Planche n° 33. Matrices (partie II). Corrigé

Exercice n° 1

1) Soient $u = 2e_1 - 3e_2 + 5e_3$. La matrice colonne dont les composantes sont les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ est $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. $MX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $f(2e_1 - 3e_2 + 5e_3) = e_1 + 2e_2 - 3e_3$.

2) Soient $u = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ -3x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ z = x \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 2$. Or, $u(e_2) = e_1 - e_2$ et $u(e_3) = e_2 - e_3$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$ qui est un plan vectoriel et donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$. On peut noter que $e_1 - 2e_2 + e_3 = (e_1 - e_2) - (e_2 - e_3) \in \mathrm{Im}(f)$ et donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

3)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0_3.$$

4) $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Une base de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ est $(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$ et donc $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$. On note que l'égalité $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ fournit $f^2 \circ f = 0$ puis $f^3 = 0$ et donc $M^3 = 0_3$, égalité obtenue à la question précédente.

D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$ est une droite vectorielle. Mais $f^3 = 0$ s'écrit encore $f \circ f^2 = 0$, et donc $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(f)$ qui est une droite vectorielle. Donc, $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$.

5) $(I_3 - M)\left(I_3 + M + M^2\right) = I_3 - M^3 = I_3$. Par suite, $I_3 - M$ est inversible à droite et donc inversible et

$$(I_3 - M)^{-1} = I_3 + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 2

Soient x et y deux réels.

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x\cos y - \sin x\sin y & -(\sin x\cos y + \cos x\sin y) \\ \sin x\cos y + \cos x\sin y & \cos x\cos y - \sin x\sin y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = A(x+y).$$

En particulier,

$$A(x)A(-x) = A(-x)A(x) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

et $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$.

On a aussi, pour n entier naturel non nul donné :

$$(A(x))^n = A(x)A(x)...A(x) = A(x + x... + x) = A(nx),$$

ce qui reste clair pour $n = 0$ car $A(x)^0 = I_2 = A(0)$. Enfin, $(A(x))^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ (A(x))^n = A(nx) = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}.}$$

Remarque. On peut montrer que la matrice $A(x)$ est la matrice de la rotation vectorielle r d'angle x dans une certaine base orthonormée directe. L'égalité $(A(x))^n = A(nx)$ s'interprète alors sous la forme : f^n est la rotation d'angle nx.

Exercice n° 3

1) $\text{rg}(f) = \text{rg}\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), f\left(e_3\right)\right) = \text{rg}\left(f\left(e_2\right), f\left(e_3\right), f\left(e_1\right)\right)$. La matrice de cette dernière famille dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. La famille $\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), f\left(e_3\right)\right)$ est donc de rang 3 puis $\text{rg}(f) = 3$. On sait alors que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Posons $e'_1 = f\left(e_1\right)$, $e'_2 = f\left(e_2\right)$ et $e'_3 = f\left(e_3\right)$ de sorte que $f^{-1}\left(e'_1\right) = e_1$, $f^{-1}\left(e'_2\right) = e_2$ et $f^{-1}\left(e'_3\right) = e_3$.

$$\left\{\begin{array}{l} e'_1 = e_3 \\ e'_2 = e_1 - 3e_3 \\ e'_3 = e_2 + 3e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_3 = e'_1 \\ e_1 = 3e'_1 + e'_2 \\ e_2 = -3e'_1 + e'_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f^{-1}\left(e_3\right) = e_1 \\ f^{-1}\left(e_1\right) = 3e_1 + e_2 \\ f^{-1}\left(e_2\right) = -3e_1 + e_3 \end{array}\right.$$

Donc,

$$M^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) et 3) Posons $u_1 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(u_1) = u_1 \Leftrightarrow (f - \text{Id})(u_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

On prend $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

Posons $u_2 = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$f(u_2) = u_1 + u_2 \Leftrightarrow (f - \text{Id})\left(u_2\right) = u_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ et } z = x + 2.$$

On prend $u_2 = e_2 + 2e_3$.

Posons $u_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$f\left(u_3\right) = u_2 + u_3 \Leftrightarrow (u - \text{Id})\left(u_3\right) = u_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = x \text{ et } z = x + 1.$$

On prend $u_3 = e_3$.

