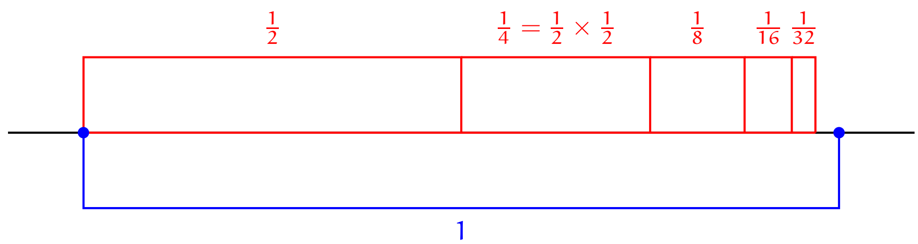
Chapitre 31. Séries numériques

Plan du chapitre

1 Généralités sur les séries

1.1 Etude d'un exemple

Un des paradoxes de Zénon d'Élée ($\approx$ 450 av. J.-C.) était le suivant : pour parcourir une certaine distance, il faut d'abord en parcourir la moitié, puis il faut parcourir la moitié de la moitié restante, puis il faut parcourir la moitié de la moitié de la moitié restante, ... Nous ne parviendrons donc jamais à franchir cette distance.



Il manquait à Zénon d'Élée une vision claire de l'infini. Pour nous aujourd'hui, un segment de longueur non nulle est composé d'une infinité de points ou plus généralement d'une infinité de morceaux sans que cela ne nous pose de problème particulier :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Que signifient précisément les pointillés ? Au bout d'une étape, la longueur est $S_1 = \frac{1}{2}$. Au bout de deux étapes, la longueur est $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Au bout de n étapes, la longueur est

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(Cette dernière égalité était immédiate car, après la n-ème étape, il reste la dernière moitié de moitié de ... de moitié à franchir pour obtenir 1). Maintenant,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

1 est donc la somme infinie des nombres $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ou encore

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

1.2 Définitions

On généralise la démarche précédente :

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La **série de terme général** u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
S_n est la **somme partielle de rang** n de la série de terme général u_n.

Notation. La série de terme général u_n peut se noter $\sum u_n$ ou de manière plus précisé $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Quand on connaît la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut récupérer le terme général u_n de la série :

Théorème 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Alors, $u_0 = S_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Exemple. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)}{2}$, alors $u_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = n\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = n \text{ (ce qui reste vrai pour } n = 0).$$

❏

DÉFINITION 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

La série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si la suite des somme partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La série de terme général u_n est dite **divergente** dans le cas contraire.

Si la série de terme général u_n converge, la **somme de la série** est $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$. Elle se note

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Attention aux notations. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne désigne pas la série de terme u_n mais la somme de cette série ou encore la limite de la suite des sommes partielles. On rappelle que la série de terme général u_n se note $\sum u_n$.

Un premier résultat est :

Théorème 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si la série de terme général u_n converge, **alors** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, **alors** la série de terme général u_n diverge.

DÉMONSTRATION . Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain nombre (réel ou complexe) S, alors u_n tend vers $S - S = 0$.

Par contraposition, si u_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ou encore la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, diverge.

❏

DÉFINITION 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On dit que la série de terme général u_n est **grossièrement divergente** si et seulement si u_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, alors la série de terme général u_n est grossièrement divergente car $(-1)^n$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Etudions maintenant deux séries célèbres non grossièrement divergentes.

Exemple 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1}{n}$ (et $u_0 = 0$ si on tient absolument à travailler avec une suite définie sur $\mathbb{N}$). Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, la série de terme général u_n n'est pas grossièrement divergente.

Vérifions que la série de terme général u_n est divergente. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ et en particulier sur $[k, k+1]$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$ et on en déduit que

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant membre à membre les inégalités précédentes quand k varie de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(n+1).$$

Puisque $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Ainsi, la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge.

❑

Exemple 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{1}{n^2}$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, la série de terme général u_n n'est pas grossièrement divergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ et en particulier, $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![2, n]\!]$, $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \times k} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En additionnant membres à membre ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{n} \text{ (somme télescopique)} \\
&= 2 - \frac{1}{n} \\
&\leqslant 2,
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$. En résumé, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par le réel 2. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ou encore que

$$\text{la série de terme général } \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge.}$$

❑

1.3 Reste à l'ordre n d'une série convergente

On suppose dans ce paragraphe que la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge. On note S la somme de la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Pour n entier naturel donné, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ n'est pas, en général, la « somme complète » $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. La différence entre les deux est

$$R_n = S - S_n = \lim_{p\to+\infty} (S_p) - S_n = \lim_{p\to+\infty} (S_p - S_n) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Définition 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la série de terme général u_k, $k \in \mathbb{N}$, converge, on pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Pour chaque entier naturel n, on peut définir R_n le **reste à l'ordre** n de la série de terme général u_n :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Pour tout entier naturel n, on a $S = S_n + R_n$.

On a presque immédiatement :

Théorème 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la série de terme général u_k, $k\in\mathbb{N}$, converge, alors la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et définie et converge vers 0.

Démonstration . Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, $R_n = S - S_n$ tend vers $S - S = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

❏

Exemple. Posons $u_0 = 0$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, posons $u_k = \dfrac{1}{2^k}$ (il s'agit de la suite étudiée dans le premier exemple du chapitre). Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $S_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ et $S = 1$ puis

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{2^n}$$

ou encore

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

❏

1.4 Propriétés

Tout d'abord, la notion de convergence de la série de terme général u_n ne dépend pas de la valeur des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Théorème 4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $u_n = v_n$.

Alors, les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n, $n\in\mathbb{N}$, sont de même nature (c'est-à-dire toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Démonstration . Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. Pour $n\geqslant n_0$,

$$U_n - V_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - v_k) = \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k) = U_{n_0} - V_{n_0}.$$

Ainsi, pour tout $n\geqslant n_0$, $U_n = V_n + U_{n_0} - V_{n_0}$ et $V_n = U_n + V_{n_0} - U_{n_0}$. Mais alors, si la série de terme général u_n converge ou encore si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou encore la série de terme général v_n converge et réciproquement.

