Chapitre 30. Intégration sur un segment

Plan du chapitre

1 Fonctions en escalier. Fonctions continues par morceaux

1.1 Subdivisions d'un segment

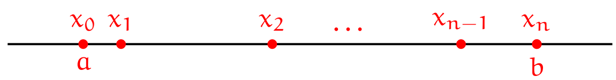
DÉFINITION 1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Une **subdivision du segment** $[a, b]$ est un $(n+1)$-uplet $(x_0, \ldots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ tel que

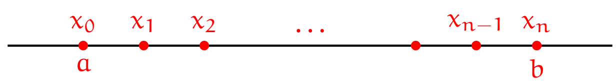
$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Le **pas** de cette subdivision est $\text{Max}\{x_{k+1} - x_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Le **support** de cette subdivision est l'ensemble $\{x_k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$.

Une subdivision découpe le segment $[a, b]$ en un nombre **fini** de segments. Une subdivision a l'allure suivante



Si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, alors $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ et de plus, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$. On a obtenu une subdivision du segment $[a, b]$, **à pas constant**.



DÉFINITION 2. Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

σ est **plus fine** que σ' si et seulement si le support de σ contient le support de σ'.

Ainsi, si on note $\mathcal{S}(\sigma)$ et $\mathcal{S}(\sigma')$ les supports respectifs de σ et σ',

$$\sigma \text{ est plus fine que } \sigma' \text{ si et seulement si } \mathcal{S}(\sigma') \subset \mathcal{S}(\sigma).$$

Exemple. $\sigma = \left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1\right)$ et $\sigma' = \left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ sont deux subdivisions de $[0, 1]$ telles que σ est plus fine que σ'. $\sigma = \left(0, \dfrac{1}{3}, 1\right)$ et $\sigma' = \left(0, \dfrac{2}{3}, 1\right)$ sont deux autres subdivisions de $[0, 1]$ et aucune des deux subdivisions n'est plus fine que l'autre. ❑

Soient $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ et $\sigma' = (y_0, \ldots, y_p)$ deux subdivisions du segment $[a, b]$. On note $\mathcal{S}(\sigma)$ et $\mathcal{S}(\sigma')$ les supports respectifs des subdivisions σ et σ'.
On peut définit la subdivision $\sigma \cup \sigma' = (z_0, \ldots, z_q)$ de $[a, b]$ comme la subdivision de $[a, b]$ dont le support est $\mathcal{S}(\sigma) \cup \mathcal{S}(\sigma')$: on réunit les deux supports, puis on élimine les doublons et enfin on classe les réels obtenus dans l'ordre croissant.

Par exemple, si $\sigma = \left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ et $\sigma' = \left(0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1\right)$, alors $\sigma \cup \sigma' = \left(0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, 1\right)$.

Un théorème immédiat est :

Théorème 1. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

Alors, $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision de $[a, b]$, plus fine que σ et σ'.

1.2 Fonctions en escalier

1.2.1 Définition

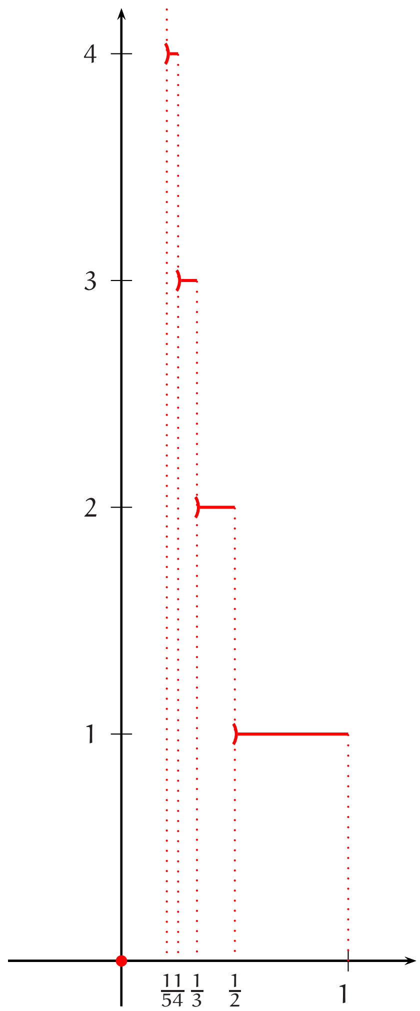
DÉFINITION 3. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est **en escalier sur** $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est constante. On dit dans ce cas que la subdivision σ est une **subdivision adaptée** à la fonction en escalier f.

DÉFINITION 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est **en escalier sur** I si et seulement si f est en escalier sur tout segment contenu dans I.

Ainsi, la fonction « partie entière » est en escaliers sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc est en escalier sur $\mathbb{R}$. Par contre, la fonction $x \mapsto \left\{\begin{array}{l} E\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$ n'est pas en escalier sur le segment $[0,1]$ mais est en escalier sur $]0,1]$. Voici son graphe :



1.2.2 Propriétés

On a immédiatement :

Théorème 2. Soient f une fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ puis σ une subdivision adaptée à f.

Si σ' est une subdivision de $[a,b]$, plus fine que σ, alors σ' est adaptée à f.

Théorème 3. Soit f une fonction en escalier sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, f est bornée sur le segment $[a,b]$.

DÉMONSTRATION . Il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. La fonction f prend un nombre fini de valeurs (au plus $(n+1)+n = 2n+1$ valeurs) et en particulier est bornée sur $[a,b]$).

❏

Théorème 4. Soient f et g deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$, $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors,

- pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier sur $[a, b]$.
- la fonction $f \times g$ est en escalier sur $[a, b]$.
- si f ne s'annule pas sur $[a, b]$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est en escalier sur $[a, b]$.
- si g ne s'annule pas sur $[a, b]$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est en escalier sur $[a, b]$.

Démonstration . Soient σ une subdivision du segment $[a, b]$ adaptée à f et σ' une subdivision du segment $[a, b]$ adaptée à g. $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision de $[a, b]$, plus fine que σ et σ' d'après le théorème 1. $\sigma'' = \sigma \cup \sigma' = (x_0, \ldots, x_n)$ est donc une subdivision adaptée à f et à g

Les fonctions f et g sont constantes sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et il en est de même des fonctions $\lambda f + \mu g$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, et $f \times g$, puis $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{f}{g}$ si de plus les dénominateurs ne s'annulent pas.

❏

Remarque. Si on désigne par $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{[a,b]}, +, .\right)$.

Théorème 5. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$, $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est en escalier sur $[a, b]$, alors, pour tout réel c de $]a, b[$, f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

Réciproquement, s'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est en escalier sur $[a, b]$.

Démonstration . Supposons f en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Soit $c \in]a, b[$. Soit $p = \max\{k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k \leqslant c < x_{k+1}\}$ (p existe car $\{k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k \leqslant c < x_{k+1}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car 0 est dans cet ensemble) et majorée (par $n-1$) de $\mathbb{N}$).

Si $c > x_p$, par définition $x_p < c < x_{p+1}$ et donc les subdivisions $\sigma' = (x_0, \ldots, x_p, c)$ et $\sigma'' = (c, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ sont des subdivisions de $[a, c]$ et $[c, b]$ respectivement, et f est constante sur chacun des intervalles ouverts définis par ces subdivisions. f est donc en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.
Si $c = x_p$, les subdivisons $\sigma' = (x_0, \ldots, x_p)$ et $\sigma'' = (c, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ sont des subdivisions de $[a, c]$ et $[c, b]$ respectivement, et f est constante sur chacun des intervalles ouverts définis par ces subdivisions. f est donc en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

Inversement, soit $c \in]a, b[$ tel que f soit en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Soient $\sigma' = (x_0, \ldots, x_p)$ et $\sigma' = (y_0, \ldots, y_q)$ des subdivisions de $[a, c]$ et $[c, b]$ respectivement, adaptées à f (en particulier, $x_p = c = y_0$). Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$. σ est une subdivision de $[a, b]$ et f est constante sur chacun des intervalles ouverts définis par cette subdivision. Donc, f est en escalier sur $[a, b]$.

❏

Théorème 6. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$, $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est en escalier sur $[a, b]$, alors $|f|$ est en escalier sur $[a, b]$.

Démonstration . Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{]x_k, x_{k+1}[}$ est constante et donc $|f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est constante. Donc, $|f|$ est en escalier sur $[a, b]$ et σ est une subdivision adaptée à $|f|$.

❏

1.3 Fonctions continues par morceaux

1.3.1 Définition

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La fonction f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ telle que :

1) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$,
2) pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $f_{/]x_k, x_{k+1}[}$ de f à $]x_k, x_{k+1}[$, se prolonge en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Dans ce cas, la subdivision σ est dite adaptée à la fonction f.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Une fonction continue sur* $[a, b]$ *est en particulier une fonction continue par morceaux sur* $[a, b]$*. Il suffit d'appliquer la définition avec* $\sigma = (x_0, x_1) = (a, b)$*.*

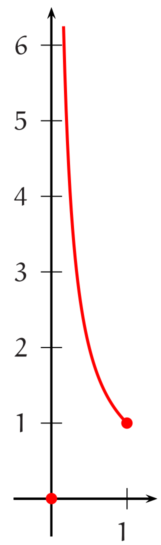
◇ *La deuxième condition signifie plus concrètement qu'en chacun de ses points de discontinuité,* f *admet une limite à gauche et une limite à droite dans* $\mathbb{K}$ *(uniquement une limite à droite en* a *et une limite à gauche en* b*).*

◇ *On doit faire attention à la précision de l'intitulé de la deuxième condition : « ... la restriction* $f_{/]x_k, x_{k+1}[}$ *de* f *à* $]x_k, x_{k+1}[$ *se prolonge en une fonction continue sur* $[x_k, x_{k+1}]$ *». Cette phrase ne peut pas être remplacée par la phrase « ...* f *se prolonge en une fonction continue sur* $[x_k, x_{k+1}]$ *» car la fonction* f *est déjà définie en* x_k *et éventuellement discontinue en* x_k*. C'est bien la restriction de* f *à l'intervalle ouvert qui est, ou n'est pas, prolongeable par continuité.*

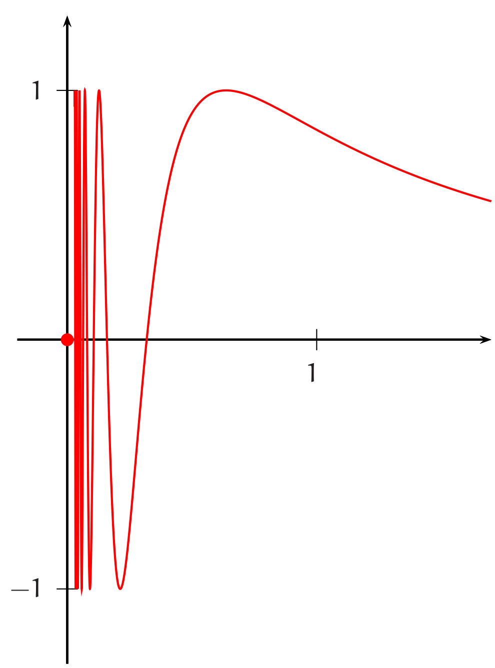
◇ *Une fonction en escalier sur* $[a, b]$ *est en particulier continue par morceaux sur* $[a, b]$*.*

Voici plusieurs exemples de fonctions qui ne sont pas continues par morceaux sur un segment.

