Chapitre 32. Familles sommables

Plan du chapitre

1 Familles de réels positifs sommables

1.1 Définition

DÉFINITION 1. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si $\operatorname{Sup}\left\{\sum_{i\in J} u_i,\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\} < +\infty$.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite **non sommable** dans le cas contraire.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, la somme des éléments de cette famille ou encore, en plus condensé, la somme de cette famille est

$$S(u) = \sum_{i\in I} u_i = \operatorname{Sup}\left\{\sum_{i\in J} u_i,\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\}.$$

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Dans le cas d'une suite de réels positifs, on peut tout de suite faire le lien avec la convergence d'une série. Les notions de suite sommable et de série convergente coïncident :

Théorème 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n converge et dans ce cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

DÉMONSTRATION .

• Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable. Posons $S(u) = \operatorname{Sup}\left\{\sum_{k\in J} u_k,\ J\subset\mathbb{N},\ J \text{ fini}\right\}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $I_n = [\![0,n]\!]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n est une partie finie de $\mathbb{N}$ et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k\in I_n} u_k \leqslant S(u).$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Puisque la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, on sait que la série de terme général u_k, $k\in\mathbb{N}$, converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S(u).$$

• Supposons la la série de terme général u_n, $n\in\mathbb{N}$, converge. Soit J une partie finie non vide de $\mathbb{N}$. J admet donc un plus grand élément n. Puisque $J\subset[\![0,n]\!]$ et que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, on a

$$\sum_{k\in J} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, $\left\{\sum_{k\in J} u_k,\ J\subset\mathbb{N},\ J \text{ fini}\right\}$ est une partie non vide et majorée (par $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\left\{\sum_{k\in J} u_k,\ J\subset\mathbb{N},\ J \text{ fini}\right\}$ admet une borne supérieure $S(u)$ dans $\mathbb{R}$ ou encore que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable. De plus

$$S(u) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

En résumé, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n converge et de plus, en cas de convergence, $S(u) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant S(u)$ ou encore $S(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

❑

1.2 Propriétés des familles de réels positifs sommables

Théorème 2. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexée par I telles que pour tout $i \in I$, $u_i \leqslant v_i$.

Si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Démonstration . Supposons la famille $(v_i)_{i\in I}$ sommable. Alors, pour toute partie finie J de I,

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in J} v_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Donc, $\left\{\displaystyle\sum_{i\in J} u_i,\ J \text{ fini},\ J\subset I\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$. On en déduit que $\text{Sup}\left\{\displaystyle\sum_{i\in J} u_i,\ J \text{ fini},\ J\subset I\right\}$ existe dans $\mathbb{R}$ et que ce sup est inférieur ou égal à $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ ou encore la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.

Par contraposition, si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

❏

Théorème 3. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par I.

Si les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors pour tous réels positifs λ et μ, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration . Supposons les familles de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sommables. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+$.

Pour toute partie finie J de I, $\displaystyle\sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in J} u_i + \mu \sum_{i\in J} v_i \leqslant \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$. Donc, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et $S(\lambda u + \mu v) \leqslant \lambda S(u) + \mu S(v)$.

Pour $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_1 de I et une partie finie J_2 de I telles que $\displaystyle\sum_{i\in J_1} u_i \geqslant S(u) - \frac{\varepsilon}{2\lambda+1}$ et $\displaystyle\sum_{i\in J_2} v_i \geqslant S(v) - \frac{\varepsilon}{2\mu+1}$.

Soit $J = J_1 \cup J_2$. J est une partie finie de I et

$$\begin{aligned} S(\lambda u + \mu v) &\geqslant \sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in J} u_i + \mu \sum_{i\in J} v_i \geqslant \lambda \sum_{i\in J_1} u_i + \mu \sum_{i\in J_2} v_i \geqslant \lambda S(u) - \frac{\lambda\varepsilon}{2\lambda+1} + \mu S(v) - \frac{\mu\varepsilon}{2\mu+1} \\ &\geqslant \lambda S(u) + \mu S(v) - \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varepsilon}{2\lambda+1} - \frac{\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\varepsilon}{2\mu+1} = S(u) + S(v) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\lambda S(u) + \mu S(v) - \varepsilon \leqslant S(\lambda u + \mu v) \leqslant \lambda S(u) + \mu S(v)$. Quand ε tend vers 0, on obtient $S(\lambda u + \mu v) = \lambda S(u) + \mu S(v)$.

