Planche n° 31. Espaces vectoriels. Corrigé

Exercice n° 1

1) La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = 0.$$

Par suite, $\lambda f + \mu g$ est dans F. On a montré que

$$0 \in F \text{ et } \forall (f, g) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in F.$$

F est donc un sous-espace vectoriel de E.

2) La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0.$$

Par suite, $\lambda f + \mu g$ est dans F. On a montré que

$$0 \in F \text{ et } \forall (f, g) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in F.$$

F est donc un sous-espace vectoriel de E.

3) F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

4) La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(1 - x) = \lambda(f(x) + f(1 - x)) + \mu(g(x) + g(1 - x)) = 0$$

et donc $\lambda f + \mu g$ est dans F. F est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. Les fonctions considérées sont les fonctions dont les graphes sont symétriques par rapport au point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

5) F contient la fonction constante $x \mapsto 1$ mais pas son opposé la fonction constante $x \mapsto -1$ et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

6) F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice n° 2

Dans les cas où F est un sous-espace, on a à chaque fois trois démarches possibles pour le vérifier :

- Utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
- Obtenir F comme noyau d'une forme linéaire ou plus généralement, comme noyau d'une application linéaire.
- Obtenir F comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

On détaille une seule fois les trois démarches.

1) 1ère démarche. F contient le vecteur nul $(0, ..., 0)$ et donc $F \neq \varnothing$. Soient alors $((x_1, ..., x_n), (x'_1, ..., x'_n)) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x'_1, \dots, x'_n) = (\lambda x_1 + \mu x'_1, \dots, \lambda x_n + \mu x'_n)$$

avec $\lambda x_1 + \mu x'_1 = 0$. Donc, $\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x'_1, \dots, x'_n) \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2ème démarche. L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3ème démarche.

$$\begin{aligned} F &= \left\{(0, x_2, ..., x_n),\ (x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} = \left\{x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1),\ (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \\ &= \text{Vect}((0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)). \end{aligned}$$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2) F ne contient pas le vecteur nul et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3) (Ici, $n \geqslant 2$). L'application $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 - x_2$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

4) L'application $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 + ... + x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

5) (Ici, $n \geqslant 2$). Les vecteurs $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0..., 0)$ sont dans F mais $e_1 + e_2 = (1, 1, 0...0)$ n'y est pas. F n'est donc pas un sous espace vectoriel de E.

Remarque. F est la réunion des sous-espaces $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = 0\}$ et $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_2 = 0\}$.

Exercice n° 3

Il suffit de montrer que $C \subset B$.

Soit x un élément de C. Alors $x \in A + C = A + B$ et il existe $(y, z) \in A \times B$ tel que $x = y + z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E, $y = x - z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y + z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Exercice n° 4

Soit $u' = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. On a $u = 1.u + 0.u'$, puis $v = \cos a.u - \sin a.u'$, puis $w = \cos b.u - \sin b.u'$. Les trois suites u, v et w sont donc combinaisons linéaires des deux suites u et u' et constituent par suite une famille liée ($p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs constituent une famille liée).

Exercice n° 5

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda, \mu, -37, -3) \in F \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \ (\lambda, \mu, -37, -3) = au + bv \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \ \left\{\begin{array}{l} a + 2b = \lambda \\ 2a - b = \mu \\ -5a + 4b = -37 \\ 3a + 7b = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \ \left\{\begin{array}{l} a + 2b = \lambda \\ 2a - b = \mu \\ a = \dfrac{247}{47} \\ b = -\dfrac{126}{47} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{247}{47} + 2\left(-\dfrac{126}{47}\right) \\ \mu = 2 \times \dfrac{247}{47} + \dfrac{126}{47} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{5}{47} \\ \mu = \dfrac{620}{47} \end{array}\right. .$$

Exercice n° 6

Posons $F = \text{Vect}(a, b)$ et $G = \text{Vect}(c, d)$. On a immédiatement $c + 2d = a$ et $2c - d = b$ et donc a et b sont dans G. Puisque G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, on en déduit que $\text{Vect}(a, b) \subset G$ ou encore $F \subset G$.

En inversant les égalités précédentes, on obtient $c = \dfrac{1}{5}a + \dfrac{2}{5}b$ et $d = \dfrac{2}{5}a - \dfrac{1}{5}b$. Par suite, $\{c, d\} \subset G$ et donc $\text{Vect}(c, d) \subset F$ ou encore $G \subset F$. Finalement $F = G$.

Exercice n° 7

1) Si f existe alors nécessairement, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f((x, y, z)) = xf((1, 0, 0)) + yf((0, 1, 0)) + zf((0, 0, 1)) = x(1, 1) + y(0, 1) + z(-1, 1) = (x - z, x + y + z).$$

On en déduit l'unicité de f.