❏

Théorème 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent, **alors** pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge. De plus, en cas de convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration . Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k = \lambda U_n + \mu V_n.$$

Supposons que la série de terme général u_n converge vers $U = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et que la série de terme général v_n converge vers $V = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Alors, la suite $\lambda(U_n) + \mu(V_n)$ converge vers $\lambda U + \mu V$ ou encore la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge vers $\lambda U + \mu V$ ce qui s'écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

❏

L'hypothèse : « les deux séries convergent » est essentielle. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n + v_n = 0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = 0$. Donc, la série de terme général $u_n + v_n$ converge et a pour somme 0. Par contre, la série de terme général u_n diverge de même que la série de terme général v_n. Ainsi, on a le droit d'écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0$ mais on n'a pas le droit d'écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (qui « vaut » $(+\infty) - (+\infty)$ et ne veut donc rien dire).

Théorème 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

La série de terme général $\overline{u_n}$ converge si et seulement si la série de terme général u_n converge. De plus, en cas de convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \overline{u_k} = \overline{U_n}$. Si la série de terme général u_n converge vers $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on sait que la suite (U_n) converge vers $\overline{U}$ ou encore la série de terme général $\overline{u_n}$ converge vers $\overline{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)}$.

❑

Théorème 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

La série de terme général u_n converge si et seulement si les séries de termes généraux respectifs $\mathrm{Re}(u_n)$ et $\mathrm{Im}(u_n)$ convergent. De plus, en cas de convergence

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Démonstration. Si les séries de termes généraux respectifs $\mathrm{Re}(u_n)$ et $\mathrm{Im}(u_n)$ convergent, alors la série de terme général $u_n = \mathrm{Re}(u_n) + i\mathrm{Im}(u_n)$ converge d'après le théorème 5 et de plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Réciproquement, si la série de terme général u_n converge, alors la série de terme général $\overline{u_n}$ converge d'après le théorème 6 puis les séries de termes généraux respectifs $\mathrm{Re}(u_n) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\overline{u_n}$ et $\mathrm{Im}(u_n) = \frac{1}{2i}u_n - \frac{1}{2i}\overline{u_n}$ convergent.

❑

1.5 Lien suites-séries. Séries télescopiques

Théorème 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

La **suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la **série** de terme général $u_{n+1} - u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire ou bien toutes deux convergentes, ou bien toutes deux divergentes).

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 \text{ (somme télescopique).}$$

Si la suite (u_n) converge vers un certain nombre complexe ℓ, alors $\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n \to +\infty}{\to} \ell - u_0$. Ainsi, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Réciproquement, supposons que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers un certain nombre complexe S. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ et donc, $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u_0 + S$. Ainsi, la suite (u_n) converge.

❑

Exercice 1. Montrer la convergence et déterminer la somme de la série de terme général u_n dans les deux cas suivants :

1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$ (on rappelle que si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\mathrm{Arctan}\, a - \mathrm{Arctan}\, b = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$.)

Solution 1.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ (somme télescopique).}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \text{ (somme télescopique).}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}\right) = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(n)$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Arctan}(k+1) - \mathrm{Arctan}(k)) = \mathrm{Arctan}(n+1) - \mathrm{Arctan}(0) \\ &= \mathrm{Arctan}(n+1) \text{ (somme télescopique).}\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2 Séries de référence

2.1 Séries géométriques

Théorème 9. Soit $q \in \mathbb{C}$.

La série de terme général q^n, $n \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si $|q| < 1$. De plus,

$$\forall q \in \mathbb{C}, \left(|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\right).$$

Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-q}.$$

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{C}$. Si $|q| \geqslant 1$, q^n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Dans ce cas, la série de terme général q^n, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.

Supposons maintenant $|q| < 1$. En particulier, $q \neq 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Puisque $|q| < 1$, $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{1-q}$.

Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{u_0}{1-q}.$$

❏

Quand on additionne les termes d'une suite géométrique, il y a le premier terme en facteur. Par exemple, pour la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

et pour la suite $\left(\dfrac{9}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

On note que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$ s'écrit $0,\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ chiffres}}$ puis, quand n tend vers $+\infty$, $0,99\ldots9\ldots = 1$.

2.2 Séries de Riemann

Théorème 10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_{n,\alpha} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

• On a déjà vu que la suite $S_{n,1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ (en montrant d'abord que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$).

• Soit $\alpha \leqslant 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k}$ puis, en additionnant membre à membre, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n,\alpha} \geqslant S_{n,1}$. On en déduit que $S_{n,\alpha} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$.

• Soit $\alpha > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1,\alpha} - S_{n,\alpha} = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$. Donc, la suite $(S_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc, la suite $(S_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si la suite $(S_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Soit $k \geqslant 2$.

$$\frac{1}{k^\alpha} = (k-(k-1)) \times \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$$

puis, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
S_{n,\alpha} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\ dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\ dt = 1 + \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^n \text{ (car } \alpha \neq 1) \\
&= 1 - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \\
&\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} \text{ (car } \alpha - 1 > 0),
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$. La suite $(S_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$. Donc, la suite $(S_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

❏

⇨ **Commentaire** . *Contrairement au cas des séries géométriques, nous n'avons pas fourni la valeur de la somme* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *quand* $\alpha > 1$. *On est capable de calculer cette somme pour un nombre très restreint de valeurs de* α *et par exemple, dans l'exercice qui suit, on établit que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

La fonction $\zeta\ :\ \alpha \mapsto \zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, *définie sur* $]1,+\infty[$, *s'appelle la* ***fonction zeta de*** RIEMANN.

Exercice 2. Un calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\int_0^\pi \left(at^2 + bt\right)\cos(nt)\ dt$.

2) Montrer que $\forall t \in [0,\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} - \dfrac{1}{2} \text{ si } t \in]0,\pi] \\ n \text{ si } t = 0 \end{cases}$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\ dt$ où, pour tout $t \in [0,\pi]$,

$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \text{ si } t \in]0,\pi] \\ -1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$.

4) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) f(t)\ dt = 0$.

5) Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

6) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution 2.