La matrice de la famille (u_1, u_2, u_3) dans la base (e_1, e_2, e_3) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et est donc inversible. Par suite $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Enfin,

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = e_2 + 2e_3 \\ u_3 = e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_3 = u_3 \\ e_2 = u_2 - 2u_3 \\ e_1 = u_1 - u_2 + u_3 \end{array}\right.,$$

et donc

$$P^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Soit T est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les formules de changement de bases s'écrivent $T = P^{-1}AP$ ou encore $A = PTP^{-1}$. Par suite, pour tout relatif n, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $N^3 = 0_3$.

Donc, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, puisque I_3 et N commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$T^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = -1$, $(I_3 + N)\left(I_3 - N + N^2\right) = I_3 + N^3 = I$ et donc

$$T^{-1} = (I_3 + N)^{-1} = I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{(-1)(-1-1)}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la formule reste vraie pour $n = -1$. Enfin, pour n entier naturel non nul donné, $T^{-n} = \left(I_3 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2\right)^{-1}$ mais $\left(I_3 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2\right)\left(I_3 - nN + \dfrac{-n(-n-1)}{2}N^2\right) = I_3$ et donc $T^{-n} = I_3 - nN + \dfrac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ T^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 1 & n+1 & n(n+1)/2 \\ 1 & n+2 & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1)(n-2)/2 & -n(n-2) & n(n-1)/2 \\ n(n-1)/2 & -(n-1)(n+1) & n(n+1)/2 \\ n(n+1)/2 & -n(n+2) & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui fournit $f^n(e_1)$, $f^n(e_2)$ et $f^n(e_3)$.

Exercice n° 4

1) Pour P élément de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P) = e^{X^2}(Pe^{-X^2})' = e^{X^2}(P'e^{-X^2} - 2XPe^{-X^2}) = P' - 2XP.$$

Ainsi, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $f(P) = P' - 2XP$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, et f est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

De plus, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P' - 2XP) + \mu(Q' - 2XQ) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

f est élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.

2) On ordonne les bases canoniques suivant les puissances croissantes de X. La matrice A cherchée est élément de $\mathcal{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$.

Pour $k = 0$, $f(X^k) = f(1) = -2X$ et pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $f(X^k) = kX^{k-1} - 2X^{k+1}$. On a donc :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&\dots&0\\-2&0&2&0&&\vdots\\0&-2&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\&&&\ddots&\ddots&n\\\vdots&&&\ddots&-2&0\\0&\dots&&\dots&0&-2\end{pmatrix}.$$

3) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P)=0$. Si P n'est pas nul, $-2XP$ a un degré strictement plus grand que P' et donc $f(P)$ n'est pas nul. Par suite, $\mathrm{Ker}f=\{0\}$ (f est donc injective) et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}_n[X])-0=n+1$. Puisque $\dim(\mathrm{Im}(f))<\dim(\mathbb{R}_{n+1}[X])$, ceci montre que $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (et donc f n'est pas surjective).

Exercice n° 5

f n'est pas nul et donc $\dim(\mathrm{Ker}f)\leqslant 2$. Puisque $f^2=0$, $\mathrm{Im}f\subset\mathrm{Ker}f$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}f)\geqslant \mathrm{rg}f=3-\dim(\mathrm{Ker}f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}f)\geqslant\dfrac{3}{2}$.
Finalement, $\dim(\mathrm{Ker}f)=2$. $\mathrm{Ker}f$ est un plan vectoriel et, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}f$ est une droite vectorielle, contenue dans $\mathrm{Ker}f$.

f n'est pas nul et donc il existe e_1 tel que $f(e_1)\neq 0$ (et en particulier $e_1\neq 0$). Posons $e_2=f(e_1)$. Puisque $f^2=0$, $f(e_2)=f^2(e_1)=0$ et e_2 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_3 de $\mathrm{Ker}f$ tel que (e_2,e_3) soit une base de $\mathrm{Ker}f$.

Montrons que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$$\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3=0\Rightarrow f(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3)=0\Rightarrow \alpha e_2=0\Rightarrow\alpha=0\ (\text{car } e_2\neq 0).$$

Il reste $\beta e_2+\gamma e_3=0$ et donc $\beta=\gamma=0$ car la famille (e_2,e_3) est libre.
Finalement, $\alpha=\beta=\gamma=0$ et on a montré que (e_1,e_2,e_3) est libre. Puisque cette famille est de cardinal 3, c'est une base de R^3. Dans cette base, la matrice A de f s'écrit : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Exercice n° 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^p$. Pour $1\leqslant k\leqslant p$, on a $f(e_k)=e_{p+1-k}$ et donc $f^2(e_k)=e_k$. Ainsi, $A^2=I_p$. Mais alors, pour n entier relatif donné, $A^n=I_p$ si n est pair et $A^n=A$ si n est impair.