Réciproquement, f ainsi définie vérifie bien les trois égalités de l'énoncé. Il reste donc à se convaincre que f est linéaire. Soient $((x, y, z), (x', y', z')) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda(x - z) + \mu(x' - z'), \lambda(x + y + z) + \mu(x' + y' + z')) \\ &= \lambda(x - z, x + y + z) + \mu(x' - z', x' + y' + z') \\ &= \lambda f((x, y, z)) + \mu f((x', y', z')). \end{aligned}$$

f est donc linéaire et convient. On en déduit l'existence de f. On a alors $f((3, -1, 4)) = (3 - 4, 3 - 1 + 4) = (-1, 6)$.

Remarque. La démonstration de la linéarité de f ci-dessus est en fait superflue car le cours donne l'expression générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2) Détermination de Ker$f$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in \text{Ker}f \Leftrightarrow f((x,y,z))=(0,0)\Leftrightarrow (x-z,x+y+z)=(0,0)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x-z=0\\ x+y+z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z=x\\ y=-2x\end{array}\right. .$$

Donc, $\text{Ker}f=\{(x,-2x,x),\ x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,-2,1),\ x\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}((1,-2,1))$. La famille $((1,-2,1))$ engendre Ker$f$ et est libre. Donc, la famille $((1,-2,1))$ est une base de Ker$f$.

Détermination de Imf. Soit $(x',y')\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x',y')\in \text{Im}f &\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ f((x,y,z))=(x',y')\\ &\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l}x-z=x'\\ x+y+z=y'\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l}z=x-x'\\ y=-2x+x'+y'\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \text{le système d'inconnue } (x,y,z)\ :\ \left\{\begin{array}{l}z=x-x'\\ y=-2x+x'+y'\end{array}\right. \text{ a au moins une solution.}\end{aligned}$$

Or, le triplet $(0,x'+y',-x')$ est solution et le système proposé admet une solution. Par suite, tout (x',y') de $\mathbb{R}^2$ est dans Imf et finalement, $\text{Im}f=\mathbb{R}^2$.

Exercice n° 8

1)

$*$ On a toujours $\text{Ker}f\subset\text{Ker}\left(f^2\right)$. En effet, si x est un vecteur de Ker$f$, alors $f^2(x)=f(f(x))=f(0)=0$ (car f est linéaire) et x est dans $\text{Ker}\left(f^2\right)$.

Montrons alors que : $[\text{Ker}f=\text{Ker}f^2\Leftrightarrow \text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}]$.

• Supposons que $\text{Ker}f=\text{Ker}\left(f^2\right)$ et montrons que $\text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}$.
Soit $x\in\text{Ker}f\cap\text{Im}f$. Alors, d'une part $f(x)=0$ et d'autre part, il existe y élément de E tel que $x=f(y)$. Mais alors, $f^2(y)=f(x)=0$ et $y\in\text{Ker}\left(f^2\right)=\text{Ker}f$. Donc, $x=f(y)=0$.
Ceci montre que $\text{Ker}f\cap\text{Im}f\subset\{0\}$. D'autre part, puisque f est linéaire, Ker$f$ et Imf sont des sous-espaces vectoriels de E et donc $\text{Ker}f\cap\text{Im}f$ est un sous-espace vectoriel de E. On en déduit que $\{0\}\subset\text{Ker}f\cap\text{Im}f$ puis que $\text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}$.
On a montré que $\text{Ker}f=\text{Ker}\left(f^2\right)\Rightarrow\text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}$.

• Supposons que $\text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}$ et montrons que $\text{Ker}f=\text{Ker}\left(f^2\right)$.
Soit $x\in\text{Ker}\left(f^2\right)$. Alors $f(f(x))=0$ et donc $f(x)\in\text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}$. Donc, $f(x)=0$ et x est dans Ker$f$. On a ainsi montré que $\text{Ker}\left(f^2\right)\subset\text{Ker}f$ et, puisque l'on a toujours $\text{Ker}f\subset\text{Ker}\left(f^2\right)$, on a finalement $\text{Ker}f=\text{Ker}\left(f^2\right)$. On a montré que $\text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}\Rightarrow\text{Ker}f=\text{Ker}\left(f^2\right)$ et finalement que

$$\text{Ker}f=\text{Ker}\left(f^2\right)\Leftrightarrow\text{Ker}f\cap\text{Im}f=\{0\}.$$

$*$ On a toujours $\text{Im}\left(f^2\right)\subset\text{Im}f$. En effet : $y\in\text{Im}f^2\Rightarrow\exists x\in E/\ y=f(f(x))\Rightarrow y\in\text{Im}f$ ou plus simplement, $\forall x\in E$, $f^2(x)=f(f(x))\in\text{Im}f$.

Montrons alors que : $[\text{Im}f=\text{Im}\left(f^2\right)\Leftrightarrow E=\text{Ker}f+\text{Im}f]$.

• Supposons que $\text{Im}f=\text{Im}\left(f^2\right)$ et montrons que $\text{Ker}f+\text{Im}f=E$.
Soit $x\in E$. Puisque $f(x)\in\text{Im}f=\text{Im}\left(f^2\right)$, il existe $t\in E$ tel que $f(x)=f^2(t)$. Soit alors $z=f(t)$ et $y=x-f(t)$. On a bien $x=y+z$ et $z\in\text{Im}f$. De plus, $f(y)=f(x)-f(f(t))=0$ et y est bien élément de Ker$f$.
On a donc montré que $\forall x\in E$, $\exists (y,z)\in\text{Ker}f\times\text{Im}f/\ x=y+z$ et donc que $E=\text{Ker}f+\text{Im}f$.

