Chapitre 34. Dénombrements

Plan du chapitre

1 Ensembles finis. Ensembles infinis. Cardinal d'un ensemble

1.1 Ensembles équipotents

Définition 1. Soient E et F deux ensembles non vides.
E est **équipotent** à F si et seulement si il existe une bijection de E sur F.

Par exemple, $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}^*$ car l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ est une bijection.

Théorème 1. Soient E, F et G trois ensembles non vides.
1) E est équipotent à E.
2) Si E est équipotent à F, alors F est équipotent à E.
3) Si E est équipotent à F et F est équipotent à G, alors E est équipotent à G.

Démonstration . Soient E, F et G trois ensembles non vides.

1) Id_E est une bijection de E sur E et donc E est équipotent à E.

2) Supposons que E est équipotent à F. Il existe une bijection f de E sur F. Mais alors f^{-1} est une bijection de F sur E et donc F est équipotent à E.

3) Supposons E est équipotent à F et que F est équipotent à G. Il existe une bijection f de E sur F et une bijection g de F sur G. Mais alors, $g \circ f$ est une bijection de E sur G et donc E est équipotent à G.

❏

⇨ **Commentaire** . *On a évité d'écrire : « la relation d'équipotence est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les ensembles » car l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.*

On admettra le théorème intuitif suivant.

Théorème 2. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1) Il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$ si et seulement si $n \leqslant p$.

2) Il existe une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$ si et seulement si $n \geqslant p$.

3) Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$ (ou encore $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, p]\!]$ sont équipotents) si et seulement si $n = p$.

1.2 Ensemble fini. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 2. Soit E un ensemble non vide.
E est dit **fini** si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que E est équipotent à $[\![1, n]\!]$.

Convention. $\varnothing$ est un ensemble fini.

D'après le théorème 2, si E est un ensemble non vide tel qu'il existe un entier naturel non nul n tel que E est équipotent à $[\![1, n]\!]$, alors l'entier n est uniquement défini. Ceci motive la définition suivante :

Définition 3. Soit E un ensemble fini non vide. Soit n l'unique entier naturel non nul tel que E est équipotent à $[\![1, n]\!]$.

L'entier n s'appelle le **cardinal** de E (ou plus simplement le **nombre d'éléments de** E). Il se note $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$ (ou plus rarement $\overline{\overline{E}}$).

Convention. Le cardinal de l'ensemble vide est 0 ou encore $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$.

Remarque. Deux ensembles finis équipotents ont le même cardinal.

On a maintenant défini à peu près proprement le cardinal d'un ensemble fini. La notion clé est la notion de bijection. Dans la pratique des problèmes et exercices de concours, prouver que deux ensembles ont le même nombre d'éléments consistera assez souvent à construire une bijection de l'un des deux ensembles sur l'autre et en particulier, prouver qu'un ensemble E a n éléments consistera dans certains cas à construire une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E.
Ce qui précède est en contradiction avec une phrase du programme officiel : « l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme ». Mais il y a souvent une différence entre la théorie et la pratique des problèmes de concours ...

1.3 Cardinal d'une réunion. Cardinal d'une différence

Théorème 3. Soit E un ensemble.

Pour tout $(A, B)(\mathcal{P}(E))^2$ tel que A et B sont finis et $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B$ est fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Démonstration.

Si B est vide, alors $A \cup B = A \cup \varnothing = A$. Donc, $A \cup B$ est fini et de plus, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$. De même, si A est vide.

Supposons maintenant $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. Posons $n = \text{card}(A)$ et $p = \text{card}(B)$. En posant $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$, on dispose d'une bijection $f : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \rightarrow & A \\ i & \mapsto & a_i \end{array}$ de $[\![1, n]\!]$ sur A et d'une bijection $g : \begin{array}{ccc} [\![1, p]\!] & \rightarrow & B \\ j & \mapsto & b_j \end{array}$. Puisque A et B sont disjoints, l'application

$$h : \begin{array}{ccc} [\![1, n+p]\!] & \rightarrow & A \cup B \\ k & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} f(k) \text{ si } k \leqslant n \\ g(k-n) \text{ si } n+1 \leqslant k \leqslant n+p \end{array} \right. \end{array}$$

est une bijection de $[\![1, n+p]\!]$ sur $A \cup B$. Par suite, $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = n + p = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

❑

⇨ **Commentaire**. *On peut donner une démonstration complètement différente du théorème précédent (et des théorèmes qui suivent) à l'aide du résultat intuitif suivant : si E est un ensemble fini et A est une partie de E,*

$$\textit{card}(A) = \sum_{x \in E} \chi_A(x)$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de A (pour obtenir le nombre d'éléments de A, on fait défiler les éléments de E et on compte 1 à chaque fois que l'on a un élément de A). Si A et B sont des parties disjointes de E, on sait que $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ et donc

$$\textit{card}(A \cup B) = \sum_{x \in E} \chi_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in E} (\chi_A(x) + \chi_B(x)) = \sum_{x \in E} \chi_A(x) + \sum_{x \in E} \chi_B(x) = \textit{card}(A) + \textit{card}(B).$$

Théorème 4. Soit E un ensemble fini. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A_1, A_2, ..., A_n, n parties de E deux à deux disjointes.

Alors $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est fini et

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}\left(A_i\right).$$

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.

- Le cas où $n = 2$ est le théorème 3.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que le cardinal de la réunion de n parties deux à deux disjointes de E soit la somme des cardinaux de ces parties.