Exercice n° 7

Pour $x\in]-1,1[$, posons $M(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1&x\\x&1\end{pmatrix}$. Posons ensuite $G=\{M(x),\ x\in]-1,1[\}$.
Soit alors $x\in]-1,1[$. Il existe un réel a (et un seul) tel que $x=\mathrm{th}a$. On a

$$M(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1&x\\x&1\end{pmatrix}=\mathrm{ch}\,a\begin{pmatrix}1&\mathrm{th}\,a\\\mathrm{th}\,a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,a&\mathrm{sh}\,a\\\mathrm{sh}\,a&\mathrm{ch}\,a\end{pmatrix}.$$

Posons, pour $a\in\mathbb{R}$, $N(a)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,a&\mathrm{sh}\,a\\\mathrm{sh}\,a&\mathrm{ch}\,a\end{pmatrix}$. On a ainsi $\forall x\in]-1,1[,\ M(x)=N(a)$ où a est le réel tel que $x=\mathrm{th}\,a$ ou aussi, $\forall a\in\mathbb{R},\ N(a)=M(\mathrm{th}\,a)$. Par suite, $G=\{N(a),\ a\in\mathbb{R}\}$.
Soit alors $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}N(a)N(b)&=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,a&\mathrm{sh}\,a\\\mathrm{sh}\,a&\mathrm{ch}\,a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,b&\mathrm{sh}\,b\\\mathrm{sh}\,b&\mathrm{ch}\,b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b&\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a\\\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a&\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(a+b)&\mathrm{sh}(a+b)\\\mathrm{sh}(a+b)&\mathrm{ch}(a+b)\end{pmatrix}=N(a+b).\end{aligned}$$

Montrons alors que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$.

- $N(0)=I_2\in G$ et donc G est non vide.
- $\forall a\in\mathbb{R},\ \det(N(a))=\mathrm{ch}^2\,a-\mathrm{sh}^2\,a=1\neq 0$ et donc $G\subset\mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.

- $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ N(a)N(b)=N(a+b)\in G$ et $\forall a\in\mathbb{R},\ (N(a))^{-1}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch} a & -\operatorname{sh} a\\ -\operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a\end{pmatrix}=N(-a)\in G$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$.

Exercice n° 8

1) La démonstration la plus simple apparaîtra dans le chapitre suivant : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ou encore si et seulement si aucun des coefficients diagonaux n'est nul.

Pour l'instant, le plus simple est d'utiliser le rang d'une matrice. Si aucun des coefficients diagonaux n'est nul, on sait que le rang de la matrice est son format et donc que cette matrice est inversible.

Réciproquement, notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que A soit une matrice triangulaire inférieure dont le coefficient ligne i, colonne i, est nul. Si $i=n$, la dernière colonne de A est nulle et A n'est pas de rang n et donc n'est pas inversible. Si $i<n$, alors les $n-i+1$ dernières colonnes sont dans $\text{Vect}(e_{i+1},\dots,e_n)$ qui est de dimension au plus $n-i(<n-i+1)$, et encore une fois, la famille des colonnes de A est liée et donc la matrice A n'est pas inversible.

2) Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathscr{B}'=(e_n,\dots,e_1)$. $\mathscr{B}'$ est encore une base de $\mathbb{K}^n$. Soit alors P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Les formules de changement de bases permettent d'affirmer que $A'=P^{-1}AP$ et donc que A et A' sont semblables.

Vérifions alors que A' est une matrice triangulaire inférieure. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, posons $e'_i=e_{n+1-i}$.
A est triangulaire supérieure. Donc, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f(e_i)\in\text{Vect}(e_1,\dots,e_i)$. Mais alors, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f(e'_{n+1-i})\in\text{Vect}(e'_n,\dots,e'_{n+1-i})$ ou encore, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f(e'_i)\in\text{Vect}(e'_n,\dots,e'_i)$. Ceci montre que A' est une matrice triangulaire inférieure.

Exercice n° 9

1) $E=\text{Vect}(I,J)$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La famille (I,J) est libre car la matrice J n'est pas une matrice scalaire et donc est une base de E. Par suite, $\dim(E)=2$.