• Supposons que $\text{Ker}f+\text{Im}f=E$ et montrons que $\text{Im}f=\text{Im}\left(f^2\right)$.
Soit $x\in E$. Il existe $(y,z)\in\text{Ker}f\times\text{Im}f$ tel que $x=y+z$. Mais alors $f(x)=f(z)\in\text{Im}\left(f^2\right)$ car z est dans Imf. Ainsi, pour tout x de E, $f(x)$ est dans $\text{Im}\left(f^2\right)$ ce qui montre que $\text{Im}f\subset\text{Im}\left(f^2\right)$ et comme on a toujours $\text{Im}\left(f^2\right)\subset\text{Im}f$, on a montré que $\text{Im}f=\text{Im}\left(f^2\right)$. Finalement

$$\text{Im}f=\text{Im}\left(f^2\right)\Leftrightarrow E=\text{Ker}f+\text{Im}f.$$

2) $Id-p$ projecteur $\Leftrightarrow (Id-p)^2=Id-p\Leftrightarrow Id-2p+p^2=Id-p\Leftrightarrow p^2=p\Leftrightarrow p$ projecteur.

Soit x un élément de E. $x\in\text{Im}p\Rightarrow\exists y\in E/\ x=p(y)$. Mais alors $p(x)=p^2(y)=p(y)=x$.

Donc, $\forall x \in E,\ (x \in \mathrm{Im} p \Rightarrow p(x) = x)$.

Réciproquement, si $p(x) = x$ alors bien sûr, x est dans $\mathrm{Im} p$.
Finalement, pour tout vecteur x de E, $x \in \mathrm{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$. On a montré que

$$\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p).$$

En appliquant ce qui précède à $\mathrm{Id} - p$ qui est également un projecteur, on obtient $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - p)) = \mathrm{Ker} p$.
Enfin, puisque $p^2 = p$ et donc en particulier que $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} p^2$ et $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} p^2$, le 1) montre que $E = \mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Im} p$.

3)

$$\begin{aligned}
p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p &\Leftrightarrow p \circ (\mathrm{Id} - q) = 0 \text{ et } q \circ (\mathrm{Id} - p) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - q) \subset \mathrm{Ker} p \text{ et } \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) \subset \mathrm{Ker} q \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker} q \subset \mathrm{Ker} p \text{ et } \mathrm{Ker} p \subset \mathrm{Ker} q \text{ (d'après 2))} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} q.
\end{aligned}$$

4) Supposons que $p \circ q + q \circ p = 0$ Alors, $p \circ q = (p \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p)$ et de même, $q \circ p = q \circ p \circ p = -p \circ q \circ p$.
En particulier, $p \circ q = q \circ p$ et donc $0 = p \circ q + q \circ p = 2p \circ q = 2q \circ p$ puis $p \circ q = q \circ p = 0$.

La réciproque est immédiate.

$p + q$ projecteur $\Leftrightarrow (p + q)^2 = p + q \Leftrightarrow p^2 + pq + qp + q^2 = p + q \Leftrightarrow pq + qp = 0 \Leftrightarrow pq = qp = 0$ (d'après ci-dessus).

Ensuite, $\mathrm{Im}(p + q) = \{p(x) + q(x),\ x \in E\} \subset \{p(x) + q(y),\ (x, y) \in E^2\} = \mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$.

Réciproquement, soit z un élément de $\mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$. Il existe deux vecteurs x et y de E tels que $z = p(x) + q(y)$. Mais alors, $p(z) = p^2(x) + pq(y) = p(x)$ et $q(z) = qp(x) + q^2(y) = q(y)$ et donc

$$z = p(x) + p(y) = p(z) + q(z) = (p + q)(z) \in \mathrm{Im}(p + q).$$

Donc, $\mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q \subset \mathrm{Im}(p + q)$ et finalement,

$$\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q.$$

$\mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q = \{x \in E/\ p(x) = q(x) = 0\} \subset \{x \in E/\ p(x) + q(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(p + q)$.

Réciproquement, si x est élément de $\mathrm{Ker}(p + q)$ alors $p(x) + q(x) = 0$.
Par suite, $p(x) = p^2(x) + pq(x) = p(p(x) + q(x)) = p(0) = 0$ et $q(x) = qp(x) + q^2(x) = q(0) = 0$. Donc, $p(x) = q(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$. Finalement,

$$\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q.$$

Exercice n° 9

1) Soit $x \in E$. $x \in (A \cap B) + (A \cap C) \Rightarrow \exists y \in A \cap B,\ \exists z \in A \cap C/\ x = y + z$.
y et z sont dans A et donc $x = y + z$ est dans A car A est un sous-espace vectoriel de E.
Puis y est dans B et z est dans C et donc $x = y + z$ est dans $B + C$. Finalement,

$$\forall x \in E,\ [x \in (A \cap B) + (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B + C)].$$

Autre démarche.
$(A \cap B \subset B$ et $A \cap C \subset C) \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset B + C$ puis $(A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset A + A = A)$, et finalement $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.