❏

Théorème 4. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute permutation σ de I, la famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est sommable et de plus

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

Démonstration . Soit σ une permutation de I. Pour tout $i \in I$, posons $u'_i = u_{\sigma(i)}$. Vérifions que la famille $(u'_i)_{i\in I}$ est sommable et que $\displaystyle\sum_{i\in I} u'_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

Soit J une partie finie de I. $\sigma(J)$ est encore une partie finie de I et donc

$$\sum_{i\in J} u'_i = \sum_{i\in J} u_{\sigma(i)} = \sum_{j\in\sigma(J)} u_j \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{\sum_{i\in J} u'_i,\ J\subset I,\ J \text{ finie}\right\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ (par le nombre $\sum_{i\in I} u_i$). Donc, la famille $(u'_i)_{i\in I}$ est sommable. De plus, $\sum_{i\in I} u'_i$ étant le plus petit des majorants de $\mathcal{E}$ et $\sum_{i\in I} u_i$ étant un majorant de $\mathcal{E}$, on en déduit que $\sum_{i\in I} u'_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

On a montré que pour toute famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ et toute permutation σ de I, la famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est sommable et de plus, $\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et σ une permutation de I. La famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est donc sommable. On applique alors le résultat précédent à la famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ et à la permutation σ^{-1} de I. On obtient $\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \geqslant \sum_{i\in I} u_{\sigma^{-1}(\sigma(i))} = \sum_{i\in I} u_i$ et finalement

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

❑

Le théorème précédent semble évident : cela semble être tout simplement la commutativité de l'addition. Ce n'est pas du tout le cas. La commutativité concerne les sommes finies. Cette commutativité devient un vrai problème dans le cas de sommes infinies. L'exercice qui suit est donné pour convaincre que l'addition d'une infinité de termes n'est pas une opération commutative. On a vu que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geqslant 1$, converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln(2).$$

Dans l'exercice qui suit, on modifie l'ordre des termes de la somme de la façon suivante : on prend deux termes positifs puis un négatif et on s'intéresse à la somme

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \ldots$$

Exercice 1. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $u_{3p+1} = \dfrac{1}{4p+1}$, $u_{3p+2} = \dfrac{1}{4p+3}$ et $u_{3p+3} = -\dfrac{1}{2p+2}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ obtenue par permutation des termes de la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On admet qu'il existe une constante γ telle que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ (constante d'Euler).

1) Montrer que la suite $(S_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite (on commencera par exprimer S_3n en fonction de termes de la suite $(H_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$).

2) Montrer que les suites $(S_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont même limite que la suite $(S_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. Que constate-t-on ?

Solution 1.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{3n} &= \sum_{k=1}^{3n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{3k+1} + u_{3k+2} + u_{3k+3}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n} - \frac{1}{2}H_n.
\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}S_{3n} &\underset{n\to+\infty}{=} (\ln(4n)+\gamma+o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(2n)+\gamma+o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(n)+\gamma+o(1))\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{2}\ln(2)+o(1).\end{aligned}$$

Donc, la suite $(S_{3n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n} = \frac{3}{2}\ln(2)$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{3n+1} = S_{3n} + u_{3n+1} = S_{3n} + \frac{1}{4n+1}$ et $S_{3n+2} = S_{3n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}$. Puisque $\frac{1}{4n+1}$ et $\frac{1}{4n+3}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, les suites (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergent et ont même limite que la suite (S_{3n}) à savoir $\frac{3}{2}\ln(2)$.

3) Montrons alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{3}{2}\ln(2)$. Soit $\varepsilon>0$.

- Il existe $p_1\in\mathbb{N}$ tel que, pour $p\geqslant p_1$, $\left|u_{3p+1}-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon$.
- Il existe $p_2\in\mathbb{N}$ tel que, pour $p\geqslant p_2$, $\left|u_{3p+2}-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon$.
- Il existe $p_3\in\mathbb{N}$ tel que, pour $p\geqslant p_3$, $\left|u_{3p+3}-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon$.

Soit $n_0=\mathrm{Max}\{3p_1+1, 3p_2+2, 3p_3+3\}$. Soit $n\geqslant n_0$.