Soient A_1, ..., A_{n+1}, $n+1$ parties de E, deux à deux disjointes. Alors, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et A_{n+1} sont deux parties disjointes de E puis $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$ est une partie finie de E par hypothèse de récurrence et d'après le cas $n = 2$ et

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \text{card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \text{card}\left(A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \text{card}\left(A_i\right) \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

❑

Théorème 5. Soit E un ensemble fini. Soit A une partie de E.

1) A est fini, $\complement_E A$ est fini et $\text{card}(\complement_E A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

2) $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.

3) $A = E \Leftrightarrow \text{card}(A) = \text{card}(E)$.

Démonstration .

1) Il est clair que A et $\complement_E A$ sont finis. A et $\complement_E A$ sont deux parties disjointes de E et donc

$$\text{card}(A) + \text{card}(\complement_E A) = \text{card}(A \cup \complement_E A) = \text{card}(E),$$

et donc $\text{card}(\complement_E A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

2) $\text{card}(E) - \text{card}(A) = \text{card}(\complement_E A) \geqslant 0$ et donc $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.

3) De plus, $\text{card}(A) = \text{card}(E) \Leftrightarrow \text{card}(E) - \text{card}(A) = 0 \Leftrightarrow \text{card}(\complement_E A) = 0 \Leftrightarrow \complement_E A = \varnothing \Leftrightarrow A = E$.

❏

Théorème 6. Soit E un ensemble fini. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$.

$B \setminus A$ est fini et $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A)$.

Démonstration . On applique le théorème 5 à l'ensemble B car, puisque $A \subset B$, on a $B \setminus A = \complement_B A$.

❏

Théorème 7. Soit E un ensemble fini. Soient A et B deux parties de E.

$A \cup B$ est fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Démonstration . $A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B)$ avec $A \cap (B \setminus A \cap B) = \varnothing$ et $A \cap B \subset B$. D'après les théorèmes 3 et 6,

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \cup (B \setminus A \cap B)) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

❏

On peut donner d'autres démonstrations du théorème précédent qui ont chacune leur propre intérêt : quand on calcule $\text{card}(A)+\text{card}(B)$, on a compté 1 pour chaque élément de A et 1 pour chaque élément de B. Ce faisant, on a compté 2 pour chaque élément de $A \cap B$ et il s'agit de retrancher 1 pour chaque élément de $A \cap B$ ou encore en retranchant $\text{card}(A \cap B)$ à $\text{card}(A) + \text{card}(B)$, on a compté exactement 1 pour chaque élément de $A \cup B$, que cet élément soit dans $A \setminus B$, dans $B \setminus A$ ou dans $A \cap B$.

On peut aussi utiliser la fonction caractéristique de $A \cup B$: on a vu que $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ et donc

$$\text{card}(A \cup B) = \sum_{x\in E} \chi_{A\cup B}(x) = \sum_{x\in E} \chi_A(x) + \sum_{x\in E} \chi_B(x) - \sum_{x\in E} \chi_{A\cap B}(x) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Exemple. Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 piques et 4 rois. Une et une seule carte est à la fois un roi et un pique, à savoir le roi de pique. Le nombre de cartes qui sont des rois ou des piques est donc

$$4 + 8 - 1 = 11$$

et le nombre de cartes qui ne sont ni des rois, ni des piques est :

$$32 - (4 + 8 - 1) = 32 - 11 = 21.$$

Théorème 8. Soit E un ensemble fini. Soient A, B et C trois parties de E.

$A \cup B \cup C$ est fini et

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Démonstration .

$$\begin{aligned}\text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A \cup B) + \text{card}(C) - \text{card}((A \cup B) \cap C) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) + \text{card}(C) - \text{card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - (\text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C \cap B \cap C)) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

❏

On peut aussi utiliser des fonctions caractéristiques ou aussi raisonner de la façon suivante : dans $\text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C)$, on a compté 1 pour chaque élément de A, 1 pour chaque élément de B et 1 pour élément de C. Ce faisant on a compté 2 pour les éléments communs à A et B qui ne sont pas dans C, 2 pour les éléments communs à A et C qui ne sont pas dans B et 2 pour les éléments communs à B et C qui ne sont pas dans A. On retranche donc $\text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap C)$ pour obtenir $\text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(A \cap C)$. Dans ce dernier nombre, la plupart des éléments ont été comptés une fois et une seule à l'exception des éléments communs à A, B et C qui ont été comptés $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$ fois. On rajoute donc 1 pour chaque élément de $A \cap B \cap C$ ...

Théorème 9. Soit E un ensemble fini. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A_1, A_2, ..., A_n, n parties de E.

Alors $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est fini et

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \text{card}\,(A_i)\,.$$

Démonstration . On montre le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.