2) Si on essaie de démontrer l'inclusion contraire, le raisonnement coince car la somme $y + z$ peut être dans A sans que ni y, ni z ne soient dans A.

Contre-exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $A = \mathbb{R}.(1, 0) = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$, $B = \mathbb{R}.(0, 1)$ et $C = \mathbb{R}.(1, 1)$.
$B + C = \mathbb{R}^2$ et $A \cap (B + C) = A$ mais $A \cap B = \{0\}$ et $A \cap C = \{0\}$ et donc $(A \cap B) + (A \cap C) = \{0\} \neq A \cap (B + C)$.

3) $A \cap B \subset B \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset B + (A \cap C)$ mais aussi $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A + A = A$.
Donc, $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + (A \cap C))$.

Inversement, soit $x \in A \cap (B + (A \cap C))$ alors il existe $y \in B$ et $z \in A \cap C$ tel que $x = y + z$. Mais alors, x et z sont dans A et donc $y = x - z$ est dans A et même plus précisément dans $A \cap B$. Donc, $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$.
Ceci montre que $A \cap (B + (A \cap C)) \subset (A \cap B) + (A \cap C)$ et finalement,

$$A \cap (B + (A \cap C)) = (A \cap B) + (A \cap C).$$

Exercice n° 10

1) Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on pose $f((x,y,z,t)) = x - 2y$, $g((x,y,z,t)) = y - 2z$ et $h((x,y,z,t)) = x - y + z - t$. f, g et h sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$. Donc, $V = \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et $W = \mathrm{Ker} h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in V \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 2z \end{array}\right. .$$

Donc, $V = \{(4z, 2z, z, t),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = (4,2,1,0)$ et $e_2 = (0,0,0,1)$. Montrons alors que (e_1, e_2) est libre. Soit $(z,t) \in \mathbb{R}^2$.

$$ze_1 + te_2 = 0 \Rightarrow (4z, 2z, z, t) = (0,0,0,0) \Rightarrow z = t = 0.$$

Donc, (e_1, e_2) est une base de V.

Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(x,y,z,t) \in W \Leftrightarrow t = x - y + z$. Donc, $W = \{(x,y,z,x-y+z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1,0,0,1)$, $e'_2 = (0,1,0,-1)$ et $e'_3 = (0,0,1,1)$.

Montrons alors que (e'_1, e'_2, e'_3) est libre. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Rightarrow (x,y,z,x-y+z) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Donc, (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de W.

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in V \cap W \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 2z \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 2z \\ t = 3z \end{array}\right. .$$

Donc, $V \cap W = \{(4z, 2z, z, 3z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e)$ où $e = (4,2,1,3)$. De plus, e étant non nul, la famille (e) est libre et est donc une base de $V \cap W$.

3) Soit $u = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On cherche $v = (4\alpha, 2\alpha, \alpha, \beta) \in V$ et $w = (a, b, c, a - b + c) \in W$ tels que $u = v + w$.

$$u = v + w \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\alpha + a = x \\ 2\alpha + b = y \\ \alpha + c = z \\ \beta + a - b + c = t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = x - 4\alpha \\ b = y - 2\alpha \\ c = z - \alpha \\ \beta = -x + y - z + t + 3\alpha \end{array}\right. .$$

et $\alpha = 0$, $\beta = -x + y - z + t$, $a = x$, $b = y$ et $c = z$ conviennent. Donc, $\forall u \in \mathbb{R}^4$, $\exists (v,w) \in V \times W /\ u = v + w$. On a montré que

$$\mathbb{R}^4 = V + W.$$

Exercice n° 11

1) C contient l'identité de $\mathbb{R}$, mais ne contient pas son opposé. Donc, C n'est pas un espace vectoriel.

2) Montrons que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. V est déjà non vide car contient la fonction nulle ($0 = 0 - 0$).

Soit $(f_1, f_2) \in V^2$. Il existe $(g_1, g_2, h_1, h_2) \in C^4$ tel que $f_1 = g_1 - h_1$ et $f_2 = g_2 - h_2$. Mais alors,

$$f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2).$$

Or, une somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et donc, $g_1 + g_2$ et $h_1 + h_2$ sont des éléments de C ou encore $f_1 + f_2$ est dans V.

Soit $f \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(g, h) \in V^2$ tel que $f = g - h$ et donc $\lambda f = \lambda g - \lambda h$.
Si $\lambda \geqslant 0$, λg et λh sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et λf est dans V.
Si $\lambda < 0$, on écrit $\lambda f = (-\lambda h) - (-\lambda g)$, et puisque $-\lambda g$ et $-\lambda h$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$, λf est encore dans V.