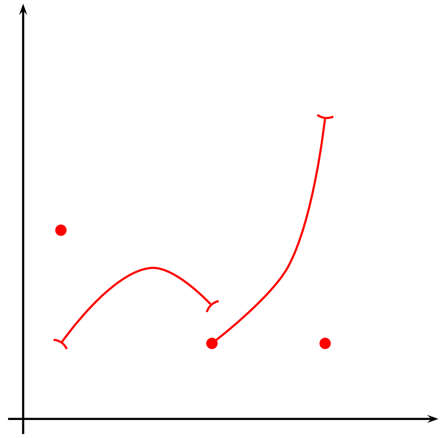
Pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in]0, 1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. f est définie sur $[0, 1]$ et continue sur $]0, 1]$. Mais, f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ car la fonction f n'a pas une limite réelle en 0 à droite. Voici son graphe :



Pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \in]0, 2] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. f est définie sur $[0, 2]$ et continue sur $]0, 2]$. Mais, f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 2]$ car la fonction f n'a pas une limite réelle en 0 à droite. Voici son graphe :



Le graphe d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a l'allure suivante :



La définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment se généralise à un intervalle quelconque de la façon suivante :

DÉFINITION 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La fonction f est **continue par morceaux** sur I si et seulement si f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.

Notation. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ peut par exemple se noter $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$.

1.3.2 Propriétés

Théorème 7. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, f est bornée sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de fonction f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et se prolonge en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}[$, que l'on note f_k. Pour chaque k, f_k continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$ et en particulier, f_k est bornée sur ce segment. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note M_k un majorant de $|f_k|$ sur $[x_k, x_{k+1}]$. Chaque M_k est un majorant de $|f|$ sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ correspondant.

Soit $M = \text{Max}\{|f(x_0)|, \dots, |f(x_n)|, M_0, \dots, M_{n-1}\}$. M est un réel et pour tout x de $[a, b]$, on a $|f(x)| \leqslant M$. f est donc bornée sur $[a, b]$.

❏

Théorème 8. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors,

- pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
- la fonction $f \times g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est identique à celle du théorème 4 en remplaçant l'expression « en escalier » par l'expression « continue par morceaux » et l'expression « constante sur ... » par l'expression « continue sur ... ».

❏

Remarque. Une conséquence du théorème 8 est que $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$ et que $C^0(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K}), +, .)$. Une autre conséquence est le fait que $(\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.❏

De même, en adaptant la démonstration du théorème 5, on obtient :

Théorème 9. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$, $a < b$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors, pour tout réel c de $]a, b[$, f est continue par morceaux sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

Réciproquement, s'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que f est continue par morceaux sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

2 Fonctions uniformément continues sur un intervalle

2.1 Définition et propriétés

Rappelons d'abord la définition avec quantificateurs de la continuité d'une fonction f sur un intervalle I :

$$f \text{ est continue sur } I \Leftrightarrow \forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

Cette définition traduit la continuité de f en chaque x_0 de I (éventuellement continuité à droite ou à gauche en une éventuelle borne de I comprise). Dans cette définition, le réel α est fonction de ε mais aussi de x_0 et ce réel α peut changer quand x_0 change.

On donne maintenant la définition de l'uniforme continuité de f sur I :

Définition 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est **uniformément continue** sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

Dans cette définition le réel α ne dépend pas de x. Une fonction uniformément continue sur I est continue « de la même façon » en chaque point x de I. En particulier,

Théorème 10. Si f est uniformément continue sur I, **alors** f est continue sur I.

Démonstration .

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ \forall y \in I,\ (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall y \in I,\ (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$ ❑

La réciproque est fausse. L'exercice suivant fournit un premier exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue.

Exercice 1.

1) Montrer que la fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

2) Montrer que la fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Solution 1.

1) Montrons que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ \left(|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|x^2 - y^2\right| \leqslant \varepsilon\right)$.

Soit $(x, y) \in I^2$. $\left|x^2 - y^2\right| = |x - y| \times |x + y| \leqslant 2|x - y|$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si $|x - y| \leqslant \alpha$, alors

$$\left|x^2 - y^2\right| \leqslant 2|x - y| \leqslant 2\alpha = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ \left(|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|x^2 - y^2\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Donc, f est uniformément continue sur $[0, 1]$.

2) Montrons que : $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0/\ \exists\, (x_0, y_0) \in [0, +\infty[^2,\ \left(|x_0 - y_0| \leqslant \alpha \text{ et } \left|x_0^2 - y_0^2\right| > \varepsilon\right)$.

Soit $\varepsilon = 1$. Soit $\alpha > 0$. Soient $x \in [0, +\infty[$ puis $y = x + \alpha$. On a déjà $y \in [0, +\infty[$ et $|x - y| \leqslant \alpha$. D'autre part,

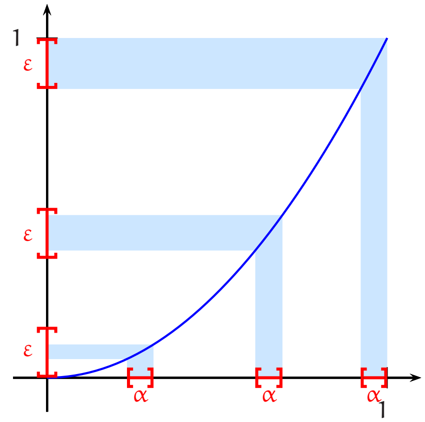
$$|x^2 - y^2| = (x + \alpha)^2 - x^2 = 2\alpha x + \alpha^2.$$

On choisit $x_0 = \dfrac{1}{2\alpha}$ puis $y_0 = \dfrac{1}{2\alpha} + \alpha$. x_0 et y_0 sont deux réels positifs tels que $|x_0 - y_0| \leqslant \alpha$ et

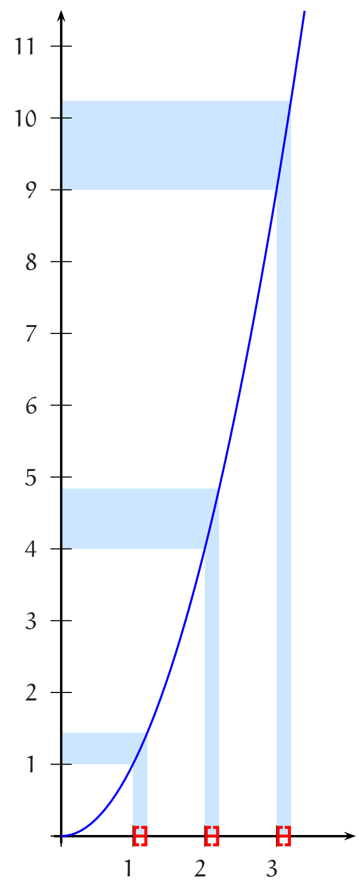
$$\left|x_0^2 - y_0^2\right| = 1 + \alpha^2 > 1 = \varepsilon.$$

On a montré que $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0/\ \exists\, (x_0, y_0) \in [0, +\infty[^2,\ \left(|x_0 - y_0| \leqslant \alpha \text{ et } \left|x_0^2 - y_0^2\right| > \varepsilon\right)$. Donc, f n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

⇨ **Commentaire** . *L'uniforme continuité de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$ peut se visualiser. On se donne une « longueur mobile » $\varepsilon > 0$ sur l'axe (Oy) et on fournit une longueur $\alpha > 0$ sur l'axe (Ox) telle que quand x et y sont dans un segment de longueur α contenu dans $[0, 1]$, alors x^2 et y^2 sont dans un segment de longueur ε. La courbe étant plus pentue du côté de 1 qu'ailleurs, c'est les valeurs proches de 1 de la variable qui commandent le choix de α.*



Le fait que la fonction $x \mapsto x^2$ ne soit pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$ (bien que continue sur $[0, +\infty[$) est moins facile à appréhender. Si x et y sont deux réels distants de α (ou encore si $y = x + \alpha$) l'écart entre les carrés de ces nombres à savoir $(x+\alpha)^2 - x^2 = 2\alpha x + \alpha^2$ n'est pas borné quand x décrit $[0, +\infty[$ et donc ne peut être choisi uniformément sur la totalité de la demi-droite $[Ox)$ de manière à ce que l'écart entre x^2 et $(x+\alpha)^2$ soit uniformément inférieur à ε.



Exercice 2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Solution 2. Soit $\varepsilon > 0$. Soient x et y deux réels de $[0, 1]$ tels que $x \leqslant y$.

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|^2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x - 2\sqrt{x \times y} + y \leqslant x - 2\sqrt{x \times x} + y = y - x.$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|^2 \leqslant |x - y|$ puis $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.

Soit alors $\alpha = \varepsilon^2$. α est un réel strictement positif tel que, pour $(x, y) \in [0, 1]^2$, si $|x - y| \leqslant \alpha$, alors

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{\alpha} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 /\ \forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $\left(|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Donc, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Le théorème suivant est un outil efficace pour prouver qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

Théorème 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que $x_n - y_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $f(x_n) - f(y_n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, **alors** f n'est pas uniformément continue sur I.

Démonstration . Montrons la contraposée ou encore montrons que si f est uniformément continue sur I, alors pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que $x_n - y_n$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Soient donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de I telles que $x_n - y_n$ tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que, pour $(x, y) \in I^2$, $|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Puisque la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|x_n - y_n| \leqslant \alpha$. Mais alors pour $n \geqslant n_0$, on a $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon)$. Donc, $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

❏

Exercice 3.

1) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Solution 3.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n et y_n sont des réels positifs et de plus, la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Mais

$$\left|x_n^2 - y_n^2\right| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n sont des réels positifs et de plus, la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car

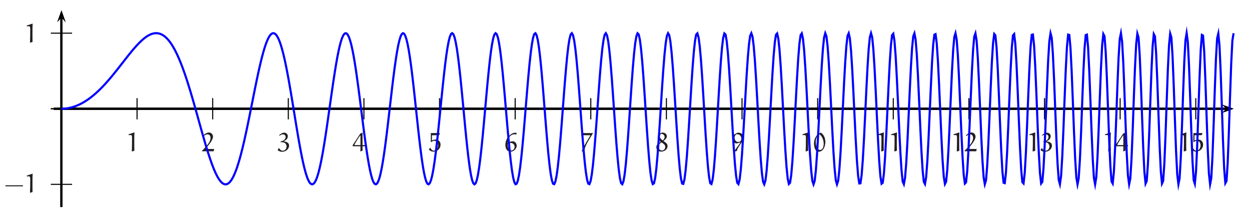
$$|x_n - y_n| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}.$$

Mais

$$\left|\sin\left(x_n^2\right) - \sin\left(y_n^2\right)\right| = |1 - (-1)| = 2$$

et donc $\left|\sin\left(x_n^2\right) - \sin\left(y_n^2\right)\right|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, la fonction $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Voici le graphe sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ qui est continue sur $[0, +\infty[$ mais non uniformément continue sur $[0, +\infty[$.