- Si $n\in 1+3\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=3p+1$. Mais alors,

$$n\geqslant n_0 \Rightarrow 3p+1\geqslant 3p_1+1 \Rightarrow p\geqslant p_1 \Rightarrow \left|u_{3p+1}-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon \Rightarrow \left|u_n-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon.$$

- Si $n\in 2+3\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=3p+2$. Mais alors,

$$n\geqslant n_0 \Rightarrow 3p+2\geqslant 3p_2+2 \Rightarrow p\geqslant p_2 \Rightarrow \left|u_{3p+2}-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon \Rightarrow \left|u_n-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon.$$

- Si $n\in 3+3\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=3p+3$. Mais alors,

$$n\geqslant n_0 \Rightarrow 3p+3\geqslant 3p_1+3 \Rightarrow p\geqslant p_3 \Rightarrow \left|u_{3p+3}-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon \Rightarrow \left|u_n-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon.$$

On a montré que : $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(n\geqslant n_0\Rightarrow\left|u_n-\frac{3}{2}\ln(2)\right|\leqslant\varepsilon\right)$. Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{2}\ln(2)$.

Ainsi, la série de terme général u_n converge et a pour somme $\frac{3}{2}\ln(2)$. En particulier,

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{3}{2}\ln(2)\neq\ln(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

La démonstration du théorème suivant est hors programme.

Théorème 5. (Théorème de sommation par paquets)

Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs indexée par I.

Soient J une ensemble non vide puis $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I indexée par J. Alors,

• pour chaque $j\in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable ;

• la famille $\left(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable et de plus

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)=\sum_{i\in I} u_i.$$

Ainsi, si la famille $(u_i)_{i\in I}$ on peut associer et permuter à volonté les termes de la famille sans affecter ni l'existence, ni la valeur de la somme $\sum_{i\in I} u_i$.

Un cas particulier du théorème précédent est le cas où l'ensemble des indices est un produit cartésien $I\times J$ où I et J sont deux ensembles non vides (dans ce cas, les indices sont des couples (i,j) où $i\in I$ et $j\in J$) :

Théorème 6. (théorème de Fubini)

Soient I et J deux ensembles non vide d'indices. Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de réels positifs indexée par $I\times J$.

Alors,

- pour chaque $j\in J$, la famille $(u_{i,j})_{i\in I}$ est sommable puis la famille $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable ;
- pour chaque $i\in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable puis la famille $\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable ;
- $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_i$.

On admet également ce théorème.

2 Familles complexes sommables

2.1 Définition

Définition 2. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par I.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable ou encore la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

Exemple. Pour $n\in\mathbb{Z}$, posons $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n^2+1}$ où θ est un réel donné. Pour tout n de $\mathbb{Z}$, $|u_n| = \dfrac{1}{n^2+1}$ avec $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{n^2+1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} < +\infty$. Donc, la famille $\left(\dfrac{e^{in\theta}}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. ❑

On fait de nouveau le lien entre sommabilité et convergence d'une série dans le cas particulier où $I=\mathbb{N}$. Le théorème 1 et la définition de la sommabilité fournissent immédiatement

Théorème 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n est absolument convergente.

2.2 Somme d'une famille sommable de réels

Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I. Pour $i\in I$, on pose

$$u_i^+ = \mathrm{Max}\,(u_i,0) = \frac{|u_i|+u_i}{2} \quad \text{et} \quad u_i^- = -\mathrm{Min}\,(u_i,0) = \mathrm{Max}\,(-u_i,0) = \frac{|u_i|-u_i}{2}.$$

Pour tout $i\in I$, u_i^+ et u_i^- sont des réels positifs tels que

$$u_i^+ + u_i^- = |u_i| \quad \text{et} \quad u_i^+ - u_i^- = u_i.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 8. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.

Démonstration . Si les familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables, alors la famille $(|u_i|)_{i\in I} = \left(u_i^+ + u_i^-\right)_{i\in I}$ est sommable d'après le théorème 3. Par définition, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Inversement, si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, par définition la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable. Puisque pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i^+ \leqslant |u_i|$ et $0 \leqslant u_i^- \leqslant |u_i|$, le théorème 2 permet d'affirmer que les familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables.

❑

Définition 3. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels indexée par I.

La **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est le réel

$$S(u) = \sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- .$$

2.3 Somme d'une famille sommable de complexes

Théorème 9. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille de complexes indexée par I.

La famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}\,(u_k))_{k\in I}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.

Démonstration . Supposons que les familles $(\mathrm{Re}\,(u_k))_{k\in I}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.
Alors la famille $(|\mathrm{Re}\,(u_k)| + |\mathrm{Im}\,(u_k)|)_{k\in I}$ est sommable d'après le théorème 3. Puisque pour tout $k \in I$, $0 \leqslant |u_k| \leqslant |\mathrm{Re}\,(u_k)| + |\mathrm{Im}\,(u_k)|$, le théorème 2 permet d'affirmer que la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable. Il en est de même de la famille $(u_k)_{k\in I}$.

Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable, alors la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable. Puisque pour tout $k \in I$, $|\mathrm{Re}\,(u_k)| \leqslant |u_k|$ et $|\mathrm{Im}\,(u_k)| \leqslant |u_k|$, le théorème 2 permet d'affirmer que les familles $(\mathrm{Re}\,(u_k))_{k\in I}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.

❑

On peut alors adopter la définition suivante :

Définition 4. Soit I un ensemble dénombrable d'indices. Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille sommable de complexes indexée par I.

La **somme** de la famille $(u_k)_{k\in I}$ est le complexe

$$S(u) = \sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\,(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\,(u_k) = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\,(u_k)^+ - \sum_{k\in I} \mathrm{Re}\,(u_k)^- + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\,(u_k)^+ - i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}\,(u_k)^- .$$

Dans le cas particulier des suites de complexes, on a immédiatement

Théorème 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n est absolument convergente et dans ce cas,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2.4 Propriétés des familles sommables de complexes

On commence par un lemme.

Théorème 11.

Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes indexée par I.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que $\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J_\varepsilon} u_i\right| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration . Soit $\varepsilon > 0$. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels sommable, par définition d'une borne supérieure, il existe une partie finie J_1 de I telle que $\sum_{i\in I} u_i^+ - \varepsilon < \sum_{i\in J_1} u_i^+ \leqslant \sum_{i\in I} u_i^+$ et une partie finie J_2 de I telle que $\sum_{i\in I} u_i^- - \varepsilon < \sum_{i\in J_2} u_i^- \leqslant \sum_{i\in I} u_i^-$ ou encore $-\sum_{i\in I} u_i^- \leqslant -\sum_{i\in J_2} u_i^- < -\sum_{i\in I} u_i^- + \varepsilon$.

Soit $J = J_1 \cup J_2$. J est une partie finie de I. De plus,
$\sum_{i\in I} u_i^+ - \varepsilon < \sum_{i\in J_1} u_i^+ \leqslant \sum_{i\in J} u_i^+ \leqslant \sum_{i\in I} u_i^+$ et $-\sum_{i\in I} u_i^- \leqslant -\sum_{i\in J} u_i^- \leqslant -\sum_{i\in J_2} u_i^- < -\sum_{i\in I} u_i^- + \varepsilon$. En additionnant membre à membre, on obtient

$$\sum_{i\in I} u_i - \varepsilon = \sum_{i\in I} u_i^+ - \varepsilon - \sum_{i\in I} u_i^- < \sum_{i\in J} u_i^+ - \sum_{i\in J} u_i^- < \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- + \varepsilon = \sum_{i\in I} u_i + \varepsilon,$$

et donc, $\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J} u_i\right| \leqslant \varepsilon$. Le résultat est démontré pour les familles réelles.

On suppose maintenant que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes sommable. Les famille $(|\mathrm{Re}\,(u_i)|)_{i\in I}$ et $(|\mathrm{Im}\,(u_i)|)_{i\in I}$ sont sommables. Il existe une partie finie J_1 de I telle que $\sum_{i\in I} |\mathrm{Re}\,(u_i)| - \sum_{i\in J_1} |\mathrm{Re}\,(u_i)| = \left|\sum_{i\in I} |\mathrm{Re}\,(u_i)| - \sum_{i\in J_1} |\mathrm{Re}\,(u_i)|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et une partie finie J_2 de I telle que $\sum_{i\in I} |\mathrm{Im}\,(u_i)| - \sum_{i\in J_2} |\mathrm{Im}\,(u_i)| = \left|\sum_{i\in I} |\mathrm{Im}\,(u_i)| - \sum_{i\in J_2} |\mathrm{Im}\,(u_i)|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $J = J_1 \cup J_2$. J est une partie finie de I et