1) Soient a et b deux réels. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(at^2+bt\right)\cos(nt)\ dt &= \left[\left(at^2+bt\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2at+b)(-\sin(nt))\ dt\\ &=\frac{1}{n}\left(\left[(2at+b)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2a\cos(nt)\ dt\right)=\frac{1}{n^2}\left[(2at+b)\cos(nt)\right]_0^{\pi}\\ &=\frac{1}{n^2}\left((2a\pi+b)(-1)^n-b\right).\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi}\left(at^2+bt\right)\cos(nt)\ dt=\frac{1}{n^2} &\Leftrightarrow \forall n\geqslant 1,\ \frac{1}{n^2}\left((2a\pi+b)(-1)^n-b\right)=\frac{1}{n^2}\\ &\Leftrightarrow \forall n\geqslant 1,\ (2a\pi+b)(-1)^n-b=1\\ &\Leftarrow b=-1 \text{ et } a=\frac{1}{2\pi}.\end{aligned}$$

Donc, $\forall n\geqslant 1,\ \dfrac{1}{n^2}=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\ dt$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $t\in[0,\pi]$,

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= \sum_{k=1}^{n}2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right)\\ &=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)-\sin\left(\left(\frac{1}{2}\right)t\right)\ \text{(somme télescopique)}\\ &=\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

Si $t=0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\sum_{k=1}^{n}1=n$ et si $t\in]0,\pi]$, alors $\dfrac{t}{2}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ puis $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\neq 0$,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$

3) Soit $n\geqslant 1$.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\ dt=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ dt.$$

Si $t\in]0,\pi]$,

$$\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}\right)=g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right).$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $t=0$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\ dt.$$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque la fonction f est de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ dt &= \left[f(t)\times-\frac{\cos\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{\dfrac{2n+1}{2}}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi}f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt\\ &=\frac{2}{2n+1}\left(f(0)+\int_0^{\pi}f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt\right)\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,dt\right| \leqslant \frac{2}{2n+1}\left(|f(0)| + \int_0^{\pi} |f'(t)|\,dt\right)$ puis que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,dt = 0.$$

5) La fonction g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ en vertu de théorèmes généraux. Ensuite, $g(t) = \dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{2\dfrac{t}{2}} = -1 = g(0)$.

La fonction g est donc continue en 0 puis sur $[0,\pi]$.

Pour tout réel $t \in]0,\pi]$, $g'(t) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\left(\dfrac{t}{\pi} - 1\right)\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) - \left(\dfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}$ puis

$$g'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{\left(-1 + \dfrac{t}{\pi}\right)\left(\dfrac{t}{2} + o\left(t^2\right)\right) - \dfrac{1}{2}\left(-t + \dfrac{t^2}{2\pi}\right)(1 + o(t))}{2\left(\dfrac{t^2}{4} + o\left(t^2\right)\right)} \underset{t\to 0}{=} \frac{\dfrac{t^2}{4\pi} + o\left(t^2\right)}{t^2 + o\left(t^2\right)} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{4\pi} + o(1).$$

Ainsi, $g \in C^0([0,\pi],\mathbb{R}) \cap C^1(]0,\pi],\mathbb{R})$ et g' a une limite réelle en 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction g est de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$.

6) Puisque la fonction g est de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$, la question 4) permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) = 0$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a montré que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

---

3 Etude des séries à termes réels positifs

3.1 Généralités

Quand la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, positive à partir d'un certain rang, on dispose d'un certain nombre de techniques pratiques pour étudier la nature de la série de terme général u_n. Le point de départ est le théorème suivant :

Théorème 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, positive à partir d'un certain rang n_0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1) La suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante.

2) La série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Quand la suite des sommes partielles n'est pas majorée, $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et on peut écrire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration . Pour $n \geqslant n_0$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Donc, la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante ou encore la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Donc, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, elle converge et si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

❏

⇨ **Commentaire .** *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle et négative à partir d'un certain rang, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis convergente si elle est minorée et de limite $-\infty$ si elle n'est pas minorée.*

3.2 Utilisation des relations de comparaison

Théorème 12. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite réelles telles que, à partir d'un certain rang n_0, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

Démonstration . Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Supposons que la série de terme général v_n converge. Notons V la somme de cette série. D'après le théorème 11, la suite $(V_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante et on en déduit que pour $n \geqslant n_0$, $V_n \leqslant V$.

Pour $n > n_0$,

$$U_n = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k = U_{n_0} + V_n - V_{n_0} \leqslant U_{n_0} - V_{n_0} + V.$$

La suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est donc majorée. On en déduit que la série de terme général u_n converge d'après le théorème 11. Par contraposition, si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

❑

Théorème 13.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite réelles, positives à partir d'un certain rang, telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

Démonstration . Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$. Il suffit donc de prouver le théorème quand $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ ce que l'on fait.

Il existe un rang n_0 et un réel positif M tel que, pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant Mv_n$. Si par hypothèse, la série de terme général v_n converge, il en est de même de la série de terme général Mv_n. D'après le théorème 12, la série de terme général u_n converge. Le deuxième résultat s'obtient par contraposition.

❑

Théorème 14.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite réelles, positives à partir d'un certain rang, telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

La série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général v_n converge (ou encore les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont de même nature).

Démonstration . Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
Donc, la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général v_n converge.

❑

⇨ **Commentaire** . *Dans les théorèmes qui précèdent, on a systématiquement l'hypothèse « u_n et v_n sont positifs à partir d'un certain rang ». On verra plus loin que* ***cette hypothèse est indispensable****. C'est ce qu'on analyse à travers différents exemples ci-dessous.*

Pour $\leqslant$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-1 \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge. Pourtant, la série de terme général -1 est grossièrement divergente. On ne peut donc pas supprimer l'hypothèse de signe dans le théorème 12.

Pour o et O : on verra à la fin de ce chapitre, que la série de terme $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge. Or, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$ (et aussi $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$) car $\left|\dfrac{1/n}{(-1)^{n-1}/\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et d'autre part, la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge. On ne peut donc pas supprimer l'hypothèse de signe dans le théorème 13.

Pour $\sim$: on verra en exercice à la fin duchapitre, que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$ diverge (et on rappelle que l'on montrera que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge). Pourtant, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. On ne peut donc pas supprimer l'hypothèse de signe dans le théorème 14.

Exercice 3. Nature de la série de terme général

1) $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

2) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$.

Solution 3.

1) Puisque $\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$,

$$\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 = \frac{2n}{n^2-n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

Puisque la suite $\left(\dfrac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (et donc la suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang) et que la série de terme général $\dfrac{2}{n}$ diverge (série de Riemann d'exposant $1 \leqslant 1$), la série de terme général u_n diverge.