- Soient A_1 et A_2 deux parties de E.

$$\text{card}\,(A_1 \cup A_2) = \text{card}\,(A_1) + \text{card}\,(A_2) - \text{card}\,(A_1 \cap A_2) \leqslant \text{card}\,(A_1) + \text{card}\,(A_2)\,.$$

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat pour n parties de E. Soient A_1, ..., A_{n+1}, $n+1$ parties de E.

$$\begin{aligned}\text{card}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) &\leqslant \text{card}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \text{card}\,(A_{n+1}) \text{ (d'après le cas } n = 2) \\ &\leqslant \text{card}\,(A_1) + \ldots + \text{card}\,(A_n) + \text{card}\,(A_{n+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

Exercice 1. (formule du crible). Soit E un ensemble fini. Soient $n \geqslant 2$ puis A_1, ..., A_n, n parties de E. Montrer que :

$$\text{card}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}} \text{card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right).$$

Solution 1. Soient $n \geqslant 2$ puis A_1, ..., A_n, n parties de E

$$\begin{aligned}\chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} &= 1 - \chi_{\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}} = 1 - \chi_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}} = 1 - \chi_{\overline{A_1}} \times \ldots \times \chi_{\overline{A_n}} \\ &= 1 - (1 - \chi_{A_1}) \ldots (1 - \chi_{A_n}) = 1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \chi_{A_{i_1}} \ldots \chi_{A_{i_k}} \right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \chi_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}} \right),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\text{card}\,(A_1\cup\ldots\cup A_n)&=\sum_{x\in E}\chi_{A_1\cup\ldots\cup A_n}(x)=\sum_{x\in E}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\chi_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}(x)\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\left(\sum_{x\in E}\chi_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}(x)\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k)\in[\![1,n]\!]^k\\ i_1<i_2<\ldots<i_k}}\text{card}\,(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\right)\end{aligned}$$

⇨ **Commentaire** . *On résoudra plus loin le célèbre « problème des chapeaux » grâce à la formule du crible.*

1.4 Cardinal d'un produit cartésien

Théorème 10. Soient E et F deux ensembles finis non vides. Alors $E\times F$ est fini et

$$\text{card}(E\times F)=\text{card}(E)\times\text{card}(F).$$

Démonstration . Posons $n=\text{card}(E)$ et $p=\text{card}(F)$. Posons encore $E=\{a_1,\ldots,a_n\}$ et $F=\{b_1,\ldots,b_p\}$ où les a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, sont deux à deux distincts et les b_j, $1\leqslant j\leqslant p$, sont deux à deux distincts.
Pour $i\in[\![1,n]\!]$, posons $P_i=\{(a_i,b)\,,\ b\in F\}=\{(a_i,b_1)\,,\ldots,(a_i,b_p)\}$. $(P_1,\ldots,P_n)$ est une partition de $E\times F$ et donc

$$\text{card}(E\times F)=\sum_{i=1}^{n}\text{card}\,(P_i)\,.$$

Maintenant, pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, l'application $\begin{array}{rccc}f_i\;: & F & \to & P_i\\ & b & \mapsto & (a_i,b)\end{array}$ est une bijection. Donc, pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, P_i est équipotent à F puis $\text{card}\,(P_i)=\text{card}(F)=p$. On en déduit que

$$\text{card}(E\times F)=\sum_{i=1}^{n}p=np=\text{card}(E)\times\text{card}(F).$$

❑

Théorème 11. Soient $n\geqslant 2$ puis E_1, …, E_n, n ensembles finis non vides. Alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}E_i$ est fini et

$$\text{card}\left(\prod_{i=1}^{n}E_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\text{card}\,(E_i)\,.$$

En particulier, si E est un ensemble fini et n un entier naturel non nul, E^n est fini et

$$\text{card}\,(E^n)=(\text{card}(E))^n.$$

Démonstration . La première formule se montre par récurrence en ayant conscience que les ensembles $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n}E_i\right)\times E_{n+1}$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}E_i$ sont équipotents. La deuxième formule est le cas particulier où $E_1=\ldots=E_n=E$.

❑

1.5 Bijections d'un ensemble fini sur un ensemble fini

Le résultat central du paragraphe est le théorème 13. On prépare ce résultat avec le théorème 12 :

Théorème 12. Soient E et F deux ensembles finis non vides. Soit f une application de E vers F.
Alors, $\text{card}(f(E)) \leqslant \text{card}(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur $n = \text{card}(E) \geqslant 1$.

- Si $n = 1$, alors $\text{card}(f(E)) = 1 = \text{card}(E)$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que si E est un ensemble de cardinal n et f une application de E vers f, alors $\text{card}(f(E)) \leqslant \text{card}(E)$ avec égalité si et seulement si f est injective.
Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ puis f une application de E vers F.

  Si f est injective, f réalise une bijection de E sur $f(E)$. Les ensembles E et $f(E)$ sont équipotents et ont donc même cardinal.
Si f n'est pas injective, il existe deux éléments distincts x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Mais alors, $f(E) = f(E \setminus \{x_2\})$ avec $\text{card}(E \setminus \{x_2\}) = n$ puis, par hypothèse de récurrence,

$$\text{card}(f(E)) = \text{card}(f(E \setminus \{x_2\})) \leqslant \text{card}(E \setminus \{x_2\}) = n < \text{card}(E).$$

  On a donc l'inégalité $\text{card}(f(E)) \leqslant \text{card}(E)$ et cette inégalité n'est pas une égalité.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

⇨ **Commentaire**. *Une conséquence du théorème précédent est qu'une application d'un ensemble à $n+1$ éléments dans un ensemble à n éléments ne peut pas être injective. Cette propriété est connue sous le nom de « principe des tiroirs » : si on met $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, il y a obligatoirement au moins deux chaussettes qui sont dans un même tiroir.*

Théorème 13. Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Soit f une application de E vers F. Alors