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J} u_i\right| &\leqslant \left|\sum_{i\in I} \mathrm{Re}\,(u_i) - \sum_{i\in J} \mathrm{Re}\,(u_i)\right| + \left|\sum_{i\in I} \mathrm{Im}\,(u_i) - \sum_{i\in J} \mathrm{Im}\,(u_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i\in I\setminus J} \mathrm{Re}\,(u_i)\right| + \left|\sum_{i\in I\setminus J} \mathrm{Im}\,(u_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{i\in I\setminus J} |\mathrm{Re}\,(u_i)| + \sum_{i\in I\setminus J} |\mathrm{Im}\,(u_i)| \leqslant \sum_{i\in I\setminus J_1} |\mathrm{Re}\,(u_i)| + \sum_{i\in I\setminus J_2} |\mathrm{Im}\,(u_i)| \\
&= \sum_{i\in I} |\mathrm{Re}\,(u_i)| - \sum_{i\in J_1} |\mathrm{Re}\,(u_i)| + \sum_{i\in I} |\mathrm{Im}\,(u_i)| - \sum_{i\in J_2} |\mathrm{Im}\,(u_i)| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

❏

Théorème 12. (Linéarité)

Soit I un ensemble non vide d'indices. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes indexée par I.

Si les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors pour tous complexes λ et μ, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration . Pour tout $i \in I$, $|\lambda u_i + \mu v_i| \leqslant |\lambda|\,|u_i| + |\mu|\,|v_i|$ et donc la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable d'après le théorème 2. Pour toute partie finie J de I, en posant $\sum_{i\in I} u_i = S(u)$ ...

$$\begin{aligned}
|S(\lambda u + \mu v) - (\lambda S(u) + \mu S(v))| &\leqslant \left|S(\lambda u + \mu v) - \sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i)\right| + \left|\sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i) - (\lambda S(u) + \mu S(v))\right| \\
&\leqslant \left|S(\lambda u + \mu v) - \sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i)\right| + |\lambda| \left|S(u) - \sum_{i\in J} u_i\right| + |\mu| \left|S(v) - \sum_{i\in J} v_i\right|
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 11, on peut choisir J telle que
$\left|S(\lambda u + \mu v) - \sum_{i\in J} (\lambda u_i + \mu v_i)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|S(u) - \sum_{i\in J} u_i\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4|\lambda| + 1}$ et $\left|S(v) - \sum_{i\in J} v_i\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4|\mu| + 1}$. On a alors

$$|S(\lambda u + \mu v) - (\lambda S(u) + \mu S(v))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\lambda|\varepsilon}{4|\lambda| + 1} + \frac{|\mu|\varepsilon}{4|\mu| + 1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $|S(\lambda u + \mu v) - (\lambda S(u) + \mu S(v))| \leqslant \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $S(\lambda u + \mu v) = \lambda S(u) + \mu S(v)$.

❏

Ensuite, en appliquant le théorème 4 aux quatre familles $\left(\mathrm{Re}\left(u_i\right)^+\right)_{i\in I}$, $\left(\mathrm{Re}\left(u_i\right)^-\right)_{i\in I}$, $\left(\mathrm{Im}\left(u_i\right)^+\right)_{i\in I}$ et $\left(\mathrm{Im}\left(u_i\right)^-\right)_{i\in I}$, on obtient

Théorème 13. Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par I.

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute permutation σ de I, la famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I}$ est sommable et de plus

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

En particulier,

Théorème 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série de terme général u_n est absolument convergente.

Alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et de plus

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

De même, on a le théorème de sommation par paquets et le théorème de Fubini :

Théorème 15. (Théorème de sommation par paquets)

Soit I un ensemble non vide d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes indexée par I.

Soient J une ensemble non vide puis $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I indexée par J. Alors,
• pour chaque $j\in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable ;
• la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable et de plus

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Théorème 16. (théorème de Fubini)

Soient I et J deux ensembles non vides d'indices. Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de complexes indexée par $I\times J$.

Alors,

• pour chaque $j\in J$, la famille $(u_{i,j})_{i\in I}$ est sommable puis la famille $\left(\displaystyle\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable ;

• pour chaque $i\in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable puis la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable ;

• $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_i.$

2.5 Application aux produits de sommes

Théorème 17. Soient I et J deux ensembles non vides d'indices. Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles de complexes indexées par I et J respectivement.