On fait maintenant le lien avec une notion étudiée au premier semestre, la notion de fonction lipschitzienne :

Théorème 12. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est lipschitzienne sur I, **alors** f est uniformément continue sur I (et en particulier continue sur I).

Démonstration . Supposons f lipschitzienne sur I. Il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Quite à remplacer k par $k+1$, on peut supposer $k > 0$, ce que l'on fait.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Soient x et y deux réels de I tels que $|x - y| \leqslant \alpha$. Alors,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in I^2,\ (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$. Donc, f est uniformément continue sur I.

❏

Par exemple, dans le chapitre « Continuité sur un intervalle », on a vu que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$. On a vu aussi que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$ mais est uniformément continue sur $[0, 1]$. La réciproque du théorème 12 est donc fausse.

2.2 Le théorème de Heine

Théorème 13 (théorème de Heine). Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, **alors** f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration . Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Supposons par l'absurde f non uniformément continue sur $[a, b]$. Donc, $\exists \varepsilon > 0/\ \forall \alpha > 0,\ \exists (x,y) \in [a, b]^2/\ (|x - y| \leqslant \alpha$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon)$. ε est ainsi dorénavant fixé.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $(x_n, y_n) \in [0, 1]^2/\ |x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée. On peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain réel x. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, quand n tend vers $+\infty$ on obtient $x \in [a, b]$. La suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en tant que suite extraite d'une suite bornée. On peut en extraire une sous-suite $\left(y_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain élément y de $[a, b]$. La suite $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et reste donc convergente de limite x.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{\psi(n)+1}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $|x - y| \leqslant 0$ et donc $x = y$.
La fonction f est continue sur $[a, b]$ et en particulier, la fonction f est continue en x. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\psi(n)}\right) = f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(y_{\psi(n)}\right) = f(y)$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|f\left(x_{\psi(n)}\right) - f\left(y_{\psi(n)}\right)\right| > \varepsilon$ ce qui fournit par passage à la limite $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon > 0$.
En résumé, $x = y$ et $|f(x) - f(y)| > 0$. Ceci est une contradiction et donc f est uniformément continue sur $[a, b]$.

❏

Exercice 4.

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Solution 4.

1) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1]$ et donc uniformément continue sur $[0, 1]$ d'après le théorème de Heine.

2) Pour tout $(x,y) \in [1, +\infty[^2$,

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ et donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout (x,y) de $[0, 1]^2$, $|x - y| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout (x,y) de $[1, +\infty[^2$, $|x - y| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\alpha = \mathrm{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Soit $(x,y) \in [0, +\infty[^2$.

- Si $(x,y) \in [0, 1]^2$,

$$|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |x - y| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \varepsilon.$$

• Si $(x,y) \in [1,+\infty[^2$,

$$|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |x-y| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \varepsilon.$$

• Si par exemple $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant y$, puisque $|x-y| = y-x = (y-1)+(1-x) = |y-1|+|x-1|$, si $|x-y| \leqslant \alpha$, alors $|x-1| \leqslant |x-y| \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ et $|y-1| \leqslant |x-y| \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ puis

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \left|\sqrt{y}-\sqrt{1}\right| + \left|\sqrt{1}-\sqrt{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha$, alors $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ \left(|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

2.3 Approximations uniformes d'une fonction continue sur un segment

2.3.1 Par une fonction en escalier

Théorème 14. Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration . Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\varepsilon > 0$.

La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$. On en déduit que la fonction f est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Soit n un entier naturel non nul tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$ (on peut choisir par exemple $n = E\left(\dfrac{b-a}{\alpha}\right)+1$). Pour $k \in [\![0,n]\!]$, posons $x_k = a+k\dfrac{b-a}{n}$. $(x_0,\ldots,x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$, à pas constant.

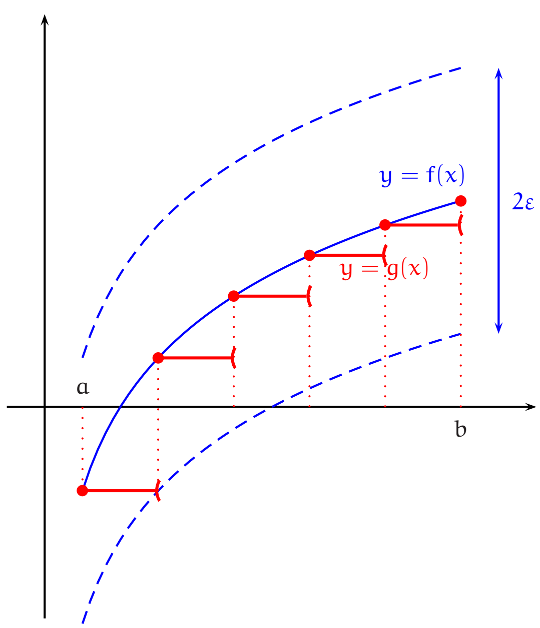
Soit $x \in [a,b[$. Pour un tel x, il existe un entier $k \in [\![0,n-1]\!]$ (et un seul) tel que $x_k \leqslant x < x_{k+1}$. Pour un tel x, on pose $g(x) = f(x_k)$. On pose d'autre part $g(b) = f(b)$. g est alors une fonction définie sur $[a,b]$ et en escalier sur $[a,b]$.

Soit $x \in [a,b]$. Si $x = b$, alors $|f(x)-g(x)| = |f(b)-g(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$. Sinon, $x \in [a,b[$ et donc il existe un entier $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x_k \leqslant x < x_{k+1}$. Puisque

$$0 \leqslant x-x_k < x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n} \leqslant \alpha,$$

on en déduit que $|f(x)-g(x)| = |f(x)-f(x_k)| \leqslant \varepsilon$.

On a ainsi construit une fonction g, en escalier sur $[a,b]$, telle que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$.



❏

En appliquant le théorème 14 à chacun des intervalles définis par une subdivision, intervalles qui sont en nombre fini, on a plus généralement

Théorème 15. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction g en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon$.

2.3.2 Par une fonction affine par morceaux et continue

Théorème 16. Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction g affine par morceaux et continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon$.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\varepsilon>0$.

De nouveau, la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Il existe donc un réel $\alpha>0$ tel que, pour tout $(x,y)\in[a,b]^2$, si $|x-y|\leqslant\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$.

Soit n un entier naturel non nul tel que $\dfrac{b-a}{n}\leqslant\alpha$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, posons $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

Soit alors g la fonction définie par : g prend les mêmes valeurs que f en x_0, ..., x_n et est affine sur chaque intervalle $[x_k,x_{k+1}]$, $k\in[\![0,n-1]\!]$. Plus précisément, pour chaque $k\in[\![0,n-1]\!]$ puis chaque $x\in[x_k,x_{k+1}]$, on pose (polynôme d'interpolation de Lagrange en x_k et x_{k+1}).

$$g(x)=\frac{f\left(x_{k+1}\right)}{x_{k+1}-x_k}\left(x-x_k\right)+\frac{f\left(x_k\right)}{x_k-x_{k+1}}\left(x-x_{k+1}\right).$$

La fonction g est une fonction affine par morceaux sur $[a,b]$ et continue sur $[a,b]$.

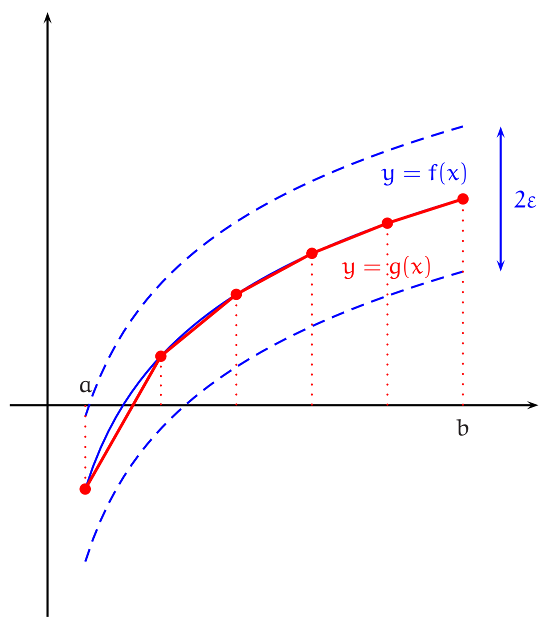
Soient $k\in[\![0,n-1]\!]$ puis $x\in[x_k,x_{k+1}]$.

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)|&=\left|f(x)-\frac{f\left(x_{k+1}\right)}{x_{k+1}-x_k}\left(x-x_k\right)-\frac{f\left(x_k\right)}{x_k-x_{k+1}}\left(x-x_{k+1}\right)\right|\\&=\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\left|f(x)\left(x_{k+1}-x_k\right)-f\left(x_{k+1}\right)\left(x-x_k\right)+f\left(x_k\right)\left(x-x_{k+1}\right)\right|\\&=\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\left|f(x)\left(x_{k+1}-x+x-x_k\right)-f\left(x_{k+1}\right)\left(x-x_k\right)+f\left(x_k\right)\left(x-x_{k+1}\right)\right|\\&=\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\left|\left(f(x)-f\left(x_k\right)\right)\left(x_{k+1}-x\right)+\left(f(x)-f\left(x_{k+1}\right)\right)\left(x-x_k\right)\right|\\&\leqslant\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\left(\left(x_{k+1}-x\right)\left|f(x)-f\left(x_k\right)\right|+\left(x-x_k\right)\left|f(x)-f\left(x_{k+1}\right)\right|\right)\ (\text{car } x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}).\end{aligned}$$

Maintenant, $|x-x_k|=x-x_k\leqslant x_{k+1}-x_k=\dfrac{b-a}{n}\leqslant\alpha$ et donc $|f(x)-f\left(x_k\right)|\leqslant\varepsilon$. De même, $|f(x)-f\left(x_{k+1}\right)|\leqslant\varepsilon$. Par suite,

$$|f(x)-g(x)|\leqslant\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\left(\left(x_{k+1}-x\right)\varepsilon+\left(x-x_k\right)\varepsilon\right)=\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\times\left(x_{k+1}-x_k\right)\varepsilon=\varepsilon.$$

On a donc fourni une fonction g affine par morceaux sur $[a,b]$ et continue sur $[a,b]$ telle que, pour tout $x\in[a,b]$, $|f(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon$.