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}.$$

Démonstration. Supposons f injective. f réalise alors une bijection de E sur $f(E)$. En particulier, $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E) = \text{card}(F)$. $f(E)$ est donc un sous-ensemble de l'ensemble fini F, de même cardinal que F. D'après le théorème 5, $f(E) = F$ et donc f est surjective puis f est bijective. Réciproquement, si f est bijective, alors f est injective et on a montré que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

Supposons maintenant que f est surjective et montrons que f est bijective. Supposons par l'absurde que f n'est pas injective. Il existe alors deux éléments distincts x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Puisque f est surjective, on a $f(E \setminus \{x_2\}) = f(E) = F$ et donc $\text{card}(f(E \setminus \{x_2\})) = \text{card}(F) = \text{card}(E)$. Mais ceci est impossible car, d'après le théorème 12, $\text{card}(f(E \setminus \{x_2\})) \leqslant \text{card}(E \setminus \{x_2\}) = \text{card}(E) - 1$. Il était donc absurde de supposer f non injective.
Finalement, f est injective puis bijective. Réciproquement, si f est bijective, alors f est surjective et on a montré que

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}.$$

❏

1.6 Ensembles infinis

Définition 4. Soit E un ensemble non vide. E est dit **infini** si et seulement si E n'est pas fini.

Théorème 14. Soit E un ensemble non vide.

E est infini si et seulement si il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E.

Démonstration. Si E est fini, notons n son cardinal. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans E. Parmi les entiers $1, \ldots, n+1$, deux d'entre eux au moins ont la même image (d'après le principe des tiroirs). Donc, f n'est pas injective.
Ainsi, si E est fini, il n'existe pas d'injection de $\mathbb{N}$ dans E. Par contraposition, s'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E, E est infini.

Réciproquement, soit E un ensemble infini. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, il existe dans E n éléments deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_{n-1}$.

- S'il n'existe pas deux éléments distincts de E, alors E est un singleton et en particulier, E est fini ce qui est faux. Donc, il existe dans E deux éléments distincts x_0 et x_1.

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons avoir construit n éléments deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de E. L'ensemble $E \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ n'est pas vide car dans le cas contraire, $E = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ et en particulier E est fini ce qui est faux. Donc, il existe un élément

x_n de E distinct de chacun des éléments $x_0, \ldots, x_n$.

Le résultat est démontré par récurrence. Mais alors, l'application $x \mapsto x_n$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans E.

❏

On peut alors énoncer une propriété surprenante des ensembles infinis :

Théorème 15. Soit E un ensemble non vide.

E est infini si et seulement si il existe une partie F de E, distincte de E telle que E est équipotent à F (ou encore il existe une bijection de E sur l'une de ses parties strictes).

Démonstration . Supposons E infini. D'après le théorème précédent, il existe dans E une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E deux à deux distincts. Soit $F = E \setminus \{x_0\}$. F est une partie stricte de E.
Soit f l'application de E vers F définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_{n+1}$ et $\forall x \in (E \setminus \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\})$, $f(x) = x$. f est une bijection de E sur F.

Supposons E fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F une partie stricte, de cardinal $p < n$. S'il existe une bijection de E sur F, alors E et F ont même cardinal ce qui est faux. Donc, il n'existe pas de bijection de E sur F.

❏

Ainsi, par exemple, il existe une bijection de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des entiers pairs $2\mathbb{N}$ à savoir l'application $n \mapsto 2n$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
2\times 0 = 0 & 2\times 1 = 2 & 2\times 2 = 4 & 2\times 3 = 6 & 2\times 4 = 8 & 2\times 5 = 10 & \ldots
\end{array}$$

Ceci est rendu possible par le fait que $\mathbb{N}$ est infini. On peut aussi noter que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ est une bijection et que $]0, +\infty[$ est une partie stricte de $\mathbb{R}$.

2 Nombre d'applications, d'injections, de bijections, de permutations

2.1 Nombre d'applications d'un ensemble fini vers un ensemble fini

Théorème 16. Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.

Le nombre d'applications de E vers F est p^n ou encore

$$\text{card}\left(F^E\right) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}.$$

Démonstration . Posons $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ où les a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont deux à deux distincts. Considérons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F^E & \rightarrow & F^n \\ f & \rightarrow & (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \end{array}$. Vérifions que φ est une bijection.
φ est bien une application. Soit $(f, g) \in \left(F^E\right)^2$.

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow (f(a_1), \ldots, f(a_n)) = (g(a_1), \ldots, g(a_n)) \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ f(a_i) = g(a_i) \Rightarrow f = g.$$

Soit φ est injective. Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in F^n$. Soit f l'application de E vers F définie par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(a_i) = b_i$. Alors, $\varphi(f) = (b_1, \ldots, b_n)$. Ceci montre que φ est surjective. Finalement, φ est bijective.

Ainsi, les ensembles F^E et F^n sont équipotents. Ces ensembles ont donc le même cardinal :

$$\text{card}\left(F^E\right) = \text{card}(F^n) = p^n = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}.$$

❏

⇨ **Commentaire** . *On peut donner une autre démonstration du théorème 16, « plus concrète » mais tout à fait valable. Posons* $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *et* $F = \{b_1, \ldots, b_p\}$. *Si* f *est une application de* E *vers* F, *il y a* p *possibilités pour l'image de* a_1 *et encore* p *possibilités* *pour l'image de* a_2 ... *et encore* p *possibilités pour l'image de* a_n. *Il y a donc* $p \times p \times \ldots \times p = p^n$ *possibilités pour les images de* $a_1, \ldots, a_n$.

