Planche n° 32. Dimensions des espaces vectoriels

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Dans cette planche, la lettre $\mathbb{K}$ désigne toujours un sous-corps de $\mathbb{C}$, comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice n° 1 : (T)**

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,1,1,3)$, $e_3 = (2,1,1,1)$, $e_4 = (-1,0,-1,2)$ et $e_5 = (2,3,0,1)$. Soient alors $F = \text{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4,e_5)$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$?

Exercice n° 2 : (IT)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

Exercice n° 3 : (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $E = \text{Ker}f + \text{Ker}g = \text{Im}f + \text{Im}g$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice n° 4 : (*I)**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

Exercice n° 5 : (T)**

Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$. Déterminer $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$.

Exercice n° 6 : (**)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\overline{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.
Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$? Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice n° 7 : (**)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f((x,y)) = (x',y')$.

1) Rappeler l'écriture générale de (x',y') en fonction de (x,y).

2) Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (où $i^2 = -1$), montrer que : $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 /\ \forall z \in \mathbb{C},\ z' = az + b\overline{z}$.

3) Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ est $z' = az + b\overline{z}$).

Exercice n° 8 : (I)**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que : $|\text{rg}u - \text{rg}v| \leqslant \text{rg}(u+v) \leqslant \text{rg}u + \text{rg}v$.

Exercice n° 9 : (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\text{Ker}f = \text{Im}f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1,...,u_p,v_1,...,v_p)$ de E telle que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

2) Montrer que, pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$(\text{Ker}f = \text{Im}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathscr{L}(E)/\ f\circ g + g\circ f = \text{Id}_E).$$

Exercice n° 10 : (*I) (Le théorème des noyaux itérés)**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \mathrm{Ker} f^k$ et $I_k = \mathrm{Im} f^k$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k)$.

2) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2})$.

3) Trouver un exemple où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \underset{\neq}{\subset} N_{k+1}$.

A partir d'ici, on suppose de plus que E est de dimension finie n.

4) a) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N}/\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left(k < p \Rightarrow N_k \underset{\neq}{\subset} N_{k+1} \text{ et } k \geqslant p \Rightarrow N_k = N_{k+1}\right)$.

b) Montrer que $p \leqslant n$.

5) Montrer que si $k < p$, $I_k \underset{\neq}{\supset} I_{k+1}$ et si $k \geqslant p$, $I_k = I_{k+1}$.

6) Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées décroît de moins en moins vite ou aussi la suite des noyaux itérés croît de moins en moins vite).

Exercice n° 11 : (*I)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée n. Soit u un endomorphisme de E.

On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^*/\ u^k = 0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k (par exemple, le seul endomorphisme u, nilpotent d'indice 1 est 0).

1) Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $\left(x,\ u(x_0), ...,\ u^{p-1}(x_0)\right)$ soit libre.

2) Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.

3) On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n exactement. Déterminer $\mathrm{rg} u$ (utiliser le n° 10).

Exercice n° 12 : (*I)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f\text{-}2Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id)$.

Exercice n° 13 : (IT)**

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. Soit F l'ensemble des suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Exercice n° 14 : (I)**

Soit z un nombre complexe non réel. Montrer que $(1, z)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice n° 15 : (I)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de $n+1$ polynômes tels que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice n° 16 : (I)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*/\ f^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que f est nilpotent.

Exercice n° 17 : (*I)**

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda_x x.$$

Montrer que f est une homothétie.

2) Application. On suppose de plus que E est de dimension finie. Déterminer les endomorphismes f de E qui commutent avec tous les endomorphismes g de E.