❑

3 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

3.1 Définition

Tout commence avec :

Définition 8. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. L'**intégrale** de la fonction constante $f : x \mapsto \lambda$ sur le segment $[a, b]$, notée $\displaystyle\int_a^b \lambda \, dx$ est :

$$\int_a^b \lambda \, dx = \lambda(b-a).$$

Ainsi, si λ est un réel positif, par définition, $\displaystyle\int_a^b \lambda \, dx$ est l'aire d'un rectangle de dimensions λ et $b-a$. On va petit à petit généraliser cette définition. On passe maintenant au cas des fonctions constantes par morceaux c'est-à-dire les fonctions en escalier. On doit prendre quelques précautions, ce que l'on fait avec le théorème 17.

Dans ce qui suit, si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et si $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$, adaptée à f, on pose :

$$I(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k,$$

où pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, λ_k est la valeur constante prise par la fonction $f_{]x_k, x_{k+1}[}$ (par exemple, $\lambda_k = f\left(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$).

Théorème 17. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$ adaptées à f, alors $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$.

Démonstration . Commençons par supposer que la subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est plus fine que la subdivision $\sigma' = (y_0, \dots, y_p)$. Donc, le support $\mathcal{S}(\sigma)$ de σ contient le support $\mathcal{S}(\sigma')$ de σ'.

Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Il existe $i_k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_{i_k} = y_k$. Par définition de i_k, $y_k = x_{i_k} < x_{i_k+1} < \dots < x_{i_{k+1}} = y_{k+1}$. Ainsi, si on note λ_k la valeur de la fonction f sur l'intervalle $]y_k, y_{k+1}[$, alors pour tout indice i tel que $i_k \leqslant i < i_{k+1}$, la valeur μ_i de la fonction f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est encore λ_k. On a alors

$$\begin{aligned} I(f, \sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \mu_i = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} (x_{i+1} - x_i) \mu_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} (x_{i+1} - x_i) \right) \lambda_k = \sum_{k=0}^{p-1} \left(x_{i_{k+1}} - x_{i_k} \right) \lambda_k \text{ (somme télescopique)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (y_{k+1} - y_k) \lambda_k = I(f, \sigma'). \end{aligned}$$

Supposons maintenant les subdivisions σ et σ' quelconques. La subdivision $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et σ' d'après le théorème 1. Donc, $I(f, \sigma) = I(f, \sigma'') = I(f, \sigma')$.

❏

Dit autrement, le nombre $I(f, \sigma) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \lambda_k$ ne dépend que de f et pas de σ. On peut donc poser

Définition 9. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f.

L'**intégrale de** f **sur** $[a, b]$ est le nombre noté $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f_k,$$

où pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, f_k est la valeur de la fonction constante $f_{/]x_k, x_{k+1}[}$.

Le mot « intégrale » suggère qu'on a un nombre bâti avec l'intégralité des valeurs de f sur le segment $[a, b]$.

Il est important de constater que les valeurs $f(x_0)$, ..., $f(x_n)$, n'interviennent absolument pas dans la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier : si on modifie les valeurs de f en x_0, ..., x_n, la valeur de l'intégrale de f sur $[a, b]$ n'est pas modifiée. On dira plus loin, dans le paragraphe « intégration des fonctions continues par morceaux », que

si on modifie les valeurs d'une fonction en un nombre fini de points, on ne modifie pas l'intégrale de cette fonction.

Par exemple, si f est la fonction partie entière sur $[0, 1]$ et si g est la fonction nulle sur $[0, 1]$, les fonctions f et g ne prennent pas la même valeur en 1 et pourtant ces deux fonctions ont la même intégrale sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 E(x)\ dx = \int_0^1 0\ dx = 0.$$

Dans l'égalité ci-dessus, il ne faut pas lire le fait que $E(1) = 0$ (car c'est faux) mais il faut lire que les fonctions f et g ont la même intégrale.

3.2 Propriétés

3.2.1 Linéarité

Théorème 18. Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ (où $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx.$$

Démonstration. D'après le théorème 4, la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à f et à g. Avec les notations de la définition 8,

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\ dx &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(\lambda f_k + \mu g_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f_k + \mu \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) g_k \\ &= \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx.\end{aligned}$$

❏

3.2.2 Relation de Chasles

Théorème 19. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ (où $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout réel c tel que $a < c < b$, la fonction f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Démonstration. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit $c \in]a, b[$. D'après le théorème 5, f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Soit $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_{k_0} \leqslant c < x_{k_0+1}$. Avec les notations de la définition 8 (et avec la convention usuelle qu'une somme vide est nulle),

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} (x_{k+1} - x_k) f_k + (x_{k_0+1} - x_{k_0}) f_k + \sum_{k=k_0+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} (x_{k+1} - x_k) f_k + (c - x_{k_0}) f_k \right) + \left((x_{k_0+1} - c) f_k + \sum_{k=k_0+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f_k \right) \\ &= \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.\end{aligned}$$

❏

3.2.3 Intégrales et inégalités

Théorème 20. (positivité de l'intégrale).

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ (où $a<b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est positive sur $[a,b]$ (c'est-à-dire si $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$.

Démonstration . Soit $\sigma=(x_0,\ldots,x_n)$ une subdivision adaptée à f. Avec les notations de la définition 8, si $f\geqslant 0$, alors $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $f_k\geqslant 0$. Par suite,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,f_k\geqslant 0.$$

❑

⇨ **Commentaire .**

◇ *L'expression « positivité de l'intégrale » ne signifie en aucune façon qu'une intégrale est un nombre positif mais que l'intégrale d'une fonction positive est une fonction positive.*

◇ *L'expression « positivité de l'intégrale » est traditionnellement employée mais fausse. On devrait dire « positivité de l'intégration » ou encore conservation de la positivité dans l'action d'intégrer.*

◇ *Le théorème 20 ne concerne que des fonctions à valeurs réelles. Il n'est pas question d'écrire des inégalités entre des intégrales de fonctions à valeurs complexes.*

◇ *Plus loin dans ce chapitre, nous adopterons la convention* $\displaystyle\int_a^b=-\int_b^a$. *Dans les hypothèses du théorème 20, il y a entre autres* $a<b$ *ce qui est essentiel. Quand on aura* $a>b$ *avec* f *positive sur* $[b,a]$, *alors on aura* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0$.

Théorème 21. (croissance de l'intégrale.)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ (où $a<b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f\leqslant g$ (c'est-à-dire si $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$.

Démonstration . Supposons que $f\leqslant g$. Par linéarité et positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b(g(x)-f(x))\,dx\geqslant 0,$$

et donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$.

❑

⇨ **Commentaire .**

◇ *De même, l'expression « croissance de l'intégrale » ne signifie en aucune façon qu'une intégrale croît puisque qu'une intégrale est un nombre et pas une fonction. L'expression « croissance de l'intégrale », traditionnellement employée, devrait être remplacée par « croissance de l'intégration » ou encore croissance de l'action d'intégrer.*

◇ *Le théorème 21 ne concerne que des fonctions à valeurs réelles. Il n'est pas question d'écrire des inégalités entre des intégrales de fonctions à valeurs complexes.*

◇ *Les propriétés fondamentales de l'intégrale (ou plutôt de l'intégration) sont la linéarité, la positivité et la relation de* Chasles. *La croissance est une propriété moins fondamentale dans le sens où elle est une conséquence de la linéarité et de la positivité.*

◇ *Dans ce théorème aussi, l'hypothèse* $a<b$ *est essentielle.*

Théorème 22. (intégrale et module ou valeur absolue.)

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ (où $a<b$) à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, $|f|$ est en escalier sur $[a,b]$ et $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx$.

Démonstration . Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est constante sur $]x_k, x_k+1[$, égale à un certain nombre réel ou complexe f_k. On sait que $|f|$ est en escalier sur $[a, b]$ et que σ est une subdivision adaptée à $|f|$ (pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|f|$ est constante sur $]x_k, x_k+1[$, égale à $|f_k|$).

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,f_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,|f_k| = \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

❑

⇨ **Commentaire** . *Dans le cas d'une fonction à valeurs* ***réelles****, on peut démontrer le théorème précédent de la façon suivante :*

$$f \leqslant |f| \quad \textit{et} \quad -f \leqslant |f|$$

puis par linéarité et croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$ *et* $\displaystyle -\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b -f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$.

Finalement, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$.

4 Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Dans ce paragraphe, on construit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Aucune construction n'est imposée pas le programme officiel et il existe plusieurs constructions possibles. On choisit de construire l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs réelles en l'approchant « par dessous et par dessus » d'aussi près qu'on veut par des intégrales de fonctions en escalier. L'intégrale d'une fonction à valeurs complexes sera alors définie par : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b (\mathrm{Re}(f))(x)\ dx + i\int_a^b (\mathrm{Im}(f))(x)\ dx$.

4.1 Définitions de l'intégrabilité et de l'intégrale

4.1.1 Cas des fonctions à valeurs réelles

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{I}^-(f) = \left\{\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx,\ g \text{ en escalier sur } [a, b] \text{ et } g \leqslant f\right\}$ et $\mathcal{I}^+(f) = \left\{\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx,\ h \text{ en escalier sur } [a, b] \text{ et } h \geqslant f\right\}$.

Théorème 23. Si f est bornée sur $[a, b]$, alors $\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure réelle, notée $I^-(f)$, et $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure réelle, notée $I^+(f)$. De plus, $I^-(f) \leqslant I_+(f)$.

Démonstration . Supposons f bornée sur $[a, b]$. Donc, il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

• La fonction $g_0\ :\ x \mapsto m$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ vérifiant $g \leqslant f$. Donc, $\mathcal{I}^-(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car contient $\displaystyle\int_a^b g_0(x)\ dx = \int_a^b m\ dx = m(b-a)$.
Soit g une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $g \leqslant f$. Alors, pour tout x de $[a, b]$, $g(x) \leqslant M$. Par croissance de l'intégration des fonctions en escalier, on a $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx \leqslant \int_a^b M\ dx = M(b-a)$.
En résumé, $\mathcal{I}^-(f)$ est une partie non vide et majorée (par $M(b-a)$) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure réelle que l'on note $I^-(f)$.
De même, $\mathcal{I}^+(f)$ est une partie non vide et minorée (par $m(b-a)$) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure que l'on note $I^+(f)$.

• Soit h une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $h \geqslant f$. Alors, pour toute fonction g en escalier sur $[a, b]$ telle que $g \leqslant f$, on a $g \leqslant h$ et donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx \leqslant \int_a^b h(x)\ dx$ par croissance de l'intégration des fonctions en escalier. Par suite, $\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx$ est un majorant de $\mathcal{I}^-(f)$. Puisque $I^-(f)$ est le plus petit de ces majorants, on en déduit que $\displaystyle I^-(f) \leqslant \int_a^b h(x)\ dx$.