Exemple. Dans le cas, où $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$, donnons explicitement chacune des $2^3 = 8$ applications $f_1, \ldots, f_8$ de E vers F.

f_1 définie par : $f_1(a) = 1$, $f_1(b) = 1$ et $f_1(c) = 1$.
f_2 définie par : $f_2(a) = 1$, $f_2(b) = 1$ et $f_2(c) = 2$.
f_3 définie par : $f_3(a) = 1$, $f_3(b) = 2$ et $f_3(c) = 1$.
f_4 définie par : $f_4(a) = 1$, $f_4(b) = 2$ et $f_4(c) = 2$.
f_5 définie par : $f_5(a) = 2$, $f_5(b) = 1$ et $f_5(c) = 1$.
f_6 définie par : $f_6(a) = 2$, $f_6(b) = 1$ et $f_6(c) = 2$.
f_7 définie par : $f_7(a) = 2$, $f_7(b) = 2$ et $f_7(c) = 1$.
f_8 définie par : $f_8(a) = 2$, $f_8(b) = 2$ et $f_8(c) = 2$. ❑

Nous avons différentes interprétations possibles des applications d'un ensemble fini vers un autre ensemble fini. Une application de l'ensemble $[\![1, p]\!]$ vers un ensemble fini $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de cardinal n vers « est aussi » un **tirage successif avec remise** de p éléments de E. Au tirage numéro 1, on associe a_1 ou a_2 ou ... ou a_n puis au tirage numéro 2, on associe de nouveau a_1 ou a_2 ou ... ou a_n ... puis au tirage numéro p, on associe de nouveau a_1 ou a_2 ou ... ou a_n. Donc,

Le nombre de tirages successifs avec remise de p objets parmi n est n^p.

On a une autre interprétation possible : un tirage successif avec remise de p objets dans un ensemble à n éléments « est aussi » un p-uplet (ordonné) avec répétitions possibles d'éléments de cet ensemble. Donc,

Le nombre de p-uplets (ordonnés) avec répétition d'un ensemble à n éléments est n^p.

Une situation type de la vie courante est le loto foot. Dans une grille, on peut parier sur 14 matches. A chaque match, on choisit entre 1 (pour victoire de la première équipe citée), N (pour match nul) ou 2 (pour victoire de la deuxième équipe citée). Une grille de loto foot est donc un 14-uplet (ordonné) avec répétitions possibles d'éléments de l'ensemble $\{1, N, 2\}$ du type $(2, N, N, 2, 1, 1 \ldots, N)$. Il y a

$$3^{14} = 4\,782\,969 \text{ grilles de loto foot possibles,}$$

et donc une chance sur 4 782 969 de gagner si on joue au hasard.

2.2 Nombre d'injections d'un ensemble fini vers un ensemble fini. Nombre d'arrangements p à p d'un ensemble fini

2.2.1 Factorielle d'un entier

Pour n entier naturel non nul donné, on définit la **factorielle** de n, notée $n!$, par

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On pose conventionnellement $0! = 1$. Les premières factorielles sont (il est utile de les connaître par cœur)

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120 \qquad 6! = 720 \qquad 7! = 5040.$$

On a immédiatement la règle de calcul (qui peut aussi être considérée comme une définition par récurrence de la factorielle, en tenant compte de l'initialisation $0! = 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n!.$$

On doit prendre garde à quelques pièges du genre $(2n)! \neq 2n!$ (par exemple, $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ n'est pas $2 \times 3! = 2 \times 1 \times 2 \times 3 = 12$).

2.2.2 Nombre d'arrangements p à p d'un ensemble fini

Théorème 17. Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n.

Si $p > n$, le nombre d'injections de E dans F est 0.
Si $1 \leqslant p \leqslant n$, le nombre d'injections de E dans F est $\underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Démonstration . Posons $E = \{a_1, \dots, a_p\}$ et $F = \{b_1, \dots, b_n\}$. Soit f une injection de E dans F.

Il y a n possibilités pour $f(a_1)$ à savoir b_1 ou b_2 ou ... ou b_n. Pour chacune de ces n possibilités, il n'y a plus que $n-1$ possibilités pour $f(a_2)$ à savoir n'importe quel élément de F sauf $f(a_1)$. Au total, il y a $n(n-1)$ possibilités pour le couple $(f(a_1), f(a_2))$. Pour chacune de ces $n(n-1)$ possibilités pour le couple $(f(a_1), f(a_2))$, il n'y a plus que $n-2$ possibilités pour $f(a_3)$ à savoir n'importe quel élément de F sauf $f(a_1)$ et $f(a_2)$. Au total, il y a $n(n-1)(n-2)$ possibilités pour le triplet $(f(a_1), f(a_2), f(a_3))$ ... et finalement, il y a $\underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))}_{p \text{ facteurs}}$ pour le p-uplet $(f(a_1), \dots, f(a_p))$.

❏

On peut interpréter de différentes façons une injection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. Une injection de l'ensemble $[\![1, p]\!]$ vers un ensemble fini $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ de cardinal n « est aussi » un **tirage successif sans remise** de p éléments de E. Au tirage numéro 1, on associe a_1 ou a_2 ou ... ou a_n puis au tirage numéro 2, on associe l'un des éléments a_1 ou a_2 ou ... ou a_n sauf celui associé au tirage numéro 1 ... puis au tirage numéro p, on associe l'un des éléments a_1 ou a_2 ou ... ou a_n distinct de tous les éléments obtenus au cours des $p-1$ premiers tirages. Donc,

Le nombre de tirages successifs sans remise de p objets parmi n est $\underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Un tirage successif sans remise de p objets dans un ensemble à n éléments « est aussi » un p-uplet (ordonné) sans répétitions possibles d'éléments de cet ensemble. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 5. Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. Soit p un entier naturel non nul.