Puisque $\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$,

$$\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} - 1 = \frac{2}{n^2-n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

Puisque la suite $\left(\dfrac{2}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et que la série de terme général $\dfrac{2}{n^2}$ diverge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$), la série de terme général u_n converge.

2) • Il est exact que $\dfrac{\ln n}{n^2}$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{n^2}$ et que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge. Mais ceci ne permet pas de conclure car par exemple, $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ et $\dfrac{1}{n}$ sont prépondérants devant $\dfrac{1}{n^2}$ et les séries de termes généraux $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ et $\dfrac{1}{n}$ sont respectivement convergente et divergente.

Vérifions que $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. D'après un théorème de croissances comparées,

$$n^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} o(1),$$

et donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Puisque les suites $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ sont positives et que la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$), la série de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

• Vérifions que $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\gg} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$. D'après un théorème de croissances comparées,

$$n^{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty,$$

et donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\gg} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$. Puisque les suites $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)$ sont positives et que la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ diverge (série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{4} \leqslant 1$), la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ diverge.

---

4 Comparaison séries-intégrales

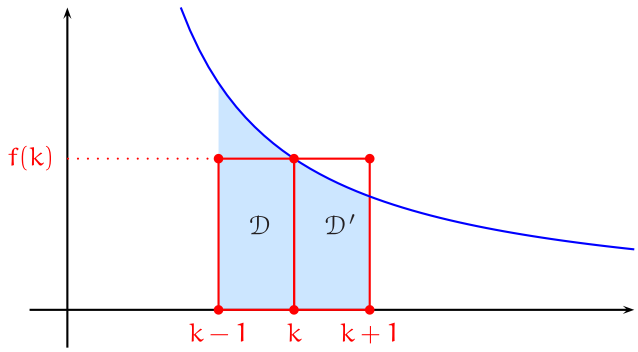
On va généraliser le travail effectué pour étudier la convergence des séries de Riemann. On se donne une fonction f continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. Soit $k \geqslant 0$. Puisque f est décroissante sur $[k, k+1]$, pour tout x de $[k, k+1]$, on a $f(x) \leqslant f(k)$ et donc

$$\int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\, dx = (k+1-k)f(k) = f(k).$$

De même, pour $k \geqslant 1$ et $x \in [k-1, k]$, $f(k) \leqslant f(x)$ et donc

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\, dx = (k-(k-1))f(k) = f(k).$$

Illustrons ces inégalités par un graphique dans le cas où de plus, f est positive.



$\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(x)\, dx$ sont respectivement l'aire, exprimée en unités d'aire, de $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ k-1 \leqslant x \leqslant k \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et $\mathcal{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ k \leqslant x \leqslant k+1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. D'autre part, $f(k) = (k-(k-1))f(k) = (k+1-k)f(k)$ est l'aire du rectangle $\mathcal{R}$ de sommets $(k-1, 0)$, $(k, 0)$, $(k, f(k))$ et $(k-1, f(k))$ et aussi l'aire du rectangle $\mathcal{R}'$ de sommets $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k+1, f(k))$ et $(k, f(k))$.

L'inégalité $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \geqslant f(k)$ s'interprète graphiquement par le fait que l'aire de $\mathcal{D}$ est supérieure à l'aire de $\mathcal{R}$ et l'inégalité $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k)$ s'interprète graphiquement par le fait que l'aire de $\mathcal{D}'$ est inférieure à l'aire de $\mathcal{R}'$.

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)\, dx = \int_{0}^{n+1} f(x)\, dx$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant f(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx = f(0) + \int_{0}^{n} f(x)\, dx.$$

Dans le cas où f est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{0}^{n+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_{0}^{n} f(x)\, dx.$$

Ceci généralise le travail effectué pour étudier la convergence des séries de Riemann. On peut effectuer un travail analogue dans le cas d'une fonction croissante.

5 Séries absolument convergentes

Dans les paragraphes précédents, on a pu donner un certain nombre de techniques pour étudier la convergence d'une série à termes réels positifs (au moins à partir d'un certain rang). On va maintenant s'intéresser aux suites réelles de signe quelconque comme par exemple la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis aux suites complexes comme par exemple $\left(\dfrac{e^{i\theta}}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On commence par l'étude des suites réelles en dégageant les notions de parties positive et négative d'une suite réelle.

5.1 Les suites (u_n^+) et (u_n^-)

Définition 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n^+ = \text{Max}\{u_n, 0\}$ et $u_n^- = -\text{Min}\{u_n, 0\} = \text{Max}\{-u_n, 0\}$.

Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, alors $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}} = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots)$ et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}} = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots)$. On note que les suites $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites réelles positives.

Théorème 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \geqslant 0$ et $u_n^- \geqslant 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \dfrac{|u_n| + u_n}{2}$ et $u_n^- = \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $u_n^- \leqslant |u_n|$.

Démonstration .

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n^+ est le plus grand des deux réels u_n et 0 et en particulier, u_n^+ est plus grand que 0. De même, u_n^- est le plus grand des deux réels $-u_n$ et 0 et en particulier, u_n^- est plus grand que 0.

2) Si $u_n \geqslant 0$, $u_n^+ = u_n$ et $u_n^- = 0$ puis $u_n^+ + u_n^- = u_n = |u_n|$ et $u_n^+ - u_n^- = u_n$.
Si $u_n \leqslant 0$, $u_n^+ = 0$ et $u_n^- = -u_n$ puis $u_n^+ + u_n^- = -u_n = |u_n|$ et $u_n^+ - u_n^- = u_n$.

3) En additionnant ou en retranchant membre à membre les égalités de 2), on obtient $|u_n| + u_n = 2u_n^+$ et $|u_n| - u_n = 2u_n^-$. Donc, $u_n^+ = \dfrac{|u_n| + u_n}{2}$ et $u_n^- = \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \geqslant 0$ et $u_n^- \geqslant 0$ et donc, $u_n^+ \leqslant u_n^+ + u_n^- = |u_n|$ et $u_n^- \leqslant u_n^+ + u_n^- = |u_n|$. ❏

5.2 Définition de la convergence absolue

Définition 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

La série de terme général u_n est **absolument convergente** si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Par exemple, les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ou $\dfrac{e^{in\theta}}{n\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, sont des séries absolument convergentes (car $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ et $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$). Par contre, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, n'est pas absolument convergente.