Ainsi, pour tout fonction h en escalier sur $[a, b]$ telle que $h \geqslant f$, on a $\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx \geqslant I^-(f)$. Donc, $I^-(f)$ est un minorant de $\mathcal{I}^+(f)$. Puisque $I^+(f)$ est le plus grand de ces minorants, on en déduit que $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.

❑

On peut maintenant donner la définition de l'intégrabilité d'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Avec les notations précédentes :

DÉFINITION 10. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est **intégrable** sur le segment $[a, b]$ si et seulement si $I^-(f) = I^+(f)$. En cas d'intégrabilité, l'**intégrale** de f sur $[a, b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, est la valeur commune des deux nombres $I^-(f)$ et $I^+(f)$.

⇨ **Commentaire** . *L'intégrale qui vient d'être définie est l'intégrale* ***au sens de* Riemann**. *Il existe d'autres types d'intégrales mais ils ne sont pas au programme des classes préparatoires.*

Donnons un exemple de fonction bornée et non intégrable sur le segment $[0, 1]$. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right. \end{array}$.

f est donc la restriction à $[0, 1]$ de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.
Tout intervalle de longueur non nulle contient au moins un rationnel et au moins un irrationnel. Donc, si g est une fonction en escalier sur $[0, 1]$ telle que $g \leqslant f$, alors $g \leqslant 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points, et si h est une fonction en escalier sur $[0, 1]$ telle que $h \geqslant f$, alors $h \geqslant 1$, sauf peut-être en un nombre fini de points.

Mais alors, pour toute fonction g en escalier sur $[0, 1]$ telle que $g \leqslant f$, on a $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \leqslant 0$ puis $I^-(f) \leqslant 0$. De même, pour toute fonction h en escalier sur $[0, 1]$ telle que $h \geqslant f$, on a $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx \geqslant 1$ puis $I^+(f) \geqslant 1$. En particulier, $I^-(f) < I^+(f)$ et donc f n'est pas intégrable (au sens de Riemann) sur le segment $[0, 1]$.

Théorème 24. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ_ε, en escalier sur $[a, b]$, telle que pour tout x de $[a, b]$, $|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction φ_ε, en escalier sur $[a, b]$ telle que $|f - \varphi_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$. On en déduit en particulier que $f \geqslant \varphi_\varepsilon - \varepsilon$. La fonction $g = \varphi_\varepsilon - \varepsilon$ est donc une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $g \leqslant f$. Par suite

$$I^-(f) \geqslant \int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varepsilon)\ dx = \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx - \varepsilon(b - a),$$

ou encore $I^-(f) + \varepsilon(b - a) \geqslant \displaystyle\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx$. De même, $I^+(f) - \varepsilon(b - a) \leqslant \displaystyle\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx$. On en déduit que $I^-(f) + \varepsilon(b - a) \geqslant I^+(f) - \varepsilon(b - a)$ puis que $I^+(f) - I^-(f) \leqslant 2\varepsilon(b - a)$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant I^+(f) - I^-(f) \leqslant 2\varepsilon(b - a).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $I^+(f) - I^-(f) = 0$ ou encore $I^-(f) = I^+(f)$. La fonction f est donc intégrable sur le segment $[a, b]$.

❏

4.1.2 Cas des fonctions à valeurs complexes

On adopte la définition suivante :

DÉFINITION 11. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

f est **intégrable** sur $[a, b]$ si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur $[a, b]$. En cas d'intégrabilité, on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,dx$.

⇨ **Commentaire** . *Donc, par définition,* $\mathit{Re}\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_a^b (\mathit{Re}(f))(x)\,dx$ *et* $\mathit{Im}\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_a^b (\mathit{Im}(f))(x)\,dx$

Théorème 25. Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ_ε, en escalier sur $[a, b]$, telle que pour tout x de $[a, b]$, $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction φ_ε, en escalier sur $[a, b]$ telle que $|f - \varphi_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$. Mais alors, les fonctions $\mathrm{Re}(\varphi_\varepsilon)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_\varepsilon)$ sont bien sûr en escalier sur le segment $[a, b]$ et vérifient

$$|\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(\varphi_\varepsilon)| = |\mathrm{Re}(f - \varphi_\varepsilon)| \leqslant |f - \varphi_\varepsilon| \leqslant \varepsilon,$$

et de même, $|\mathrm{Im}(f) - \mathrm{Im}(\varphi_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$.

D'après le théorème 24, les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur le segment $[a, b]$ et finalement, f est intégrable sur le segment $[a, b]$.

❑

4.1.3 Intégrabilité des fonctions continues par morceaux

On s'intéresse maintenant (et enfin) aux fonctions que l'on va intégrer en maths sup, les fonctions continues par morceaux sur un segment.

Théorème 26. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, f est intégrable sur le segment $[a, b]$.

Démonstration . Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
D'après le théorème 14, page 11, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g en escalier sur $[a, b]$ telle que, pour tout x de $[a, b]$, $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. D'après les théorèmes 24 et 25, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

❑

⇨ **Commentaire** . *Il existe des fonctions qui ne sont pas continues par morceaux sur le segment* $[a, b]$ *et qui sont intégrables sur* $[a, b]$. *Ces fonctions ne sont pas au programme de maths sup et de maths spé.*

4.2 Propriétés

On énonce maintenant les propriétés de calcul de l'intégrale. Le schéma des démonstrations qui suivent est à peu près toujours le même : la propriété a établir est déjà établie pour les fonctions en escalier puis on passe au cas plus général des fonctions continues par morceaux en les approchant à $\varepsilon > 0$ près par des fonctions en escalier.

On notera que les différentes propriétés de l'intégrale auront pour **conséquence** dans la section 5 que, si f est une fonction **continue** sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

4.2.1 Linéarité

Pour établir la linéarité de l'intégrale (ou plutôt de l'intégration), on a besoin d'un lemme :

Théorème 27. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $\varepsilon \geqslant 0$ et φ_ε une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que $|f - \varphi_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$.

Alors, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\ dx\right| \leqslant \varepsilon(b - a)$.

Démonstration . Par hypothèse, $\varphi_\varepsilon - \varepsilon \leqslant f \leqslant \varphi_\varepsilon + \varepsilon$. Puisque les fonctions $\varphi_\varepsilon - \varepsilon$ et $\varphi_\varepsilon + \varepsilon$ sont en escalier sur $[a, b]$, par définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varepsilon)\, dx \leqslant I^-(f) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant I^+(f) \leqslant \int_a^b (\varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon)\, dx,$$

ou encore, par linéarité de l'intégration pour les fonctions en escalier, $\displaystyle\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\ dx - \varepsilon(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\ dx + \varepsilon(b - a)$ ou enfin,

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\ dx\right| \leqslant \varepsilon(b - a).$$

❑

On peut maintenant démontrer la linéarité de l'intégration :

Théorème 28. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda f+\mu g$ est continue par morceaux et de plus,

$$\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))\ dx=\lambda\int_a^b f(x)\ dx+\mu\int_a^b g(x)\ dx.$$

Démonstration . On commence par le cas réel. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Posons $h=\lambda f+\mu g$. On sait que h est continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon>0$.

• Il existe deux fonctions f_ε et g_ε, en escalier sur $[a,b]$, telles que pour tout x de $[a,b]$, $|f(x)-f_\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon$ et $|g(x)-g_\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon$. Puisque f_ε et g_ε sont en escalier sur $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b(\lambda f_\varepsilon(x)+\mu g_\varepsilon(x))\ dx=\lambda\int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx+\mu\int_a^b g_\varepsilon(x)\ dx$.

Posons $I_\varepsilon=\displaystyle\int_a^b(\lambda f_\varepsilon(x)+\mu g_\varepsilon(x))\ dx=\lambda\int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx+\mu\int_a^b g_\varepsilon(x)\ dx$.

• D'après le lemme, puisque f_ε et g_ε sont des fonctions en escalier vérifiant $|f-f_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$ et $|g-g_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$, on a $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx-\int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx\right|\leqslant\varepsilon(b-a)$ et $\left|\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx-\int_a^b g_\varepsilon(x)\ dx\right|\leqslant\varepsilon(b-a)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}|h-(\lambda f_\varepsilon+\mu g_\varepsilon)|&=|\lambda(f-f_\varepsilon)+\mu(g-g_\varepsilon)|\\&\leqslant|\lambda|\,|f-f_\varepsilon|+|\mu|\,|g-g_\varepsilon|\\&\leqslant(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon.\end{aligned}$$

D'après le lemme, puisque la fonction en escalier $\lambda f_\varepsilon+\mu g_\varepsilon$ est en escalier, on a $\left|\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx-I_\varepsilon\right|\leqslant(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon(b-a)$.

• Mais alors,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b h(x)\ dx-\lambda\int_a^b f(x)\ dx-\mu\int_a^b g(x)\ dx\right|&=\left|\left(\int_a^b h(x)\ dx-I_\varepsilon\right)-\left(\lambda\int_a^b f(x)\ dx+\mu\int_a^b g(x)\ dx-I_\varepsilon\right)\right|\\&=\left|\left(\int_a^b h(x)\ dx-I_\varepsilon\right)-\left(\lambda\left(\int_a^b f(x)\ dx-\int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx\right)+\mu\left(\int_a^b g(x)\ dx-\int_a^b g_\varepsilon(x)\ dx\right)\right)\right|\\&\leqslant\left|\int_a^b h(x)\ dx-I_\varepsilon\right|+|\lambda|\left|\int_a^b f(x)\ dx-\int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx\right|+|\mu|\left|\int_a^b g(x)\ dx-\int_a^b g_\varepsilon(x)\ dx\right|\\&\leqslant(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon(b-a)+|\lambda|\varepsilon(b-a)+|\mu|\varepsilon(b-a)=2(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $\varepsilon>0$. Quand ε tend vers 0, on obtient $\left|\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx-\lambda\int_a^b f(x)\ dx-\mu\int_a^b g(x)\ dx\right|=0$ puis $\displaystyle\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\ dx=\lambda\int_a^b f(x)\ dx+\mu\int_a^b g(x)\ dx$. La linéarité est démontrée dans le cas réel.

