)\text{)}.$$

Ainsi, l'élément ligne i , colonne j , de AP_σ est l'élément ligne i , colonne $\sigma(j)$, de A , ou encore, si j est un élément donné de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ème colonne de AP_σ est la $\sigma(j)$ -ème colonne de A . Ainsi, si on note C_1, \dots, C_n les colonnes de A (et donc $A = (C_1, \dots, C_n)$), alors $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$. En clair, multiplier A par P_σ à droite a pour effet d'appliquer la permutation σ aux colonnes de A (puisque P_σ est inversible, on retrouve le fait que permuter les colonnes de A ne modifie pas le rang de A).

De même, le coefficient ligne i , colonne j , de $P_\sigma A$ vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} a_{k, j} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma^{-1}(i), k} a_{k, j} = a_{\sigma^{-1}(i), j},$$

(on a utilisé $\sigma(k) = i \Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(i)$) et multiplier A par P_σ à gauche a pour effet d'appliquer la permutation σ^{-1} aux lignes de A .

Exercice n° 8 :

$G = \{A_1, \dots, A_p\}$ est déjà une partie non vide de $GL_n(\mathbb{R})$, stable pour \times . Il reste à vérifier que G est stable pour le passage à l'inverse.

Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, puis $\varphi_i : G \rightarrow G$. Puisque G est stable pour le produit, φ_i est une application de G dans G .

$$A \mapsto A_i A$$

Montrons que φ_i est injective. Soit $(A, B) \in G^2$.

$$\varphi_i(A) = \varphi_i(B) \Rightarrow A_i A = A_i B \Rightarrow A_i^{-1} A_i A = A_i^{-1} A_i B \Rightarrow A = B.$$

Donc, φ_i est une application injective de l'ensemble fini G dans lui-même. On sait alors que φ_i est une permutation de G .

Par φ_i , A_i a un antécédent A dans G . L'égalité $A_i A = A_i$ fournit $A_i^{-1} A_i A = A_i^{-1} A_i$ puis $A = I \in G$. Ainsi, G contient la matrice I . Ensuite, I a un antécédent par φ_i dans G . Donc, il existe $B \in G$ telle que $A_i B = I$. Mais alors $A_i^{-1} = B \in G$. G est bien stable pour le passage à l'inverse et est donc un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice n° 9 :

Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E$, on pose $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = x_1 + \dots + x_n$. φ est une forme linéaire non nulle sur E et H est le noyau de φ . H est donc bien un hyperplan de E .

Pour $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, les endomorphismes $f_\sigma \circ f_{\sigma'}$ et $f_{\sigma \circ \sigma'}$ coïncident sur une base de E et donc $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$.

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel et donc p est bien un endomorphisme de E .

$$p^2 = \frac{1}{n!^2} \left(\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \right)^2 = \sum_{(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2} f_\sigma \circ f_{\sigma'} = \sum_{(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2} f_{\sigma \circ \sigma'}.$$

(S_n, \circ) est un groupe fini. Par suite, l'application $S_n \rightarrow S_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ \sigma'$, injective (même démarche que dans le n° 8), est une

permutation de S_n . On en déduit que, pour σ' donnée, $\sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'} = \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Ainsi,

$$p^2 = \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma' \in S_n} \left(\sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'} \right) = \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma' \in S_n} n! p = \frac{1}{n!^2} \times n! n! p = p.$$

p est donc une projection. Déterminons alors l'image et le noyau de p . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$p(e_i) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(e_i) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)}.$$

Maintenant, il y a autant de permutations σ telles que $\sigma(i) = 1$, que de permutations σ telles que $\sigma(i) = 2, \dots$ ou de permutations σ telles que $\sigma(i) = n$, à savoir $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Donc,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(e_i) = \frac{1}{n!} \frac{n!}{n} \sum_{k=1}^n e_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k.$$

Posons $u = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k$. D'après ce qui précède,

$$\text{Imp} = \text{Vect}(p(e_1), \dots, p(e_n)) = \text{Vect}(u).$$

Ensuite, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ est un élément de E ,

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k p(e_k) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) u = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Ainsi, p est la projection sur $\text{Vect}(u)$ parallèlement à H .