2) $J^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=2J-I$. Plus généralement, pour $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$,

$$M(x,y)M(x',y')=(xI+yJ)(x'I+y'J)=xx'I+(xy'+yx')J+yy'J^2=(xx'-yy')I+(xy'+yx'+2yy')J\ (*).$$

Montrons alors que $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R},+,\times)$.

- E est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$. En particulier, $(E,+)$ est un groupe commutatif.
- D'après $(*)$, la restriction de $\times$ à E est une loi interne dans E.
- $I_2\in E$.
- D'après $(*)$, $\times$ est commutative dans E.

Donc, E est un sous-anneau commutatif de l'anneau $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

3) Soit $((x,y),(x',y'))\in(\mathbb{R}^2)^2$.

$$\begin{aligned}M(x,y)\times M(x',y')=I &\Leftrightarrow (xx'-yy')I+(xy'+yx'+2yy')J=I\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}xx'-yy'=1\\ yx'+(x+2y)y'=0\end{array}\right.\ \text{(car la famille } (I,J) \text{ est libre).}\end{aligned}$$

Le déterminant de ce dernier système d'inconnues x' et y' vaut $x(x+2y)+y^2=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$. Si $y\neq -x$, ce système admet un et seule couple solution.
Par suite, si $y\neq -x$, il existe $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tel que $M(x,y)M(x',y')=I$. Dans ce cas, la matrice $M(x,y)$ est inversible dans E.
Si $y=-x$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}x(x'+y')=1\\ -x(x'+y')=0\end{array}\right.$ et n'a pas de solution.

4) a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2=I\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\2y(x+y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=1\end{array}\right.\ \text{ou}\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\x+y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}y=0\\x=-1\end{array}\right..$$

Dans E, l'équation $X^2=I$ admet exactement deux solutions à savoir I et $-I$.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ 2y(x+y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{array} \right. \text{ ou} \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x.$$

Dans E, l'équation $X^2 = 0$ admet pour solutions les matrices de la forme $\lambda(J - I) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x,y)^2 = M(x,y) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = x \\ 2y(x+y) = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = x \\ y(2x + 2y - 1) = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 = x \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = -x + \dfrac{1}{2} \\ x^2 - \left(-x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = x \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{4} = 0 \\ y = -x + \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Dans E, l'équation $X^2 = X$ admet exactement deux solutions à savoir 0 et I.

5) Posons $N = J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = 0$ et plus généralement $N^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$M(x,y) = xI + yJ = xI + y(I + N) = (x + y)I + yN.$$

Puisque les matrices $(x + y)I$ et yN commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} (M(x,y))^n = ((x+y)I + yN)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+y)^{n-k} I^{n-k} y^k N^k \\ &= (x+y)^n I + ny(x+y)^{n-1} N = \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice n° 10

Soit (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On cherche $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que

$$f \circ g(e_1) = -e_2 + e_3, \; f \circ g(e_2) = -e_1 + e_3 \text{ et } f \circ g(e_3) = -e_1 - e_2 + 2e_3 = f \circ g(e_1 + e_2).$$

On pose $g(e_1) = i$, $g(e_2) = j$ et $g(e_3) = i + j$, puis $f(i) = -e_2 + e_3$ et $f(j) = -e_1 + e_3$. Les applications linéaires f et g conviennent, ou encore si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A et B désignent maintenant deux matrices quelconques, éléments de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ respectivement, telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons $(AB)^2$. On obtient

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = AB.$$

Mais alors, en multipliant les deux membres de cette égalité par B à gauche et A à droite, on obtient

$$(BA)^3 = (BA)^2 \ (*).$$

Notons alors que

$$\text{rg}(BA) \geqslant \text{rg}(ABAB) = \text{rg}((AB)^2) = \text{rg}(AB) = 2,$$

et donc, BA étant une matrice carrée de format 2, $\text{rg}(BA) = 2$. BA est donc une matrice inversible. Il en est de même de $(BA)^2$ et on peut simplifier les deux membres de l'égalité $(*)$ par $(BA)^2$. On obtient $BA = I_2$.