Un **arrangement** p à p (ou une **p-liste**) des n éléments de E est un p-uplet sans répétition d'éléments de E.

Donc,

Théorème 18. Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel non nul.

Si $p > n$, le nombre d'arrangements p à p (ou de p-listes) des n éléments de E est 0.
Si $1 \leqslant p \leqslant n$, le nombre d'arrangements p à p des n éléments de E est $\underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Notation. Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. On pose

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!},$$

(A étant l'initiale du mot arrangement). En particulier, $A_n^n = n!$. On pose conventionnellement $A_n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose aussi pour $p > n$, $A_n^p = 0$. ❏

Ainsi, par exemple, $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$, $A_4^4 = 24$ et $A_4^5 = 0$.

Une situation type de la vie courante est le tiercé. Une course de chevaux est constituée de 18 partants. On suppose qu'il n'y a pas d'exæquo et que tous les chevaux sont à l'arrivée. Le nombre de tiercés possibles (nombres de possibilités d'arrivée des trois premiers ou encore nombre de triplets sans répétition des numéros de 1 à 18) est

$$A_{18}^3 = 18 \times 17 \times 16 = 4\ 896 \text{ tiercés possibles},$$

et il y a donc une chance sur 4 896 de gagner si on joue au hasard.

2.3 Nombre de bijections d'un ensemble fini vers un ensemble fini. Nombre de permutations d'un ensemble fini

On sait que quand $p = n$ les injections de E vers F sont les bijections de E vers F. Donc,

Théorème 19. Soient E et F deux ensembles finis non vides de même cardinal n.

Le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

Quand $F = E$, on a en particulier

Théorème 20. Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n.

Le nombre de permutations de E est $n!$.

Une situation qui rentre dans ce cadre est la recherche du nombre d'anagrammes d'un mot. Considérons par exemple le mot « élève ». Il est constitué de 5 lettres deux à deux distinctes. Une anagramme de ce mot (en considérant que le mot élève lui-même en est une) est une permutation de ces cinq lettres. Il y en a $5! = 120$.
Enlevons les accents de ce mot pour obtenir le mot « eleve » et déterminons le nombre N d'anagrammes de ce mot. Chacun de ces anagrammes fournit $3!$ anagrammes du mot « élève »(permutations des trois e dans leur emplacement). Donc $N \times 3! = 5!$ ou encore $N = \dfrac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$.

De même, le nombre d'anagrammes du mot « mathématiques » est (en tenant compte des deux m, des deux a, et des deux t)

$$\frac{13!}{2! \times 2! \times 2!} = 778\ 377\ 600.$$

(On a compté d'abord les anagrammes en supposant les deux m distincts (m_1 et m_2), les deux a distincts et les deux t distincts ...)

3 Combinaisons

3.1 Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Définition 6. Une partie à p éléments d'un ensemble E à n éléments s'appelle aussi une **combinaison** p à p (ou une **p-combinaison**) des n éléments de E.

Notation. Le nombre de combinaisons p à p de n éléments se note C_n^p ou aussi $\dbinom{n}{p}$ (qui se lit : p parmi n). On notera que n est placé en bas dans C_n^p et en haut dans $\dbinom{n}{p}$. La notation $\dbinom{n}{p}$ est la plus utilisée en ce moment mais ne s'avère pas toujours très pratique. Les nombres $C_n^p = \dbinom{n}{p}$ s'appellent aussi les coefficients binomiaux car ce sont les coefficients du développement du binôme $(a+b)^n$.

Théorème 21. Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de combinaisons p à p des n éléments de E (ou encore le nombre de parties à p éléments de E) est :

- $C_n^0 = \dbinom{n}{0} = 1$ si $p = 0$,
- $C_n^p = \dbinom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $1 \leqslant p \leqslant n$,
- $C_n^p = \dbinom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Démonstration . Si $p = 0$, il y a une partie et une seule à p éléments de E à savoir $\varnothing$.
Une partie de E a un cardinal inférieur ou égal à n et donc, si $p > n$, le nombre de parties à p éléments de E est 0.

Dorénavant, on suppose que $1 \leqslant p \leqslant n$. Notons $\mathcal{A}(n,p)$ l'ensemble des arrangements p à p des n éléments de E qui est aussi l'ensemble des p-uplets sans répétition des éléments de E et $\mathcal{C}(n,p)$ l'ensemble combinaisons p à p des n éléments de E qui est aussi l'ensemble des parties à p éléments de E.
Sur $\mathcal{A}(n,p)$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall \left((x_1,\ldots,x_p), (x_1',\ldots,x_p')\right) \in (\mathcal{A}(n,p))^2,\ (x_1,\ldots,x_p)\,\mathcal{R}\,(x_1',\ldots,x_p') \Leftrightarrow \{x_1,\ldots,x_p\} = \left\{x_1',\ldots,x_p'\right\}.$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}(n,p)$. Une classe donnée est constituée de exactement $p!$ éléments (les p-uplets d'image donnée $\{x_1,\ldots,x_p\}$ sont les $p!$ permutations du p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)$). Le nombre de ces classes est le cardinal de $\mathcal{C}(n,p)$, à savoir C_n^p. Puisque les classes d'équivalence constituent une partition de $\mathcal{A}(n,p)$, on en déduit que

$$A_n^p = p!C_n^p$$

et donc

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!}.$$

❑

⇨ **Commentaire** .