En résumé, V n'est pas vide et est stable pour $+$ et $.$ et on a donc montré que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$(1+1).(x+y) = 1.(x+y) + 1.(x+y) = (x+y) + (x+y) = x+y+x+y$$

mais aussi

$$(1+1).(x+y) = (1+1).x + (1+1).y = x+x+y+y.$$

Enfin, $(E, +)$ étant un groupe, tout élément est simplifiable pour $+$, et en particulier x est simplifiable à gauche pour $+$ et y est simplifiable à droite pour $+$. Après simplification, on obtient $y + x = x + y$. On a montré que pour tout couple (x, y) élément de E^2, $x + y = y + x$.

Exercice n° 13

Soit $F = (A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)$.
$F \subset A + A + B = A + B$ puis $F \subset A + C + C = A + C$ puis $F \subset B + C + C = B + C$ et finalement $F \subset (A+B) \cap (A+C) \cap (B+C)$.

Exercice n° 14

Soit $u = (1, 1, \ldots, 1)$. $F = \text{Vect}(u)$ et donc F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, car G est le noyau de la forme linéaire $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1 - \lambda, \ldots, x_n - \lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists! \lambda \in \mathbb{R} /\ x - \lambda u \in G$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! y \in F /\ x - y \in G.$$

On a montré que

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G.$$

Le projeté sur F parallèlement à G d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right).u = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \ldots, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

et le projeté du même vecteur sur G parallèlement à F est

$$x - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right).u = \left(x_1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \ldots, x_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Exercice n° 15

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$ ou encore tel que $n \times b^2 = a^2$. Mais alors, par unicité de la décomposition d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 en facteurs premiers, tous les facteurs premiers de n ont un exposant pair ce qui signifie exactement que n est un carré parfait.
Si $n \geqslant 2$ et si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, alors n est un carré parfait. Ceci reste vrai quand $n = 0$ ou 1. On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \text{ est un carré parfait})$$

ou encore par contraposition

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ n'est pas un carré parfait} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}).$$

2) D'après 1), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.
$E = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ et donc, E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$ en est une famille génératrice.

Montrons que cette famille est $\mathbb{Q}$-libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$.

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 \Rightarrow \left(a+d\sqrt{6}\right)^2=\left(-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a^2+2ad\sqrt{6}+6d^2=2b^2+2bc\sqrt{6}+3c^2$$
$$\Rightarrow a^2-2b^2-3c^2+6d^2=2(-ad+bc)\sqrt{6}.$$

Puisque $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$, on obtient $a^2-2b^2-3c^2+6d^2=2(-ad+bc)=0$ (car si $bc-ad\neq 0$, $\sqrt{6}=\dfrac{a^2-2b^2-3c^2+6d^2}{2(-ad+bc)}\in\mathbb{Q}$) ou encore,

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-3c^2=2b^2-6d^2 \quad (1)\\ ad=bc \quad (2)\end{array}\right..$$

De même,

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 \Rightarrow \left(a+c\sqrt{3}\right)^2=\left(-b\sqrt{2}-d\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow a^2+2ac\sqrt{3}+3c^2=2b^2+4bd\sqrt{3}+6d^2$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+3c^2=2b^2+6d^2 \quad (3)\\ ac=2bd \quad (4)\end{array}\right..$$

(puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel). En additionnant et en retranchant (1) et (3), on obtient $a^2=2b^2$ et $c^2=2d^2$. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on ne peut avoir $b\neq 0$ (car alors $\sqrt{2}=\pm\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$) ou $d\neq 0$. Donc, $b=d=0$ puis $a=c=0$. Finalement, la famille $\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre et est donc une base de E.

Exercice n° 16

1) Notons respectivement s et c, les fonctions sinus et cosinus.
$f_a=\cos a.s+\sin a.c$, $f_b=\cos b.s+\sin b.c$ et $f_c=\cos c.s+\sin c.c$. Donc, f_a, f_b et f_c sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions s et c et constituent donc une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs donnés constituent une famille liée).

2) f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x\mapsto 1$ et $x\mapsto x$. Donc, la famille (f_0,f_1,f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

3) Pour α réel donné et $x>0$, posons $f_\alpha(x)=x^\alpha$.
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 puis $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1<\dots<\alpha_n$. Soit encore $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_{\alpha_k}=0\Rightarrow \forall x\in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x^{\alpha_k}=0\Rightarrow \forall x\in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x^{\alpha_k-\alpha_n}=0,$$

(en divisant les deux membres par x^{α_n}). Dans cette dernière égalité, on fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient $\lambda_n=0$. Puis, par récurrence descendante, $\lambda_{n-1}=\dots=\lambda_1=0$. On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre et donc, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

4) Pour a réel donné et x réel, posons $f_a(x)=|x-a|$. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis $a_1,\dots,a_n$, n réels deux à deux distincts. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_{a_k}=0$.