5.3 Application à la convergence d'une série

Théorème 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Si la série de terme général u_n est absolument convergente, **alors** la série de terme général u_n est convergente.

Démonstration .

• Analysons d'abord le cas où (u_n) est une suite réelle. Supposons que la série de terme général u_n converge absolument ou encore supposons que la série de terme général $|u_n|$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$. Mais alors, d'après le théorème 12, les séries de termes généraux respectifs u_n^+ et u_n^- convergent.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$, la série de terme général u_n converge d'après le théorème 5 (et de plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$). Le résultat est établi dans le cas d'une suite réelle.

• Passons au cas d'une suite complexe. Supposons que la série de terme général u_n converge absolument ou encore supposons que la série de terme général $|u_n|$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{Re}\,(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\mathrm{Im}\,(u_n)| \leqslant |u_n|$.
On en déduit que les séries de termes généraux $|\mathrm{Re}\,(u_n)|$ et $|\mathrm{Im}\,(u_n)|$ sont convergentes ou encore que les séries de termes généraux $\mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\mathrm{Im}\,(u_n)$ sont absolument convergentes. D'après l'étude du cas où la suite est réelle, on en déduit que les les séries de termes généraux $\mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\mathrm{Im}\,(u_n)$ sont convergentes puis que la série de terme général u_n converge d'après le théorème 7. ❏

Par exemple, les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ou $\dfrac{e^{in\theta}}{n\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, sont absolument convergentes et donc convergentes.

Exercice 4. Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 4. $\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)$ converge absolument et donc converge.

On peut pratiquer différemment : $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc, la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)$ converge absolument et donc converge (dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ signifie qu'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $|u_n|\leqslant\dfrac{M}{n^2}$).

5.4 Exemples de séries semi-convergentes

Dans l'exercice qui vient, on va voir deux exemples de séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Une telle série est dite **semi-convergente**.

Exercice 5.

1) Convergence et somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ est-elle absolument convergente ?

2) Convergence et somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ est-elle absolument convergente ?

(Dans les deux cas, on pourra utiliser le fait que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k}=\displaystyle\int_0^1 t^{t-1}\,dt$.)

Solution 5.

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,dt = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k\right)dt\\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,dt \text{ (car, pour tout } t\in[0,1],\ -t\neq 1)\\
&= \int_0^1\frac{1}{1+t}\,dt-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt\\
&= \ln 2-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt.
\end{aligned}$$

De plus, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt\leqslant\int_0^1\frac{t^n}{1+0}\,dt=\frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}0$, on en déduit que $(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,dt\underset{n\to+\infty}{\to}0$ puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\underset{n\to+\infty}{\to}\ln 2$. Ceci montre la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, et fournit sa somme :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.}$$

D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$ et donc, la série de terme général $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ diverge ou encore la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1-(-t^2)}\,dt \text{ (car, pour tout } t \in [0,1],\ -t^2 \neq 1) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.\end{aligned}$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+0}\,dt = \frac{1}{2n+3}.$$

Puisque $\dfrac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$. Ceci montre la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, et fournit sa somme :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ et donc, la série de terme général $\left|\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right|$ diverge ou encore la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas absolument convergente.

On termine cette section par un exercice qui fournit un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes telles que la série de terme général u_n converge et la série de terme général v_n diverge.

Exercice 6.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ puis $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(U_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
b) Que peut-on en conclure ?

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ puis $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Montrer que la série de terme général v_n diverge.
b) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Solution 6.

1) a)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n+2} - U_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} \geqslant 0$. Donc, la suite $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n+1} - U_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant 0$. Donc, la suite $(U_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n-1} - U_{2n} = -u_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et donc $U_{2n-1} - U_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

On a montré que les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(U_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) Les deux suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(U_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc convergentes et ont même limite. On en déduit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ou encore que la série de terme général u_n converge.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et de plus $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 0$ puis

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $w_n = -\dfrac{1}{n}$ et $t_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ de sorte que $v_n = u_n + w_n + t_n$.
La série de terme général u_n converge d'après 1) et la série de terme général t_n converge absolument et donc converge (car $\dfrac{3}{2} > 1$). Si la série de terme général v_n converge, il en est de même de la série de terme général $v_n - u_n - t_n = w_n = -\dfrac{1}{n}$ ce qui est faux. Donc, la série de terme général v_n diverge.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = u_n \frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = 1$. Ceci montre que $\dfrac{v_n}{u_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

---

6 Séries alternées

DÉFINITION 7. (séries alternées)

On appelle **série alternée** toute série dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = -(-1)^n v_n$ où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle
- décroissante,
- convergente et de limite nulle.

⇨ **Commentaire**. *Notons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement positive en tant que suite réelle décroissante de limite nulle. On a donc les relations :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = |u_n|,\ \textit{et aussi}\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|\ \textit{ou}\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -(-1)^n |u_n|.$$

Théorème 17. (critère spécial aux séries alternées)

Toute série alternée converge.

DÉMONSTRATION. On montre le résultat dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle, positive, décroissante, de limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

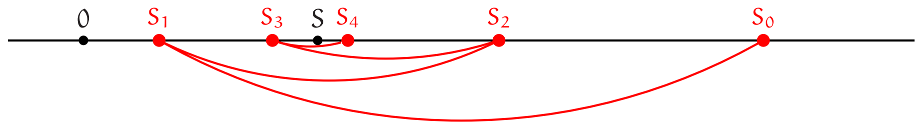
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

- $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leqslant 0$;
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+1} = -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geqslant 0$.