◇ *Dans tous les cas, on a* $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

◇ *Quand on doit calculer explicitement un coefficient binomial avec des « vrais nombres », on choisit toujours la formule simplifiée* $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$. *Par exemple,* $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 8 \times 7 = 56$ *et non pas* $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!5!}$ *ou aussi* $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ *et non pas* $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$.

Une combinaison p à p de n éléments ou encore une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments peut encore s'interpréter comme un **tirage simultané** de p éléments parmi n. Donc,

le nombre de tirages simultanés de p objets parmi n est C_n^p.

Deux situations issues de la vie courante rentrent dans ce cadre : le loto et les jeux de cartes.

Pour le loto, on coche six numéros dans une grille contenant les 49 numéros de 1 à 49. Le jour du tirage, on place dans une urne 49 boules numérotées de 1 à 49. On en tire simultanément 6 (l'ordre dans lequel ces boules apparaissent les unes après les autres n'ayant aucune importance). Le nombre de tirages possibles est :

$$C_{49}^6 = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 49 \times 47 \times 46 \times 3 \times 44 = 13\,983\,816,$$

et on a donc une chance sur $13\,983\,816$ d'avoir coché les six bons numéros.

Pour les jeux de cartes, on se contentera d'un seul exemple. Au poker, on peut jouer avec un jeu de 32 cartes. On distribue une main de cinq cartes à chaque joueur. Le nombre de mains différentes que peut recevoir un joueur est aussi le nombre de tirages simultanés (même si les cartes sont données l'une après l'autre) de 5 cartes parmi 32 à savoir

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 31 \times 29 \times 28 = 201\,376.$$

Le calcul des probabilités de chaque annonce au poker commence par le calcul précédent. Nous vous renvoyons à la planche d'exercices n° 1 correspondante pour la suite des calculs.

Exercice 2. Le plan est rapporté à un repère $\mathcal{R}$. On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q étant des entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou d'une unité vers le haut. Combien y-a-t-il de chemins possibles ?

Solution 2. On pose « H = vers le haut » et « D = vers la droite ». Un exemple de chemin de $(0, 0)$ à (p, q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est le nombre d'anagrammes du mot précédent. Il y en a $\dbinom{p+q}{p}$ (nombre de choix de l'emplacement des p lettres D dans $p+q$ emplacements).

⇨ **Commentaire** . *Cet exercice est le point de départ d'un célèbre problème de probabilité : le problème du scrutin.*

3.2 Retour sur les coefficients binomiaux et le binôme de Newton

Nous avons déjà donné différentes propriétés de calcul des coefficients binomiaux dans le chapitre « Les symboles $\sum$ et $\prod$. Le binôme de Newton » en donnant des démonstrations algébriques des différentes formules c'est-à-dire des démonstrations consistant en des calculs sur l'expression $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Nous allons maintenant revenir sur quelques unes de ces formules en en donnant une **démonstration combinatoire** c'est-à-dire une démonstration basée sur des ensembles et des dénombrements.

Théorème 22. Soient $n \in \mathbb{N}$ puis $p \in [\![0, n]\!]$. Alors,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Démonstration . Notons $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble donné E à n éléments. Il s'agit de démontrer que $\text{card}\left(\mathcal{P}_p(E)\right) = \text{card}\left(\mathcal{P}_{n-p}(E)\right)$.

Soient $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(E) & \rightarrow & \mathcal{P}_{n-p}(E) \\ A & \mapsto & C_E A \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{n-p}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}_p(E) \\ A & \mapsto & C_E A \end{array}$. Puisque le cardinal du complémentaire d'une partie à p éléments (resp. $n-p$ éléments) est $n-p$ (resp. p), φ et ψ sont bien des applications. De plus, $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathcal{P}_p(E)}$ et $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{P}_{n-p}(E)}$.

On sait alors que φ est une bijection. En particulier, $\text{card}\left(\mathcal{P}_p(E)\right) = \text{card}\left(\mathcal{P}_{n-p}(E)\right)$ ou encore $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

❑

Théorème 23. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n-1$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration . Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Il y a $\binom{n+1}{p+1}$ parties à $p+1$ éléments de E. Soit a un élément fixé de E.

Une partie à $p+1$ éléments de E est de l'un des deux types disjoints suivants : les parties à $p+1$ éléments qui contiennent a (type I) et les parties à $p+1$ éléments qui ne contiennent pas a (type II).

Les parties du type I sont les parties à $p+1$ éléments de $E \setminus \{a\}$. Il y en a $\binom{n}{p+1}$.

Les parties du type II sont la réunion de $\{a\}$ et d'une partie quelconque à p éléments de $E \setminus \{a\}$. Il y en a autant que de parties à p éléments de $E \setminus \{a\}$ à savoir $\binom{n}{p}$.

Finalement, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

❑

On rappelle que la formule du théorème 23 reste vraie dans tous les cas (même si $p \geqslant n$). On rappelle aussi que cette formule permet de remplir le **triangle de Pascal**.