Passons maintenant au cas où f, g, λ, μ sont complexes. Posons $\lambda=\alpha+i\beta$ et $\mu=\gamma+i\delta$ où α, β, γ et δ sont quatre réels.

$$\begin{aligned}\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\ dx&=\int_a^b((\alpha+i\beta)(\mathrm{Re}\ f(x)+i\mathrm{Im}\ f(x))+(\gamma+i\delta)(\mathrm{Re}\ g(x)+i\mathrm{Im}\ g(x)))\ dx\\&=\int_a^b(\alpha\mathrm{Re}\ f(x)-\beta\mathrm{Im}\ f(x)+\gamma\mathrm{Re}\ g(x)-\delta\mathrm{Im}\ g(x))\ dx+i\int_a^b(\alpha\mathrm{Im}\ f(x)+\beta\mathrm{Re}\ f(x)+\gamma\mathrm{Im}\ g(x)+\delta\mathrm{Im}\ g(x))\ dx\\&\text{(par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs dans }\mathbb{C})\\&=\alpha\int_a^b\mathrm{Re}\ f(x)\ dx-\beta\int_a^b\mathrm{Im}\ f(x)\ dx+\gamma\int_a^b\mathrm{Re}\ g(x)\ dx-\delta\int_a^b\mathrm{Im}\ g(x)\ dx\\&+\alpha i\int_a^b\mathrm{Im}\ f(x)\ dx+\beta i\int_a^b\mathrm{Re}\ f(x)\ dx+\gamma i\int_a^b\mathrm{Im}\ g(x)\ dx+\delta i\int_a^b\mathrm{Im}\ g(x)\ dx\\&\text{(par linéarité de l'intégrale dans le cas réel)}\\&=(\alpha+i\beta)\int_a^b(\mathrm{Re}\ f(x)+i\mathrm{Im}\ f(x))\ dx+(\gamma+i\delta)\int_a^b(\mathrm{Re}\ g(x)+i\mathrm{Im}\ g(x))\ dx\\&\text{(par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs dans }\mathbb{C})\\&=\lambda\int_a^b f(x)\ dx+\mu\int_a^b g(x)\ dx.\end{aligned}$$

❏

Une conséquence de la linéarité est le résultat suivant. Soient f et g deux fonctions prenant les mêmes valeurs sauf en un nombre **fini** de réels de $[a, b]$. Alors, $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$.
Dit autrement, on ne modifie la valeur d'une intégrale si on modifie la fonction en un nombre fini de points.
En effet, si f et g prennent la même valeur sauf en un nombre fini de points, alors la fonction $f - g$ prend la valeur 0 en tous les x de $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escaliers,

$$0 = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx.$$

4.2.2 Relation de Chasles

Théorème 29. (relation de Chasles)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout réel c de $]a, b[$, $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$.

Démonstration. Commençons par le cas où f est réelle. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction f_ε, en escalier sur $[a, b]$ telle que $|f - f_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$. La relation de Chasles étant déjà établie pour les fonctions en escalier,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\ dx - \left(\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\right)\right| &= \left|\left(\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx\right) - \left(\int_a^c f(x)\ dx - \int_a^c f_\varepsilon(x)\ dx\right) - \left(\int_c^b f(x)\ dx - \int_c^b f_\varepsilon(x)\ dx\right)\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f_\varepsilon(x)\ dx\right| + \left|\int_a^c f(x)\ dx - \int_a^c f_\varepsilon(x)\ dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\ dx - \int_c^b f_\varepsilon(x)\ dx\right| \\ &\leqslant \varepsilon(b - a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon(b - c) \text{ (d'après le théorème 27)} \\ &= 2\varepsilon(b - a).\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\left|\int_a^b f(x)\ dx - \left(\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\right)\right| = 0$ ou encore $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$.

❏

4.2.3 Intégrales et inégalités

Théorème 30. (positivité de l'intégrale.)

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$.

Démonstration. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, réelle et positive sur $[a, b]$. La fonction $x \mapsto 0$ est une fonction en escalier minorant f sur $[a, b]$ et $\int_a^b 0\ dx = 0$. Par définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant I^-(f) \geqslant 0.$$

❏

Théorème 31. (croissance de l'intégrale.)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, réelles telles que $f \leqslant g$. Par linéarité et positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx \geqslant 0,$$

et donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

❏

⇨ **Commentaire** . *Le théorème 30 a entre autre pour hypothèse* $f \geqslant 0$ *c'est-à-dire pour tout* x *de* $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$. *On peut élargir la portée de ce théorème de la façon suivante : si* f *est continue par morceaux sur* $[a, b]$ *et si pour tous les réels* x *de* $[a, b]$ *sauf peut-être pour un nombre fini de ces réels, on a* $f(x) \geqslant 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$. *Et de même, pour le théorème 31.*

Le théorème suivant améliore le théorème 30 dans le cas particulier où de plus la fonction f est supposée continue sur $[a, b]$. Le théorème 32 est fréquemment utilisé dans la pratique.

Théorème 32.

1) Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si la fonction f est continue, positive et non nulle sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx > 0$.

Si la fonction f est continue et positive sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0 \Rightarrow f = 0$.

Démonstration . Puisque f est positive et non nulle. Il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Si $c = a$, puisque la fonction f est continue sur $[a, b]$ et en particulier en a, il existe un intervalle $[a, a+\alpha] \subset [a, b]$ avec $\alpha > 0$ tel que, pour tout x de $[a, a+\alpha]$, $f(x) > 0$. Dans ce cas, il existe $c' \in]a, b[$ tel que $f(c') > 0$. De même, si $c = b$, il existe $c' \in]a, b[$ tel que $f(c') > 0$. En résumé, dans tous les cas, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) > 0$.

Par continuité de f en c, pour $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $[c-\alpha, c+\alpha] \subset [a, b]$ et pour tout $x \in [c-\alpha, c+\alpha]$, $|f(x) - f(c)| \leqslant \dfrac{f(c)}{2}$ et en particulier, $f(x) \geqslant \dfrac{f(c)}{2}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^{c-\alpha} f(x)\ dx + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)\ dx + \int_{c+\alpha}^b f(x)\ dx\\ &\geqslant \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)\ dx \text{ (par positivité de l'intégrale)}\\ &\geqslant \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \frac{f(c)}{2}\ dx \text{ (par croissance de l'intégrale)}\\ &= \alpha f(c) > 0.\end{aligned}$$

❏

Ainsi,

une fonction **continue, positive et non nulle** sur $[a, b]$ a une intégrale strictement positive

et

une fonction **continue, positive, d'intégrale nulle** est nulle.

Voici deux exercices d'application immédiate de ces résultats.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$. Montrer que pour tout entier naturel n, $W_n > 0$.

Solution 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \sin^n x$ est continue, positive et non nulle sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx > 0$ ou encore $W_n > 0$.

Exercice 6. Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\displaystyle\int_0^1 P^2(x)\ dx = 0$. Montrer que $P = 0$.

Solution 6. Soit P un polynôme à coefficients réels.

$$\begin{aligned}\int_0^1 P^2(x)\,dx = 0 &\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ P^2(x)\,dx = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ P(x) = 0\\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Le théorème 32 fournit le résultat plus général suivant : une fonction continue, non nulle et de signe constant sur $[a, b]$ a une intégrale non nulle sur $[a, b]$.

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.

Solution 7. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$, posons $g(x) = f(x) - x$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx \Rightarrow \int_0^1 (f(x) - x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 g(x)\,dx = 0.$$

Supposons que la fonction g ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Puisque la fonction g est continue sur $[0, 1]$, la fonction g garde un signe constant sur $[0, 1]$. La fonction g est donc une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle et de signe constant sur $[0, 1]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \neq 0$.

Par contraposition, si $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 0$, alors g s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$. Donc, il existe un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Théorème 33. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration . Commençons par le cas où f est à valeurs réelles. On a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a $\displaystyle -\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$ et donc

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Passons maintenant au cas où f est à valeurs complexes. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, l'inégalité est immédiate. Dorénavant, on suppose que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est un complexe non nul.

Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, est un réel strictement positif. On a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

car $\mathrm{Re}\, f \leqslant |f|$ et par croissance de l'intégrale.

Passons au cas général où $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre complexe non nul. Soit θ un argument de ce nombre complexe. Alors, $\displaystyle\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,dx = e^{-i\theta}\int_a^b f(x)\,dx$ est un réel strictement positif (car d'argument nul modulo 2π) puis, $\displaystyle\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,dx$ étant un réel strictement positif,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|e^{-i\theta}\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(x)\right|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

❑

Exercice 8. Déterminer toutes les fonctions f, continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\left|\int_0^1 f(x)\ dx\right| = \int_0^1 |f(x)|\ dx$.

Solution 8. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(x)\ dx\right| = \int_0^1 |f(x)|\ dx$. Supposons $\int_0^1 f(x)\ dx \geqslant 0$. Alors,

$$\int_0^1 |f(x)|\ dx = \left|\int_0^1 f(x)\ dx\right| \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx \Rightarrow \int_0^1 (|f(x)| - f(x))\ dx = 0.$$

La fonction $|f| - f$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Donc, $|f| - f = 0$ ou encore $|f| = f$. Ceci montre que la fonction f est positive sur $[0,1]$.

Si maintenant $\int_0^1 f(x)\ dx \leqslant 0$, la fonction $-f$ vérifie $\left|\int_0^1 -f(x)\ dx\right| = \int_0^1 |-f(x)|\ dx$ et $\int_0^1 -f(x)\ dx \geqslant 0$. D'après ce qui précède, la fonction $-f$ est positive puis la fonction f est négative.

En résumé, si $\left|\int_0^1 f(x)\ dx\right| = \int_0^1 |f(x)|\ dx$ (et f continue sur $[0,1]$), alors f est de signe constant sur $[0,1]$. La réciproque étant claire, les fonctions solutions sont les fonctions de signe constant sur $[0,1]$.

Citons encore l'inégalité de la moyenne qui est une conséquence immédiate des théorèmes précédents. L'emploi du terme « moyenne » sera expliqué un peu plus loin dans le chapitre

Théorème 34. (inégalité de la moyenne.)

1) Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient m et M deux réels tels que, pour tout x de $[a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Alors,

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant M(b-a).$$

2) Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit M un réel tel que, pour tout x de $[a,b]$, $|f(x)| \leqslant M$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant M(b-a).$$

Enfin, nous fournissons dès maintenant une inégalité importante sur les intégrales, l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Néanmoins, on ne peut en comprendre la portée qu'après avoir travaillé le chapitre « Produit scalaire », chapitre dans lequel nous énoncerons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans sa version générale.

Théorème 35. (inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx} \times \sqrt{\int_a^b g^2(x)\ dx}.$$

Démonstration . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) - g(x))^2\ dx = \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)\lambda^2 - 2\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)\lambda + \int_a^b g^2(x)\ dx$.

1 er cas. Supposons que $\int_a^b f^2(x)\ dx \neq 0$ (et donc $\int_a^b f^2(x)\ dx > 0$). Dans ce cas, P est un trinôme du second degré. De plus, pour tout réel λ, $P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x) - g(x))^2\ dx \geqslant 0$.

Ainsi, P est un trinôme du second degré à coefficients réels, de signe constant sur $\mathbb{R}$. Le discriminant réduit de P est donc négatif ou nul, ce qui fournit :

$$0 \geqslant \Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right),$$

puis $\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right)$ et enfin, par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0,+\infty[$,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \times \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

2 ème cas. Supposons que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$. Dans ce cas, P est une fonction affine, de signe constant sur $\mathbb{R}$. On en déduit que le coefficient de λ, à savoir $2\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, est nul. Ainsi, dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ et en particulier, encore une fois,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \times \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

❏

On note que l'inégalité de Cauchy-Schwarz peut aussi s'écrire : $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$.