S'il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_i\neq 0$ alors,

$$f_{a_i}=-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{k\neq i}\lambda_k f_{a_k}.$$

Mais cette dernière égalité est impossible car f_{a_i} n'est pas dérivable en a_i alors que $-\dfrac{1}{\lambda_i}\sum_{k\neq i}\lambda_k f_{a_k}$ l'est. Donc, tous les λ_i sont nuls. Ceci montre que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice n° 17

1) $\Leftarrow$ / Soit $(u,v)((\mathscr{L}(E))^2$. On suppose qu'il existe $w\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u=w\circ v$. Soit x un élément de $\mathrm{Ker} v$. Alors $v(x)=0$ et donc $u(x)=w(v(x))=w(0)=0$. Mais alors, x est dans $\mathrm{Ker} u$. Donc $\mathrm{Ker} v\subset\mathrm{Ker} u$.

$\Rightarrow$ / Supposons que $\mathrm{Ker} v\subset\mathrm{Ker} u$. On cherche à définir w, élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $w\circ v=u$. Il faut définir précisément w sur $\mathrm{Im} v$ car sur $E\setminus\mathrm{Im} v$, on a aucune autre contrainte que la linéarité.

Soit y un élément de $\mathrm{Im}v$. (Il existe x élément de E tel que $y = v(x)$. On a alors envie de poser $w(y) = u(x)$ mais le problème est que y, élément de $\mathrm{Im}v$ donné peut avoir plusieurs antécédents x, x'... et on peut avoir $u(x) \neq u(x')$ de sorte que l'on n'aurait même pas défini une application w.)

Soient x et x' deux éléments de E tels que $v(x) = v(x') = y$ alors $v(x - x') = 0$ et donc $x - x' \in \mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Ker}u$. Par suite, $u(x-x') = 0$ ou encore $u(x) = u(x')$. En résumé, pour y élément donné de $\mathrm{Im}v$, il existe x élément de E tel que $v(x) = y$. On pose alors $w(y) = u(x)$ en notant que $w(y)$ est bien uniquement défini, car ne dépend pas du choix de l'antécédent x de y par v. w n'est pas encore défini sur E tout entier. Notons F un supplémentaire quelconque de $\mathrm{Im}v$ dans E (l'existence de F est admise).

Soit X un élément de E. Il existe deux vecteurs y et z, de $\mathrm{Im}v$ et F respectivement, tels que $X = y + z$. On pose alors $w(X) = u(x)$ où x est un antécédent quelconque de y par v (on a pris pour restriction de w à F l'application nulle). w ainsi définie est une application de E dans E car, pour X donné, y est uniquement défini puis $u(x)$ est uniquement défini (mais pas nécessairement x).

Soit x un élément de E et $y = v(x)$. $w(v(x)) = w(y) = w(y + 0) = u(x)$ (car 1) y est dans $\mathrm{Im}v$ 2) 0 est dans F 3) x est un antécédent de y par v) et donc $w \circ v = u$.

Montrons que w est linéaire. Soient, avec les notations précédentes, $X_1 = y_1 + z_1$ et $X_2 = y_2 + z_2$ ...

$$\begin{aligned} w(X_1 + X_2) &= w((y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) = u(x_1 + x_2) \quad (\text{car } y_1 + y_2 = v(x_1) + v(x_2) = v(x_1 + x_2) \text{ et car } z_1 + z_2 \in F) \\ &= u(x_1) + u(x_2) = w(X_1) + w(X_2) \end{aligned}$$

et

$$w(\lambda X) = w(\lambda y + \lambda z) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda w(X).$$

2) On applique 1) à $u = \mathrm{Id}$.

$$v \text{ injective} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}v = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Ker}\mathrm{Id}_E \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E)/\ w \circ v = \mathrm{Id}_E.$$

Exercice n° 18

1) $\forall P \in E$, $f(P) = P'$ est un polynôme et donc f est une application de E vers E.
$\forall (P, Q) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ et f est un endomorphisme de E.

Soit $P \in E$. $P \in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant. $\mathrm{Ker}f$ n'est pas nul et f n'est pas injective.
Soient $Q \in E$ puis P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\int_0^x Q(t)\ dt$. P est bien un polynôme tel que $f(P) = Q$. f est surjective.

Soit $F = \{P \in E/\ P(0) = 0\}$. F est un sous espace de E en tant que noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(0)$. $\mathrm{Ker}f \cap F = \{0\}$ car si un polynôme est constant et s'annule en 0, ce polynôme est nul. Enfin, si P est un polynôme quelconque, $P = P(0) + (P - P(0))$ et P s'écrit bien comme la somme d'un polynôme constant et d'un polynôme s'annulant en 0. Finalement $E = \mathrm{Ker}f \oplus F$.