Théorème 24. Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif dont l'élément neutre pour $\times$ est noté 1. Soient a et b deux éléments de E qui commutent. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

en adoptant la convention $a^0 = 1$ et $b^0 = 1$.

Démonstration . Quand on développe $(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \ldots \times (a+b)$, on obtient une somme de $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ termes. Chacun de ces termes « est un mot » de n lettres du type $abbaaaba \ldots a$. Pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, on regroupe tous les termes contenant exactement k fois les lettre a (et donc $n-k$ fois la lettre b). Puisque a et b commutent, les mots contenant exactement k fois la lettre a s'écrivent tous $a^k b^{n-k}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ donné, le nombre des termes du type $a^k b^{n-k}$ est encore le nombre de choix des k emplacements des a dans n positions : il y en a $\binom{n}{k}$. finalement,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

❑

3.3 Cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Théorème 25. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration . On peut donner trois démonstrations de ce résultat qui ont chacune leur propre intérêt.

1ère démonstration. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments de E. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) &= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{card}\left(\mathcal{P}_p(E)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}\\ &= (1+1)^n = 2^n.\end{aligned}$$

2ème démonstration. Soit $\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \{0,1\}^E\\ & A & \mapsto & \chi_A\end{array}$. φ est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$.

Soit $(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2$.

$$\varphi(A)=\varphi(B)\Rightarrow \chi_A=\chi_B \Rightarrow \forall x\in E,\ (\chi_A(x)=1\Leftrightarrow \chi_B(x)=1)\Rightarrow \forall x\in E,\ (x\in A\Leftrightarrow x\in B)\Rightarrow A=B.$$

Donc, φ est injective.

Soit $f\in\{0,1\}^E$. Soit $A=\{x\in E/\ f(x)=1\}$. Pour $x\in E$, si $x\in A$, $f(x)=1=\chi_A(x)$ et si $x\notin A$, $f(x)=0=\chi_A(x)$. Donc, $f=\chi_A=\varphi(A)$. Ceci montre que φ est surjective et finalement que φ est bijective.

Puisque φ est une bijection,

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))=\mathrm{card}\left(\{0,1\}^E\right)=2^n.$$

3ème démonstration. On montre le résultat par récurrence sur le cardinal n de E.

- Si $n=0$, $E=\varnothing$ puis $\mathcal{P}(E)=\{\varnothing\}$. Dans ce cas, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))=1=2^0$.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que pour tout ensemble E à n éléments, on a $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))=2^n$. Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Soit a un élément fixé de E. Il y a deux types disjoints de parties de E.
Type I : les parties qui ne contiennent pas a. Ce sont les parties de $E\setminus\{a\}$. Par hypothèse de récurrence, il y en a 2^n.
Type II : les parties qui contiennent a. Ces parties sont la réunion de $\{a\}$ et d'une partie de $E\setminus\{a\}$. Leur nombre est encore le nombre de parties de $E\setminus\{a\}$. Il y en a 2^n.

  Au total,

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))=2^n+2^n=2\times 2^n=2^{n+1}.$$

Le résultat est démontré par récurrence. ❑

Exercice 3. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}$:

1) à l'aide de la formule du binôme de Newton,

2) grâce à une démonstration combinatoire.

Solution 3.

1) Puisque $n\geqslant 1$,

$$0=0^n=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}-\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1},$$

et donc $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}$.

2) Soit E un ensemble à n éléments ($n\in\mathbb{N}^*$). On note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E ayant un nombre pair d'éléments et $\mathcal{P}_i(E)$ l'ensemble des parties de E ayant un nombre impair d'éléments. Soit a un élément fixé de E.

Soient $\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathcal{P}_p(E) & \rightarrow & \mathcal{P}_i(E)\\ & A & \mapsto & \left\{\begin{array}{l}A\setminus\{a\}\text{ si } a\in A\\ A\cup\{a\}\text{ si } a\notin A\end{array}\right.\end{array}$ et $\begin{array}{rccc}\psi: & \mathcal{P}_i(E) & \rightarrow & \mathcal{P}_p(E)\\ & A & \mapsto & \left\{\begin{array}{l}A\setminus\{a\}\text{ si } a\in A\\ A\cup\{a\}\text{ si } a\notin A\end{array}\right.\end{array}$. φ et ψ sont clairement des applications.

Vérifions que $\psi\circ\varphi=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}_p(E)}$. Soit $A\in\mathcal{P}_p(E)$.

- si $a\in A$, $\psi(\varphi(A))=\psi(A\setminus\{a\})=(A\setminus\{a\})\cup\{a\}=A$.
- si $a\notin A$, $\psi(\varphi(A))=\psi(A\cup\{a\})=(A\cup\{a\})\setminus\{a\}=A$.

Donc, pour tout $A \in \mathcal{P}_p(E)$, $\psi(\varphi(A)) = A$. Par suite, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_p(E)}$. De même, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_i(E)}$. On sait alors que φ est une bijection. En particulier, $\mathrm{card}\,(\mathcal{P}_p(E)) = \mathrm{card}\,(\mathcal{P}_i(E))$ ou encore $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}$.

⇨ **Commentaire** . *Dans l'exercice précédent, l'idée du passage au complémentaire ne marche que quand* n *est impair (dans ce cas, le complémentaire d'une partie paire est une partie impaire et vice versa). L'idée de l'exercice marche dans tous les cas : pour obtenir une partie impaire à partir d'une partie paire, il suffit de lui rajouter ou de lui enlever un élément.*