On peut donner ici un exercice classique d'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais on répète que cette inégalité ne peut se comprendre dans sa portée générale qu'après avoir étudié le chapitre « Produit Scalaire ».

Exercice 9. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles strictement positives.

Montrer que : $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\right) \geqslant 1$.

Solution 9. Les fonctions f et $\dfrac{1}{f}$ sont continues sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\right) &= \left(\int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2\,dx\right)\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\,dx\right) \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx\right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 1\,dx\right)^2 = 1.\end{aligned}$$

4.3 Interprétations de l'intégrale

4.3.1 Aires algébriques

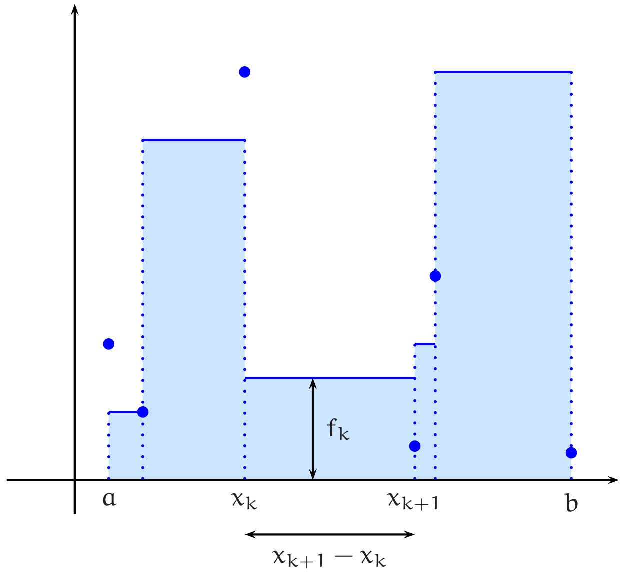
Soient f une fonction en escalier sur un segment $[a,b]$, à valeurs réelles positives puis $\sigma = (x_0,\ldots,x_n)$ une subdivision adaptée à f. On rappelle que, avec les notations de la définition 9, page 13,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\,f_k.$$

Si un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donné, il définit l'unité d'aire (ua) : c'est l'aire du quadrilatère de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$. L'aire de ce quadrilatère est 1 (ua) par définition. Le nombre $(x_{k+1} - x_k)\,f_k$ est alors l'aire d'un rectangle exprimée en unités d'aire puis le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\,f_k$ est la somme des aires de ces rectangles c'est-à-dire l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie $\mathcal{D}$ du plan définie par

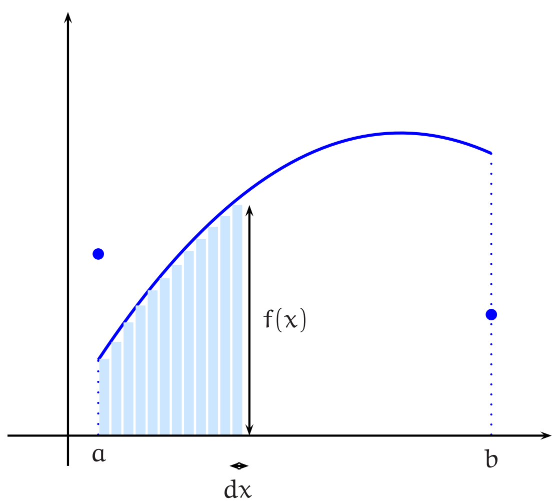
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est donc l'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses et le graphe de f.

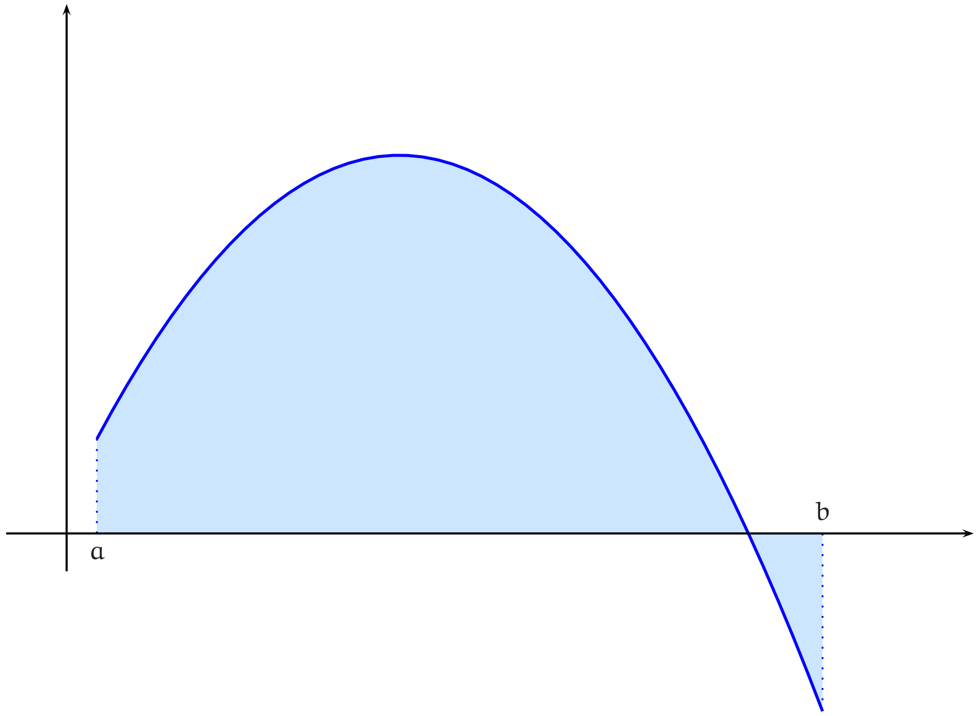


On passe au cas d'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs réelles positives. L'intégrale de f sur $[a, b]$ a été construite « en passant à la limite ». On a encadré l'aire sous la courbe entre deux aires sous des graphes de fonctions en escalier puis on a obtenu l'aire sous la courbe « en faisant tendre le pas des subdivisions vers 0 de sorte que les fonctions en escalier encadrant f approchent au mieux la fonction f ». On a obtenu des « traits de longueur $f(x)$ et de largeur dx (différence infinitésimale de x) et donc d'aire $f(x) \times dx$ puis on a additionné ces aires ».

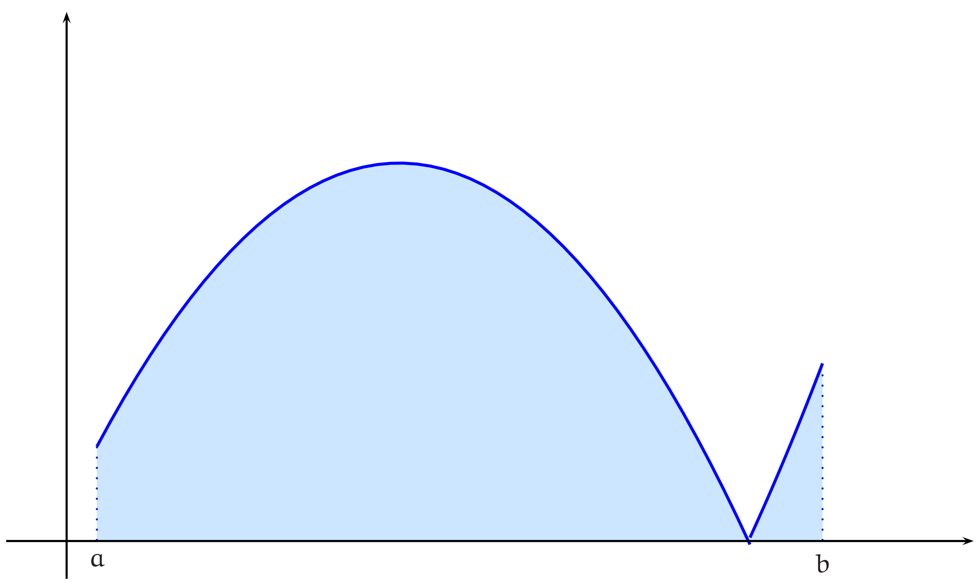
$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ (qui peut se lire : somme de a à b de $f(x) \times dx$, le symbole $\displaystyle\int$ étant effectivement un S) est donc l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$.



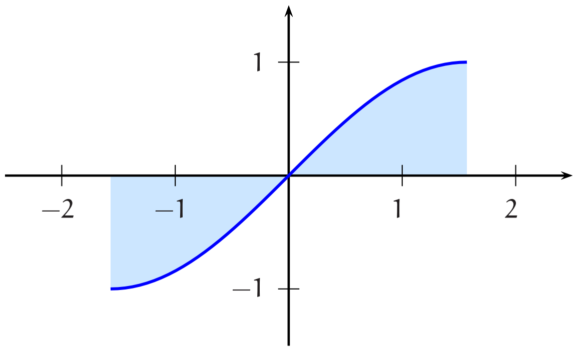
Dans le cas général d'une fonction f, continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles, $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est l'aire algébrique du domaine du plan compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses. Les valeurs positives de f sont comptées positivement et les valeurs négatives de f sont comptées négativement.

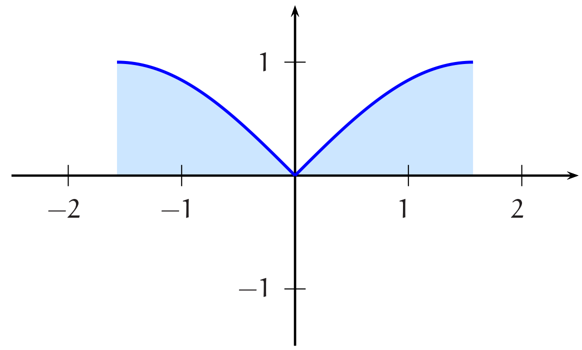


Si on veut l'aire « tout court »(où toutes les aires sont comptées positivement), la valeur de cette aire géométrique est $\int_a^b |f(x)|\ dx$.



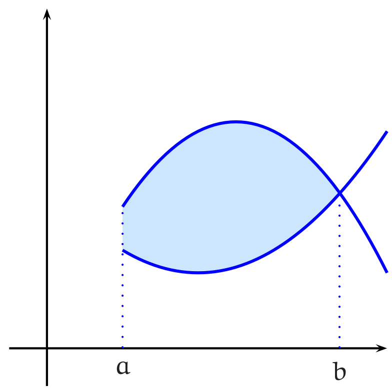
Par exemple, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = 0$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\ dx = 2$.





Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ telles que $f \leqslant g$, l'aire de $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\right\}$ est

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\ dx.$$



4.3.2 Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Un réel strictement positif ε étant donné, on a vu qu'il existait une fonction en escalier g, approchant f à ε près sur $[a, b]$ (voir section 2.3.1 page 11).