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ et donc $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergentes, de même limite. Mais alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou encore la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

❏

Pour comprendre la convergence d'une série alternée, représentons graphiquement les premiers termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où pour tout tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$. $S_0 = |u_0|$ puis $S_1 = u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1|$ puis $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = |u_0| - |u_1| + |u_2| \dots$

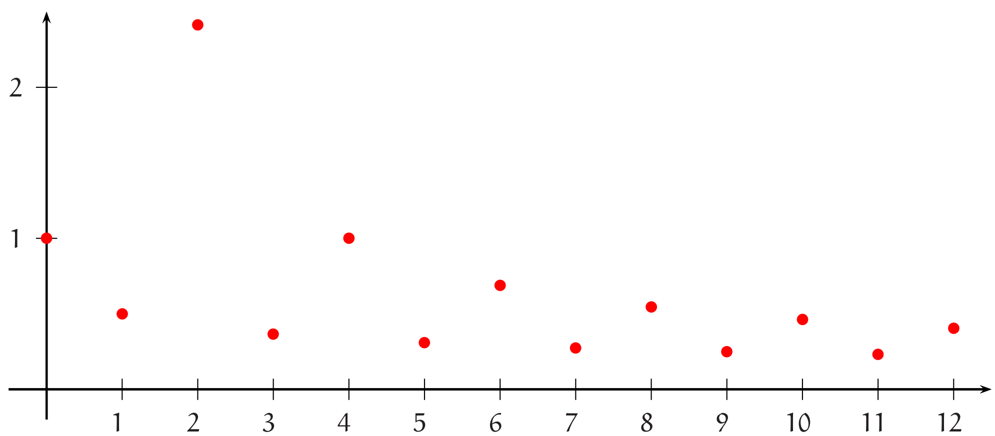


A chaque étape, on enlève moins que ce qu'on vient de rajouter ou on ajoute moins que ce qu'on vient de retrancher.

Exemple 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, tend vers 0 en décroissant. Donc la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge d'après le critère spécial aux séries alternées. On peut noter que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente et donc la série de terme général u_n est une série semi-convergente.

Exemple 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. La série de terme général u_n est absolument et donc convergente. La série de terme général u_n est une série alternée mais il serait très maladroit d'utiliser cette constatation ici pour prouver la convergence de cette série.

Exemple 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$. La série de terme général n'est pas une série alternée car la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante. Pour s'en convaincre, commençons par représenter graphiquement ses premiers termes.



Vérifions maintenant plus proprement que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante. Tout d'abord, $|u_0| = 1 > \dfrac{1}{2} = |u_1|$. Ensuite, $\sqrt{1} + (-1)^0 = 2 > 0$ et pour $n \geqslant 2$, $\sqrt{n} + (-1)^{n-1} \geqslant \sqrt{2} - 1 > 0$. Donc, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(|u_{n+1}| - |u_n|) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + (-1)^n} - \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}\right) = \operatorname{sgn}\left(\left(\sqrt{n} + (-1)^{n-1}\right) - \left(\sqrt{n+1} + (-1)^n\right)\right)\\ &= \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + 2(-1)^{n-1}\right).\end{aligned}$$

• Si n est pair et supérieur ou égal à 1, posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On a $\operatorname{sgn}(|u_{2p+1}| - |u_{2p}|) = \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{2p+1} + \sqrt{2p} - 2\right)$ avec

$$\left(-\sqrt{2p+1} + \sqrt{2p}\right) - 2 < 0.$$

Donc, $\forall p \geqslant 1$, $|u_{2p+1}| - |u_{2p}| < 0$.

• Si n est impair et supérieur ou égal à 1, posons $n = 2p-1$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On a $\operatorname{sgn}(|u_{2p}| - |u_{2p-1}|) = \operatorname{sgn}\left(-\sqrt{2p} + \sqrt{2p-1} + 2\right)$ avec

$$-\sqrt{2p} + \sqrt{2p-1} + 2 = -\frac{1}{\sqrt{2p} + \sqrt{2p-1}} + 2 \geqslant 2 - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} \geqslant 2 - 1 = 1 > 0.$$

Donc, $\forall p \geqslant 1$, $|u_{2p}| - |u_{2p-1}| > 0$.

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone, ni même monotone à partir d'un certain rang. On rappelle qu'on a vu en exercice que la série de terme général u_n était divergente et donc la série de terme général u_n ne pouvait pas être une série alternée. Ainsi, **l'alternance de signe ne suffit pas à faire d'une série une série alternée**.

Théorème 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle alternée en signe dont la valeur absolue tend vers 0 en décroissant.

On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors,

- $\operatorname{sgn}(S) = \operatorname{sgn}(u_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sgn}(S_n) = \operatorname{sgn}(u_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sgn}(R_n) = \operatorname{sgn}(u_{n+1})$.
- $|S| \leqslant |u_0|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leqslant |u_0|$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

⇨ **Commentaire** . *On a l'habitude de dire que les sommes S, S_n et R_n sont du signe de leur premier terme et en valeur absolue majorées par la valeur absolue de leur premier terme.*

Démonstration . • Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$ (de sorte que $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \leqslant 0, \ldots$)

On rappelle que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers S. Par suite,

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \ldots \leqslant S \leqslant \ldots \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0.$$

En particulier, $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$ et aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_1 \leqslant S_n \leqslant S_0$. D'autre part, $S_0 = u_0$ et $S_1 = u_0 + u_1 = |u_0| - |u_1| \geqslant 0$. Donc,

$$0 \leqslant S \leqslant u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n \leqslant u_0.$$

Ceci montre que S et S_n sont du signe de u_0 et en valeur absolue majorés par la valeur absolue de u_0.

• Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -(-1)^n |u_n|$ (de sorte que $u_0 \leqslant 0$, $u_1 \geqslant 0, \ldots$). Alors, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est du type précédent et donc $0 \leqslant -S \leqslant -u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant -S_n \leqslant -u_0$. Ceci montre S et S_n sont négatifs et donc du signe de u_0 et que leur valeur absolue est majoré par la valeur absolue de u_0.

En appliquant le résultat établi pour S à R_n, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

❏

Exemple. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est du signe de $\dfrac{(-1)^{1-1}}{1} = 1$ et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \geqslant 0$.

D'autre part, $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^{1-1}}{1}\right| = 1$. Ce résultat est en adéquation avec le calcul de l'exercice n° 5 où on a établit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

De même, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ est du signe de $\dfrac{(-1)^{1-1}}{\sqrt{1}} = 1$ et donc positif et d'autre part, $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^{1-1}}{1}\right| = 1$. Ainsi,

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \leqslant 1.$$

On obtient dans ce cas un encadrement de la somme sans connaître la valeur exacte de cette somme.

Exercice 7.

Calculer une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ à 10^{-2} près.

Solution 7.

$\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{n^2+1}$ tend vers 0 en décroissant. Donc, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées. Posons $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$.