Exercice n° 11

Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille d'éléments de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

Par définition de A, on a

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ e'_i = ie_i + \sum_{j=i+1}^{n} e_j \text{ et } e'_n = ne_n.$$

En retranchant membre à membre ces égalités, on obtient

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ e'_i - e'_{i+1} = i\left(e_i - e_{i+1}\right) \text{ et } e'_n = ne_n,$$

ou encore

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ e_i - e_{i+1} = \frac{1}{i}(e'_i - e'_{i+1}) \text{ et } e_n = \frac{1}{n}e'_n.$$

Mais alors, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
e_i &= \sum_{j=i}^{n-1}(e_j - e_{j+1}) + e_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}(e'_j - e'_{j+1}) + \frac{1}{n}e'_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j + \frac{1}{n}e'_n \\
&= \frac{1}{i}e'_i + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j \\
&= \frac{1}{i}e'_i - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j(j-1)}e'_j
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{C}^n = \text{Vect}(e_1, ..., e_n) \subset \text{Vect}(e'_1, ..., e'_n)$, ce qui montre que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}^n$ et donc une base de $\mathbb{C}^n$. Par suite, A est inversible et

$$A^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\mathscr{B} = (a'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ où } a'_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{i} \text{ si } i = j \\ -\dfrac{1}{i(i-1)} \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{array}\right. .$$

Exercice n° 12

Soit $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A commute avec toute matrice, en particulier : $\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2,\ AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Maintenant,

$$AE_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} \text{ et } E_{i,j}A = \sum_{k,l} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

On note que si $k \neq i$ ou $l \neq j$, $E_{k,j} \neq E_{i,l}$. Puisque la famille $(E_{i,j})$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient : si $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$. D'autre part, le coefficient de $E_{i,j}$ est $a_{i,i}$ dans la première somme et $a_{j,j}$ dans la deuxième. Ces coefficients doivent être égaux.

Finalement, si A commute avec toute matrice, ses coefficients non diagonaux sont nuls et ses coefficients diagonaux sont égaux. Par suite, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. Réciproquement, si A est une matrice scalaire, A commute avec toute matrice.

Exercice n° 13

1)

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & m-\dfrac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1, C_2-\frac{1}{2}C_1, C_3-\frac{1}{3}C_1))$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 0 \\ 1/3 & 1/12 & m-\dfrac{7}{36} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3-C_2))$$

Si $m = \dfrac{7}{36}$, $\mathrm{rg}(A) = 2$ et si $m \neq \dfrac{7}{36}$, $\mathrm{rg}(A) = 3$ et A est inversible.

2)

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3) = \mathrm{rg}(C_1,C_2-C_1,C_3-C_1))$$

1er cas. Si a, b et c sont deux à deux distincts,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, si a, b et c sont deux à deux distincts alors $\mathrm{rg}(A) = 3$.

2ème cas. Si $b = c \neq a$ (ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$). A a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & 1 & 1 \\ b^2 & b & b \end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & 1 & 0 \\ b^2 & b & 0 \end{pmatrix}$.

Donc, si $b = c \neq a$ ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$, $\mathrm{rg}(A) = 2$.

3ème cas. Si $a = b = c$, il est clair dès le départ que A est de rang 1.

3) Puisque $\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \mathrm{rg}(C_1, C_2-aC_1, C_3-C_1, C_4-bC_1)$,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ 1 & b-a & 0 & a-b \\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

1er cas. Si $a \neq b$.

$$\mathrm{rg}A = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{rg}(L_1,L_2,L_3) = \mathrm{rg}(L_2,L_1,L_3)).$$

$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 2-a^2-ab \\ 1-ab & -1 & 2-b^2-ab \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (2-b^2-ab)+(2-a^2-ab) \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & 4-(a+b)^2 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq b$ et $a + b \neq \pm 2$, $\mathrm{rg}(A) = 4$ et si $a \neq b$ et $a + b = \pm 2$, $\mathrm{rg}(A) = 3$.

2ème cas. Si $a = b$.

$$\text{rg}A = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & 1-a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 1-a^2 & 0 & 1-a^2\end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2\\ 0 & 0\\ 1-a^2 & 1-a^2\end{pmatrix} = 1+\text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2\\ 1-a^2 & 1-a^2\end{pmatrix}$$

Si $a = b = \pm 1$, $\text{rg}(A) = 1$ et si $a = b \neq \pm 1$, $\text{rg}(A) = 2$.