2) On montre facilement que g est un endomorphisme de E.
$P \in \mathrm{Ker}g \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x P(t)\ dt = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$ (en dérivant les deux membres de l'égalité). Donc, $\mathrm{Ker}g = \{0\}$ et donc g est injective.
Si P est dans $\mathrm{Im}g$ alors $P(0) = 0$ (ce qui montre que g n'est pas surjective car par exemple, le polynôme 1 n'a pas d'antécédent par g).
Réciproquement, si $P(0) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^x P'(t)\ dt = P(x) - P(0) = P(x)$ ce qui montre que $P = g(P')$ est dans $\mathrm{Im}g$. Finalement,

$$\mathrm{Im}g = \{P \in E/\ P(0) = 0\}.$$

Exercice n° 19

1) a) La suite nulle est dans F.
Soient $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a\,(\lambda u + \mu v)_{n+2} + b\,(\lambda u + \mu v)_{n+1} + c\,(\lambda u + \mu v)_n &= a\,(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) + b\,(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + c\,(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda\,(a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n) + \mu\,(a v_{n+2} + b v_{n+1} + c v_n) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0, \end{aligned}$$

et donc la suite $\lambda u+\mu v$ est dans F. En résumé, F contient 0 et est stable par combinaison linéaire. Donc, F est un sous-espace vectoriel de E.

b) φ est bien une application de E dans E. Soient $(u,v)\in F^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u+\mu v)_n &= a(\lambda u+\mu v)_{n+2}+b(\lambda u+\mu v)_{n+1}+c(\lambda u+\mu v)_n\\ &= a\left(\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2}\right)+b\left(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}\right)+c\left(\lambda u_n+\mu v_n\right)\\ &= \lambda\left(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n\right)+\mu\left(av_{n+2}+bv_{n+1}+cv_n\right)=\lambda\varphi(u)_n+\mu\varphi(v)_n\\ &= \left(\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v)\right)_n,\end{aligned}$$

et donc $\varphi(\lambda u+\mu v)=\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v)$. Ainsi, φ est un endomorphisme de E. Puisque $F=\mathrm{Ker}\varphi$, F est un sous-espace vectoriel de E.

2) a) La fonction nulle est dans F.
Soient $(f,g)\in F^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$. Pour tout réel x de I,

$$\begin{aligned}a\left(\lambda f+\mu g\right)''(x)+b\left(\lambda f+\mu g\right)'(x)+c\left(\lambda f+\mu g\right)(x) &= a\left(\lambda f''(x)+\mu g''(x)\right)+b\left(\lambda f'(x)+\mu g'(x)\right)+c\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)\\ &= \lambda\left(af''(x)+bf'(x)+cf(x)\right)+\mu\left(ag''(x)+bg'(x)+cg(x)\right)\\ &= \lambda\times 0+\mu\times 0=0,\end{aligned}$$

et donc la fonction $\lambda f+\mu g$ est dans F. En résumé, F contient 0 et est stable par combinaison linéaire. Donc, F est un sous-espace vectoriel de E.

b) φ est application de E dans E car si $f\in E$, alors $\varphi(f)=af''+bf'+cf$ est définie et de classe C^∞ sur I ou encore $\varphi(f)$ est un élément de E.

Soient $(f,g)\in F^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$. Pour tout réel x de I,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+\mu g)(x) &= a\left(\lambda f+\mu g\right)''(x)+b\left(\lambda f+\mu g\right)'(x)+c\left(\lambda f+\mu g\right)(x)\\ &= a\left(\lambda f''(x)+\mu g''(x)\right)+b\left(\lambda f'(x)+\mu g'(x)\right)+c\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)\\ &= \lambda\left(af''(x)+bf'(x)+cf(x)\right)+\mu\left(ag''(x)+bg'(x)+cg(x)\right)\\ &= \lambda\varphi(f)(x)+\mu\varphi(g)(x)=(\lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g))(x),\end{aligned}$$

et donc $\varphi(\lambda f+\mu g)=\lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)$. Ainsi, φ est un endomorphisme de E. Puisque $F=\mathrm{Ker}\varphi$, F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice n° 20

1) F contient 0 et donc $C_E F$ ne contient pas 0. Par suite, $C_E F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

2) a) • Si $F\subset G$ ou $G\subset F$, alors $F\cup G=G$ ou $F\cup G=F$. Dans tous les cas, $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

• Réciproquement, supposons que $F\cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E. Si $F\subset G$, c'est fini. Sinon, $F\not\subset G$ et il existe un vecteur $x_0\in E$ tel que $x_0\in F$ et $x_0\notin G$. Montrons alors que $G\subset F$.
Soit $x\in G$. Alors, $x\in F\cup G$ et $x_0\in F\cup G$. Puisque $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, $x+x_0\in F\cup G$.

Si $x+x_0\in G$, alors $(x+x_0)-x\in G$ ou encore $x_0\in G$ ce qui n'est pas. Donc, $x+x_0\in F$. Mais alors, $(x+x_0)-x_0\in F$ ou encore $x\in F$. On a montré que

$$\forall x\in E,\ (x\in G\Rightarrow x\in F),$$

et donc que $G\subset F$.

b) $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G et donc contenant $F\cup G$. D'autre part, si H est un sous-espace vectoriel contenant $F\cup G$, H contient F et G et donc aussi l'ensemble des sommes d'un élément de F et d'un élément de G c'est-à-dire $F+G$. Finalement,

$$\mathrm{Vect}(F\cup G)=F+G.$$

Exercice n° 21

$$\begin{aligned}g\circ f=0 &\Leftrightarrow \forall x\in E,\ g(f(x))=0\Leftrightarrow\forall x\in E,\ f(x)\in\mathrm{Ker}g\\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}f\subset\mathrm{Ker}g.\end{aligned}$$

Exercice n° 22

Soit $x \in E$.

$$x \in \mathrm{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{Ker} g$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathrm{Ker} g).$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = f^{-1}\,(\mathrm{Ker} g)$.