On sait que pour tout entier naturel p, $S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$ avec

$$|S_{2p+1}-S_{2p}| = \left|\frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2+1}\right| = \frac{1}{(2p+1)^2+1}.$$

Si on choisit p tel que $\dfrac{1}{(2p+1)^2+1} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{2}$, alors une valeur approchée $\widetilde{S_{2p}}$ de S_{2p} à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près est une valeur approchée de S à 10^{-2} près car

$$\left|\widetilde{S_{2p}}-S\right| \leqslant \left|\widetilde{S_{2p}}-S_{2p}\right| + |S_{2p}-S| \leqslant \frac{10^{-2}}{2} + |S_{2p}-S_{2p+1}| \leqslant \frac{10^{-2}}{2} + \frac{1}{(2p+1)^2+1} \leqslant 10^{-2}.$$

Or, $\dfrac{1}{(2p+1)^2+1} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow (2p+1)^2+1 \geqslant 200 \Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{\sqrt{199}-1}{2} = 6,5\ldots \Leftrightarrow p \geqslant 7$.

Une valeur approchée de S_7 à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près est une valeur approchée de S à 10^{-2} près. La calculatrice fournit $S_7 = 0,627\ldots$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = 0,63 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

---

7 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

7.1 Définition et convergence du produit de Cauchy

Définition 8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.
Le **produit de Cauchy** des séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **est la série** de terme général w_n où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème 19. (produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.
Si les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent **absolument**, alors le produit de Cauchy de ces deux séries converge et a pour somme $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. Plus explicitement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$, $V_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i$ puis

$$W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} u_j v_{i-j}\right) = \sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l\leqslant n}} u_k v_l.$$

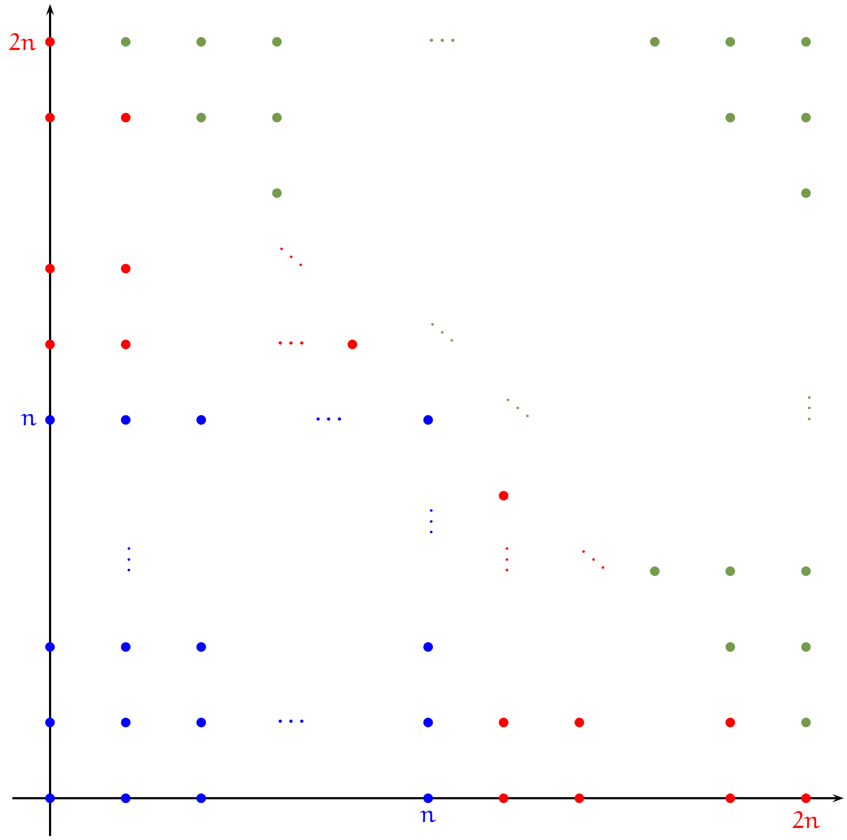
Enfin, puisque les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument et donc convergent, on pose $U = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ et $V = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} v_i$.

• On effectue d'abord la démonstration dans le cas particulier où les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes réels positifs auquel cas dire que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument équivaut à dire que ces séries convergent.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $U_n \times V_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\displaystyle\sum_{l=0}^{n} v_l\right) = \displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} u_k v_l$. Soient alors k et l deux entiers naturels.

$$(k,l) \in [\![0,n]\!]^2 \Rightarrow 0 \leqslant k+l \leqslant 2n \Rightarrow (k,l) \in [\![0,2n]\!]^2,$$

et donc $[\![0,n]\!]^2 \subset \left\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 /\ k+l \leqslant 2n\right\} \subset [\![0,2n]\!]^2$ (voir graphique page suivante).



Puisque tous les termes considérés sont positifs, on en déduit que

$$\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} u_k v_l \leqslant \sum_{0\leqslant k+l\leqslant 2n} u_k v_l \leqslant \sum_{0\leqslant k,l\leqslant 2n} u_k v_l,$$

ou encore que

$$U_n \times V_n \leqslant W_{2n} \leqslant U_{2n} \times V_{2n} \quad (*).$$

Par hypothèse, la suite (U_n) converge vers U et la suite (V_n) converge vers V. Mais alors, les suites extraites (U_{2n}) et (V_{2n}) convergent vers U et V respectivement. Ainsi, les membres extrêmes de l'encadrement $(*)$ convergent tous les deux vers $U \times V$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (W_{2n}) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_{2n} = U \times V$. Enfin, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$, la suite (W_n) est croissante et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n+2}$. Le théorème des gendarmes permet une nouvelle fois de conclure que (W_{2n+1}) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_{2n+1} = U \times V$.

En résumé, les deux suites extraites (W_{2n}) et (W_{2n+1}) convergent et ont même limite, à savoir $U \times V$. On en déduit que la suite (W_n) converge et a pour limite $U \times V$. Le théorème est démontré dans le cas des séries à termes positifs.

• On passe maintenant au cas général. On suppose que les suites (u_n) et (v_n) sont complexes et que les séries de terme généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$, $w'_n = \sum\limits_{k+l=n} u'_k v'_l$, $U'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u'_k$, $V'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v'_k$ et enfin, $W'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w'_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|U_nV_n - W_n| = \left|\sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l>n}} u_k v_l\right| \leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l>n}} |u_k|\,|v_l| = \sum_{\substack{0\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l>n}} u'_k v'_l = U'_nV'_n - W'_n.$$

D'après l'étude du cas des séries à termes réels positifs, $U'_nV'_n - W'_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, $U_nV_n - W_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$W_n \underset{n\to+\infty}{=} U_nV_n + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} UV + o(1).$$

Ceci montre que la suite (W_n) converge et a pour limite UV.