4) Pour $n \geqslant 2$ et $j \in [\![1, n]\!]$, notons C_j la j-ème colonne de la matrice proposée.

$$C_j = (i+j+ij)_{1\leqslant i\leqslant n} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n} + j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n} = jU + V,$$

avec $U = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ \vdots\\ i+1\\ \vdots\\ n+1\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\forall j \in [\![1, n]\!],\ C_j \in \text{Vect}(U, V)$ ce qui montre que $\text{rg}A \leqslant 2$. De plus, la matrice extraite $\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 5 & 8\end{pmatrix}$ (lignes et colonnes 1 et 2) est inversible. Donc $\text{rg}(A) \geqslant 2$ et finalement $\text{rg}(A) = 2$. Si $n = 1$, $\text{rg}(A) = 1$.

5) On suppose $n \geqslant 2$. La j-ème colonne de la matrice s'écrit

$$C_j = (\sin i\cos j + \sin j\cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} = (\sin j)\, C + (\cos j)\, S \text{ avec } C = (\cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ et } S = (\sin i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Par suite, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j \in \text{Vect}(C, S)$ ce qui montre que $\text{rg}A \leqslant 2$. De plus, la matrice extraite formée des termes lignes et colonnes 1 et 2 est inversible car son déterminant vaut $\sin 2\sin 4 - \sin^2 3 = -0,7... \neq 0$ et finalement $\text{rg}(A) = 2$. Si $n = 1$, $\text{rg}(A) = 1$.

6) Déterminons KerA. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \text{Ker}A \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ ax_i + bx_{i+1} = 0 \text{ et} bx_1 + ax_n = 0\ (S).$$

1er cas. Si $a = b = 0$, alors clairement $\text{rg}(A) = 0$.

2ème cas. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $(S) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0$. Dans ce cas, $\text{Ker}A = \{0\}$ et donc $\text{rg}A = n$.

3ème cas. Si $a \neq 0$. Posons $\alpha = -\dfrac{b}{a}$.

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_k = \alpha x_{k+1} \text{ et } x_n = \alpha x_1\\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \alpha^{-(k-1)}x_1 \text{ et } x_n = \alpha x_1\\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \alpha^{-(k-1)}x_1 \text{ et } \alpha^n x_1 = x_1\end{aligned}$$

Mais alors, si $\alpha^n \neq 1$, le système (S) admet l'unique solution $(0, ..., 0)$ et $\text{rg}(A) = n$, et si $\alpha^n = 1$, $\text{Ker}A = \text{Vect}((1, \alpha^{n-1}, ..., \alpha^2, \alpha))$ est de dimension 1 et $\text{rg}A = n - 1$.

En résumé, si $a = b = 0$, $\text{rg}(A) = 0$ et si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\text{rg}(A) = n$. Si $a \neq 0$ et $-\dfrac{b}{a} \in U_n$, $\text{rg}(A) = n - 1$ et si $a \neq 0$ et $-\dfrac{b}{a} \notin U_n$, $\text{rg}(A) = n$.

Exercice n° 14

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f une forme linéaire non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \text{Ker}f$.
Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, posons $f(A) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}a_{i,j}$.

1er cas. Supposons $\exists (i, j) \in [\![1, n]\!]^2/\ i \neq j$ et $\alpha_{i,j} \neq 0$. On pose alors $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,k}$ et on considère

$$A = \sum_{k=1}^{n} E_{k,k} - \frac{S}{\alpha_{i,j}}E_{i,j}.$$

A est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et est donc inversible.

De plus, $f(A)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,k}-\frac{S}{\alpha_{i,j}}\alpha_{i,j}=S-S=0$ et A est élément de H.

2ème cas. Supposons $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ (i\neq j\Rightarrow\alpha_{i,j}=0)$. Alors, $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,i}a_{i,i}$.

Soit $A=E_{n,1}+E_{1,2}+E_{2,3}+\ldots+E_{n-1,n}$. A est inversible car par exemple égale à la matrice de passage de la base canonique $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ à la base $(e_n,e_1,\ldots,e_{n-1})$. De plus, $f(A)=0$ et donc $A\in H$.

Exercice nº 15

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur du noyau de A. Supposons $X\neq 0$. Soit i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}|=\text{Max}\{|x_i|,\ i\in[\![1,n]\!]\}$.