Si les famille $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont sommables, alors la famille $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Démonstration . Soient K et L deux parties finies de I et J respectivement.

$$\sum_{(i,j)\in K\times L}|u_i||v_j| = \left(\sum_{i\in K}|u_i|\right)\left(\sum_{j\in L}|v_j|\right) \leqslant \left(\sum_{i\in i}|u_i|\right)\left(\sum_{j\in J}|v_j|\right) < +\infty.$$

Ce résultat se généralise à toute partie finie de $I \times J$ puisqu'une telle partie est contenue dans une partie de la forme $K \times L$ où K est une partie finie de I et L une partie finie de J. Ceci montre que la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable. Mais alors, le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_i v_j\right)\\ &= \sum_{j\in J} v_j\left(\sum_{i\in I} u_i\right) \text{ (par linéarité)}\\ &= \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right) \text{ (par linéarité puisque } \sum_{i\in I} u_i \text{ n'est pas fonction de } j).\end{aligned}$$

❑

⇨ **Commentaire .** *Le théorème 17 se généralise immédiatement à un nombre fini de familles sommables sous la forme : si* $(u_{1,i_1})_{i_1\in I_1}, \ldots, (u_{n,i_n})_{i_n\in I_n}$ *sont* n *familles sommables, la famille* $(u_{1,i_1}\ldots u_{n,i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_1\times\ldots\times I_n}$ *est sommable et*

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_1\times\ldots\times I_n} u_{1,i_1}\ldots u_{n,i_n} = \left(\sum_{i_1\in I_1} u_{1,i_1}\right)\times\ldots\times\left(\sum_{i_n\in I_n} u_{n,i_n}\right).$$

Le théorème 17 expose une première manière d'effectuer le produit des sommes de deux familles sommables. Il s'applique en particulier aux séries de nombres complexes absolument convergentes : si les séries de nombres complexes de termes généraux respectifs u_n et v_n sont absolument convergentes, alors la famille $(u_n v_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p\right) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_n v_p.$$

Mais on connaît une autre manière d'effectuer le produit de deux sommes de séries absolument convergentes : le produit de Cauchy de ces deux séries. Le résultat sur ce produit de Cauchy, établi à la fin du chapitre sur les séries numériques, peut aussi être obtenu comme conséquence du théorème 17 du théorème de sommation par paquets :

Théorème 18. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ k+l=n} u_k v_l$.

Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont absolument convergentes, alors la série de terme général w_n converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration . D'après le théorème 17, la famille $(u_n, v_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \left\{(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ k+l=n\right\}$. La famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^2}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$. D'après le théorème 17 et le théorème de sommation par paquets,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} u_k v_l = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(k,l)\in I_n} u_k v_l\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

❑

On termine ce chapitre par un exemple d'utilisation du théorème de Fubini pour établir qu'une suite n'est pas sommable.

Montrons que la famille $\left(\dfrac{1}{n^2-p^2}\right)_{\substack{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\neq p}}$ n'est pas sommable.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}$, $\dfrac{1}{n^2-p^2}=\dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{1}{n-p}-\dfrac{1}{n+p}\right)$. Donc pour $N>p$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}&=\frac{1}{2p}\sum_{1\leqslant n\leqslant N,\ n\neq p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{2p}\left(\sum_{1-p\leqslant k\leqslant N-p,\ k\neq 0}\frac{1}{k}-\sum_{p+1\leqslant k\leqslant N+p,\ k\neq 2p}\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k}+\frac{1}{2p}+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p}-\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Maintenant, $\displaystyle\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\frac{1}{N-p+1}+\ldots+\frac{1}{N+p}$ est une somme de $2p-1$ termes tendant vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Puisque $2p-1$ est constant quand N varie, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=0$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\times\frac{3}{2p}=\frac{3}{4p^2}\text{ puis }\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ donné, on a aussi $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{p^2-n^2}=-\frac{3}{4n^2}$ et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=-\frac{\pi^2}{8}.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*,\ p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\right)\neq\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\right)$. Le théorème de Fubini permet d'affirmer que la suite double $\left(\dfrac{1}{n^2-p^2}\right)_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ n\neq p}$ n'est pas sommable.