Exercice n° 23

• Montrons que la famille $(1, z)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \times 1 + \mu \times z = 0$. Si $\mu \neq 0$, alors $z = -\dfrac{\lambda}{\mu}$. En particulier, z est réel ce qui n'est pas. Donc $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$.

Ainsi, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda.1 + \mu.z = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0)$ et donc la famille $(1, z)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

• Montrons que la famille $(1, z)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Posons $z = \alpha + i\beta$ où α et β sont deux réels. Puisque $z \notin \mathbb{R}$, on a $\beta \neq 0$.
Soit $Z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Alors

$$Z = a + ib = \frac{b}{\beta}(\alpha + i\beta) - \frac{b\alpha}{\beta} + a = \frac{a\beta - b\alpha}{\beta}.1 + \frac{b}{\beta}.z,$$

avec $\dfrac{a\beta - b\alpha}{\beta}$ et $\dfrac{b}{\beta}$ réels. Donc Z est combinaison linéaire à coefficients réels de 1 et z. Par suite, la famille $(1, z)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

En résumé, la famille $(1, z)$ est une famille libre et génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Donc la famille $(1, z)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice n° 24

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 puis $a_1, \ldots, a_n$ n réels tels que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Supposons par l'absurde la famille $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ liée. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0$.
$\{k \in [\![1, n]\!]/\ \lambda_k \neq 0\}$ est une partie non vide (par hypothèse) de $\mathbb{N}$ et majorée par n. Donc $\{k \in [\![1, n]\!]/\ \lambda_k \neq 0\}$ admet un plus grand élément.

Soit $p = \mathrm{Max}\{k \in [\![1, n]\!]/\ \lambda_k \neq 0\}$. Par définition de p, on a $\lambda_p \neq 0$ et pour tout réel x, $\lambda_1 e^{a_1 x} + \ldots + \lambda_p e^{a_p x} = 0$. On divise les deux membres de cette égalité par $e^{a_p x}$ qui n'est pas nul et on obtient pour tout réel x,

$$\lambda_1 e^{-(a_p - a_1)x} + \ldots + \lambda_{p-1} e^{-(a_p - a_{p-1})x} + \lambda_p = 0.$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient $\lambda_p = 0$ (car $\forall k < p,\ a_p - a_k > 0$). Ceci contredit le fait que $\lambda_p \neq 0$. Donc, il n'existe pas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Ceci montre que la famille $(f_{a_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice n° 25

Soient φ et ψ deux formes linéaires telles que $\varphi \times \psi = 0$. Pour tout élément x de E, on a $\varphi(x) \times \psi(x) = 0$. Supposons par l'absurde que $\varphi \neq 0$ et $\psi \neq 0$. Donc il existe x_0 et x_1 deux éléments de E tels que $\varphi\,(x_0) \neq 0$ et $\psi\,(x_1) \neq 0$. Puisque $\varphi\,(x_0) \times \psi\,(x_0) = 0$ et que $\varphi\,(x_0) \neq 0$, on en déduit que $\psi\,(x_0) = 0$. De même, $\varphi\,(x_1) = 0$. Mais alors

$$\varphi\,(x_0 + x_1) \times \psi\,(x_0 + x_1) = (\varphi\,(x_0) + \varphi\,(x_1))\,(\psi\,(x_0) + \psi\,(x_1))$$
$$= \varphi\,(x_0)\,\psi\,(x_1) \neq 0.$$

Ceci contredit le fait que pour tout élément x de E, on a $\varphi(x) \times \psi(x) = 0$. Donc, $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

Exercice n° 26

• Montrons que la famille $\left((X - a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule de Taylor,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k.$$

Donc P est combinaison linéaire des polynômes 1, $X-a$, ..., $(X-a)^n$. Ceci montre que la famille $\left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Montrons que la famille $\left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre. Supposons par l'absurde qu'il existe $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)\neq(0,\ldots,0)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X-a)^k=0$.

$\{k\in[\![0,n]\!]/\ \lambda_k\neq 0\}$ est une partie non vide (par hypothèse) de $\mathbb{N}$ et majorée par n. Donc $\{k\in[\![0,n]\!]/\ \lambda_k\neq 0\}$ admet un plus grand élément.

Soit $p=\text{Max}\{k\in[\![0,n]\!]/\ \lambda_k\neq 0\}$. Par définition de p, on a $\lambda_p\neq 0$ et pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\lambda_k(X-a)^k=0$. Mais cette dernière égalité est impossible car, puisque $\lambda_p\neq 0$, le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\lambda_k(X-a)^k$ est de degré p et n'est donc pas le polynôme nul. Donc, la famille $\left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

En résumé, la famille $\left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc la famille $\left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