On a $|x_{i_0}|>0$. Mais alors,

$$\begin{aligned}AX=0&\Rightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j=0\\&\Rightarrow|a_{i_0,i_0}x_{i_0}|=\left|-\sum_{j\neq i_0}a_{i_0,j}x_j\right|\leqslant\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|\times|x_j|\leqslant|x_{i_0}|\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|\end{aligned}$$

Puisque $|x_{i_0}|>0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}|\leqslant\displaystyle\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$.

Ainsi, $\text{Ker}(A)\neq\{0\}\Rightarrow\exists i_0\in[\![1,n]\!]/\ |a_{i_0,i_0}|\leqslant\displaystyle\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$. Par contraposition,

$$\left(\forall i\in[\![1,n]\!],\ |a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|\right)\Rightarrow\text{Ker}(A)=\{0\}\Rightarrow A\in GL_(\mathbb{K}).$$

Exercice nº 16

Soient k et l deux entiers tels que $1\leqslant k\leqslant n$ et $1\leqslant l\leqslant n$. Le coefficient ligne k, colonne l de $A\overline{A}$ vaut :

$$\sum_{j=1}^{n}\omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(l-1)}=\sum_{j=1}^{n}\left(\omega^{k-l}\right)^{j-1}.$$

1er cas. Si $k=l$, $\omega^{k-l}=1$, et le coefficient vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}1=n$.

2ème cas. Si $k\neq l$. On a $-(n-1)\leqslant k-l\leqslant n-1$ avec $k-l\neq 0$ et donc, $k-l$ n'est pas multiple de n.
Par suite, $\omega^{k-l}\neq 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\omega^{k-l}\right)^{j-1}=\frac{1-\left(\omega^{k-l}\right)^n}{1-\omega}=\frac{1-1^{k-l}}{1-\omega}=0.$$

En résumé, $A\overline{A}=nI_n$. Donc A est inversible à gauche et donc inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{n}\overline{A}$.

Exercice nº 17

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, associe le polynôme $P(X+1)$.
Par la formule du binôme de Newton, on voit que A est la matrice de f dans la base canonique $(1,X,\ldots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
f est clairement un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, sa réciproque étant l'application qui, à un polynôme P associe le polynôme $P(X-1)$.

A est donc inversible et $A^{-1}=(b_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ où $b_{i,j}=0$ si $i>j$ et $b_{i,j}=(-1)^{i+j}\dbinom{i}{j}$ si $i\leqslant j$.

Exercice nº 18

1) Posons $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ de sorte que $A=I+J$. On a $J^2=2J$ et donc, plus généralement : $\forall k\geqslant 1,\ J^k=2^{k-1}J$. Mais alors, puisque I et J commutent, la formule du binôme de Newton fournit pour n entier naturel non nul donné :

$$A^n = (I+J)^n = I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k = I + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}\right)J = I + \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\right)-1\right)J$$
$$= I + \frac{1}{2}\left((1+2)^n - 1\right)J = I + \frac{1}{2}(3^n-1)J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}.$$

Pour n entier naturel donné, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $X_{n+1} = A \times X_n$ et donc,

$$X_n = A^n \times X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^n+1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n-1}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} + v_{n+1} = 3(u_n + v_n)$. Donc, la suite $u + v$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 + v_0 = 1$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 3^n \text{ (I)}.$$

De même, pour tout entier naturel n $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$. Donc, la suite $u + v$ est une suite constante. Puisque $u_0 - v_0 = 1$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - v_n = 1 \text{ (II)}.$$

En additionnant et en retranchant (I) et (II), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^n+1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n-1}{2}.$$

Exercice n° 19

On note r le rang de A. Si $r = 0$, A est nulle et donc B est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles P et Q de format n telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soient $P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ et $Q' = \begin{pmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$.

Un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{np}.$$

Donc P' est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \mathsf{P}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mathsf{P}^{-1} \end{pmatrix}$. De même, Q' est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \mathsf{Q}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mathsf{Q}^{-1} \end{pmatrix}$.

De plus, un calcul par blocs montre que

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}\mathsf{J}_r\mathsf{Q} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mathsf{P}\mathsf{J}_r\mathsf{Q} \end{pmatrix} = \mathsf{P}'\mathsf{J}_r'\mathsf{Q}' \text{ où } \mathsf{J}_r' = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mathsf{J}_r \end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente a la matrice J_r' et a donc même rang que J_r'. Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles, on voit que la matrice J_r' a même rang que la matrice I_{pr} à savoir pr. Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\text{rg}(\mathsf{B}) = p \times \text{rg}(\mathsf{A}).}$$