❏

Le produit de Cauchy de deux séries **absolument** convergentes est une série convergente.
L'exercice ci-dessous montre qu'on ne peut pas élargir l'hypothèse aux séries convergentes et non absolument

convergentes. Le produit de CAUCHY de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Exercice 8. Analyser la convergence du produit de CAUCHY de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, par elle-même.

Solution 8. $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ est alterné en signe et sa valeur absolue, à savoir $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, tend vers 0 en décroissant (à partir du rang 1). Donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

D'autre part, la série de terme général $\left|\dfrac{-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, est divergente (série de RIEMANN d'exposant $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$).

La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, est donc une série semi-convergente.

Pour $n \geqslant 0$, posons $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$ de sorte que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Le terme général du produit de CAUCHY de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$, par elle-même est $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

On a $v_0 = v_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2$,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \times \frac{(-1)^{n-k-1}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $k(n-k) = -k^2 + nk = -\left(k - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{n^2}{4} \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ et donc

$$|v_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2/4}} = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n} \geqslant 2 - \frac{2}{2} = 1.$$

Ceci montre que v_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la série de terme général v_n diverge grossièrement. Ainsi, le produit de CAUCHY de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

7.2 Exponentielle d'un nombre complexe

Dans ce paragraphe, on va obtenir l'exponentielle d'un nombre complexe comme la somme d'une série. Dans le chapitre « Nombres complexes », l'exponentielle du nombre complexe z aété définie à partir des parties réelle et imaginaire de z par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} \times e^{i\mathrm{Im}(z)}.$$

On va commencer par obtenir l'exponentielle de z comme somme d'une série quand z est un réel x et quand z est un imaginaire pur $i\theta$ où θ est un réel, à l'aide de l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE établie à la fin du chapitre « Intégration sur un segment ».

• Soit x un réel. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = e^t$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x \geqslant 0$, pour tout réel t de $[0, x]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| = e^t \leqslant e^x$ et si $x < 0$, pour tout réel t de $[x, 0]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant 1$. Dans tous les cas, pour tout réel t de $[x, 0]$ ou $[0, x]$ suivant le cas, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant e^{|x|} = M_{n+1}$. D'après l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE,

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$. On a montré que pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

• De même, soit θ un réel. D'après l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE appliquée à la fonction $t \mapsto e^{it}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left|e^{i\theta} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\theta)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|\theta|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}.$$

• Soit alors $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!}$. La série de terme général $\frac{|z|^n}{n!}$ converge (et a pour somme $e^{|z|}$) ou encore la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ converge absolument et en particulier converge. On pose donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.}$$

On va vérifier que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{z^n}{n!}$ et $v_n = \frac{(z')^n}{n!}$. Le terme général du produit de CAUCHY des séries de termes généraux u_n et v_n est, d'après la formule du binôme de NEWTON,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

Puisque les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent absolument, on en déduit que la série de terme général w_n converge et a pour somme $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \exp(z) \times \exp(z')$. Comme d'autre part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z'),$$

on a montré que $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$. Mais alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)) = \exp(\mathrm{Re}(z)) \times \exp(i\mathrm{Im}(z)) = e^{\mathrm{Re}(z)} \times e^{i\mathrm{Im}(z)} = e^z.$$

L'exponentielle qui vient d'être d'finie est bien la même que celle définie au premier semestre.

8 La formule de STIRLING

On a déjà énoncé sans démonstration la formule de STIRLING :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On démontre maintenant cette formule en deux étapes. On commence par déterminer un équivalent en $+\infty$ de la n-ème intégrale de WALLIS :

Exercice 9. (intégrales de WALLIS). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$.

1) Calculer W_0 et W_1.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_{n+2} en fonction de W_n.

b) En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}$ une expression de W_{2p} et W_{2p+1} en fonction de p, expression utilisant des factorielles.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.

b) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Montrer que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

5) a) Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

b) En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Solution 9.

1) $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\ dt = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))(n+1)\cos(t)\sin^n(t)\ dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\ dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2(t)\right)\sin^n(t)\ dt \\
&= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\ dt\right) = (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right)
\end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $W_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p}W_{2p-2}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0 \\
&= \frac{(2p)\times(2p-1)\times(2p-2)\times\ldots\times 3\times 2}{((2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$. De même, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
W_{2p+1} &= \frac{(2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 4\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\ldots\times 3\times 1} \times W_1 = \frac{((2p)\times(2p-2)\times\ldots\times 4\times 2)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. W_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc, $W_n > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \leqslant 1$ puis $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel positif $\sin^n(t)$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ ou encore $W_{n+1} \leqslant W_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \leqslant W_n$ et donc la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ puis, après division par le réel strictement positif W_n et d'après la question 2)a),

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant \frac{W_n}{W_n} = 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et donc que

$$W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.$$

5) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 2)a), $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$. Donc, la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

b) D'après la question 4), $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ puis $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$. Par suite, $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ puis, W_n étant positif, $W_n = \sqrt{W_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

On peut maintenant établir la formule de Stirling :

Exercice 10. (formule de Stirling). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ puis $v_n = \ln(u_n)$ puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

1) a) Déterminer une expression très simplifiée de w_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que la série de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel strictement positif C.

3) A l'aide de l'expression de W_{2p} obtenue dans l'exercice n° 9, calculer C.

Solution 10.

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\sqrt{n+1}} \times \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!} = e\frac{(n+1)^n}{n^n}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = e\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

puis,

$$w_n = v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

b)

$$\begin{aligned}
w_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. On en déduit que la série de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge.

2) On sait que la série de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$ et la suite (v_n) sont de même nature. Donc, la suite (v_n) converge vers un certain réel ℓ. Mais alors, $u_n = e^{v_n} \underset{n \to +\infty}{\to} e^{\ell}$. De plus, le réel $C = e^{\ell}$ est strictement positif.

3) D'après la question précédente, $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} C\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$. D'autre part, d'après l'exercice n° 9,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2 \times 2n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{C\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{\left(C\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\right)^2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}$$

Donc, $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{C\sqrt{2}}$ puis $C = \sqrt{2\pi}$. On a montré que

$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$$