La moyenne arithmétique des valeurs prises par g est

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1} - x_k\right) f\left(x_k\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\ dx.$$

En « faisant tendre ε vers 0 », on est conduit à la définition suivante :

Définition 12. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

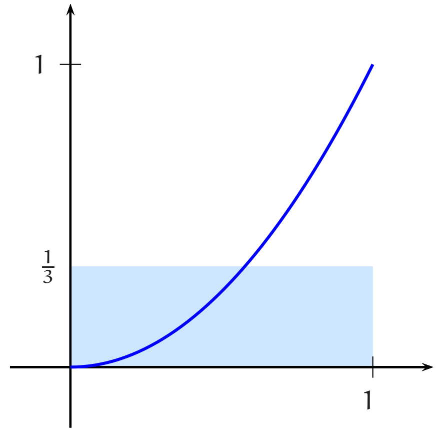
La **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

Notons k cette valeur moyenne. Alors, $k = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ puis $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = k(b-a)$ et donc

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b k\ dx.$$

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est donc la constante k qui a même intégrale que f sur $[a, b]$.

Par exemple, la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x^2$ est $\dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 x^2\ dx = \dfrac{1}{3}$. Le rectangle de côtés 1 et $\dfrac{1}{3}$ a donc même aire que le domaine $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant x^2\right\}$:



L'inégalité de la moyenne qui a été donné plus haut, s'énonçait ainsi : si f est à valeurs réelles et si m et M sont deux réels tels que $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant M$. Ainsi, si par exemple m et M sont le minimum et le maximum (éventuels) de f sur $[a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est comprise entre le minimum de f et le maximum de f, ce qui est bien naturel.

5 Intégrale fonction de la borne supérieure

5.1 Généralisation de la relation de Chasles

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient a et b deux réels de l'intervalle I. On pose

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

et

$$\text{si } b < a, \text{ on pose } \int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\ dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = -1$. On devra dorénavant faire attention quand on utilise la positivité ou la croissance de l'intégrale au fait que la borne du bas soit inférieure à la borne du haut.

Considérons par exemple l'expression $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$.

• Si x est un réel strictement positif, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ est continue et positive sur le segment $[0, x]$. Donc, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} \geqslant 0$ (et même $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} > 0$).

• Si x est un réel strictement négatif, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ est continue et positive sur le segment $[x, 0]$. Par suite, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = -\int_x^0 \frac{dt}{1+t^4} \leqslant 0$ (et même $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} < 0$).

• Si $x = 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = 0$.

On peut maintenant énoncer une généralisation de la relation de Chasles :

Théorème 36. (relation de Chasles.)

Soit f une fonction continue par morceaux sur un un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tous réels a, b et c de I,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Démonstration. Le résultat est déjà connu quand $a < c < b$. Le résultat reste clair quand deux des trois réels a, b ou c sont égaux. Il reste à étudier cinq cas de figure.

• Si $a < b < c$, $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ puis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

• Si $b < a < c$, $\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$ puis

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

• Si $b < c < a$, $\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$ puis

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

• Si $c < a < b$, $\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$ puis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

• Si $c < b < a$, $\int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$ puis

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

❏

5.2 Dérivabilité de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a un réel fixé de I. On pose

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Si $x > a$, la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$. Donc, $F(x)$ existe dans $\mathbb{K}$. Si $x < a$, la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[x, a]$. Donc, $F(x) = -\int_x^a f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{K}$. Enfin, $f(a)$ existe puis $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ existe dans $\mathbb{K}$.

On a ainsi obtenu une fonction F, définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On doit faire attention au fait que l'expression $\int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction de x mais n'est pas une fonction de t. La variable d'intégration t est une variable muette. D'autre part, il n'est pas question d'utiliser la même lettre pour la variable d'intégration et en borne de l'intégrale ou encore l'expression $\int_a^x f(x)\,dx$ ne veut rien dire car il n'est pas envisageable de faire varier x de a à x.

Théorème 37. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Alors, la fonction F est continue sur I.

Démonstration. Soit J un segment de $\mathbb{R}$ contenu dans l'intervalle I. La fonction f est continue par morceaux sur le segment J et en particulier, la fonction f est bornée sur le segment J. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur J. Pour $(x, y) \in J^2$ tel que $x \leqslant y$,

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,dt \leqslant \int_x^y M\,dt = M(y-x) = M|y-x|.$$

Ainsi, la fonction F est M-lipschitzienne sur J et en particulier, la fonction F est continue sur J.

La fonction F est donc continue sur tout segment contenu dans I et finalement, la fonction F est continue sur I.

❏

On s'intéresse maintenant à la dérivabilité de la fonction F. Dans le théorème qui suit, les notations $f\left(x_0^+\right)$ et $f\left(x_0^-\right)$ désignent respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$.

Théorème 38. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Soit $x_0 \in I$.

1) Si x_0 n'est pas une borne de I, F est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $F'_d(x_0) = f\left(x_0^+\right)$ et $F'_g(x_0) = f\left(x_0^-\right)$. Si x_0 est la borne gauche de I, F est dérivable à droite en x_0 et $F'_d(x_0) = f\left(x_0^+\right)$. Si x_0 est la borne droite de I, F est dérivable à gauche en x_0 et $F'_g(x_0) = f\left(x_0^-\right)$.

2) Si de plus, f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = x_0$.

Démonstration . Soit x_0 un réel de I qui n'est pas la borne droite éventuellement comprise de I. Montrons que F est dérivable à droite en x_0 et que $F'_d(x_0) = f\left(x_0^+\right)$.

Soit $x \in I \cap]x_0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f\left(x_0^+\right) &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt\right) - f\left(x_0^+\right) = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\ dt - (x - x_0) f\left(x_0^+\right)\right)\\ &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \left(f(t) - f\left(x_0^+\right)\right)\ dt.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $f\left(x_0^+\right)$, il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_0, x_0 + \alpha] \subset I$ et pour $t \in]x_0, x_0 + \alpha]$, $\left|f(t) - f\left(x_0^+\right)\right| \leqslant \varepsilon$ (la valeur en x_0 n'a pas d'importance).

Soit $x \in]x_0, x_0 + \alpha]$. Alors, $[x_0, x] \subset [x_0, x_0 + \alpha]$ puis

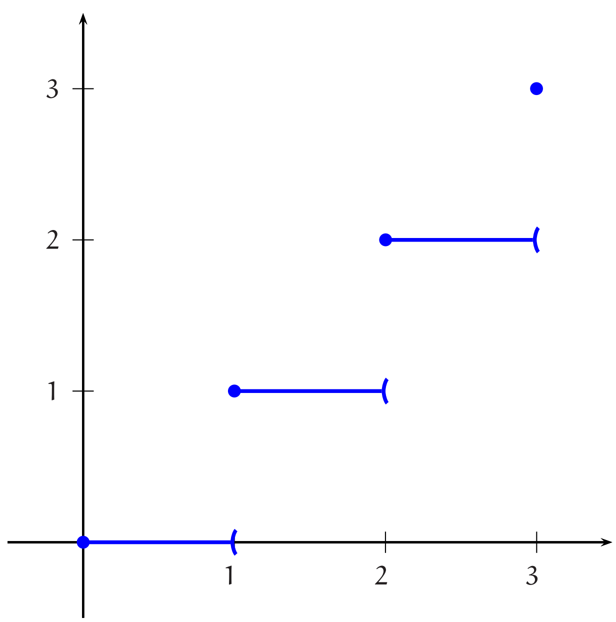
$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f\left(x_0^+\right)\right| = \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^x \left(f(t) - f\left(x_0^+\right)\right)\ dt\right| \leqslant \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \left|f(t) - f\left(x_0^+\right)\right|\ dt \leqslant \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\ dt = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x \in I,\ \left(0 < x - x_0 \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f\left(x_0^+\right)\right| \leqslant \varepsilon\right)$. Donc, F est dérivable à droite en x_0 et $F'_d(x_0) = f\left(x_0^+\right)$.

La dérivabilité à gauche se démontre de manière analogue. Si de plus, f est continue en x_0, alors $f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right) = f(x_0)$ et le 2) est une conséquence immédiate du 1).

❑

Exemple. Considérons $f : \begin{array}{ccc} [0,3] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$. La fonction f est continue par morceaux sur $[0,3]$. Voici son graphe :

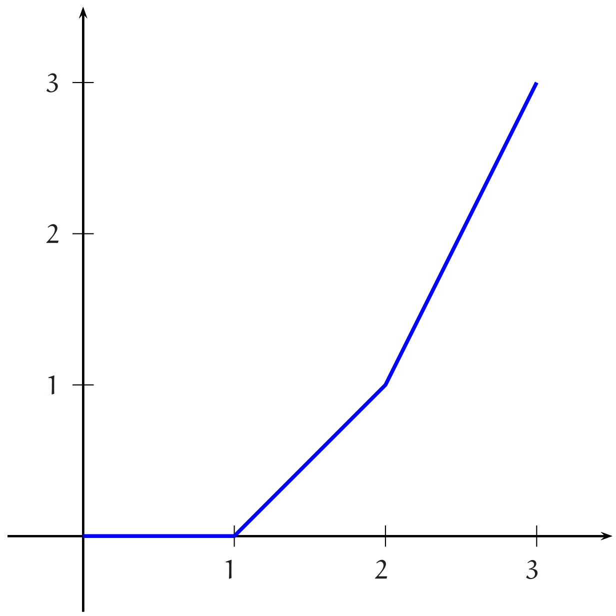


Pour $x \in [0,3]$, posons $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x E(t)\ dt$.

- Si $x \in [0,1[$, $F(x) = \int_0^x 0\ dt = 0$.
- Si $x \in [1,2[$, $F(x) = \int_0^1 0\ dt + \int_1^x 1\ dt = 0 + x - 1 = x - 1$.

• Si $x \in [2,3]$ (y compris si $x = 3$), $F(x) = \int_0^1 0\ dt + \int_1^2 1\ dt + \int_2^x 2\ dt = 0 + 1 + 2(x-2) = 2x - 3$.

La fonction F est continue sur $[0,3]$, dérivable en tout réel non entier de $[0,3]$, pas dérivable en 1 et en 2. Par exemple, $F'_g(1) = f(1^-) = 0$ et $F'_d(1) = f(1^+) = 1$. Voici le graphe de F :



Un corollaire immédiat au théorème 38 est :

Théorème 39. Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$.

F est de classe C^1 sur I et $F' = f$.

5.3 Primitives

Définition 13. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $F' = f$.

On a déjà eu l'occasion d'expliquer dans le chapitre « Calculs de primitives et d'intégrales », au programme du premier semestre de Maths Sup, qu'une fonction donnée, même continue par morceaux, n'admet pas nécessairement de primitive.

Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ et même en escalier sur $[0,1]$. Pourtant, cette fonction n'admet pas de primitive sur $[0,1]$.

En effet, supposons par l'absurde que la fonction f admet une primitive F sur $[0,1]$. F est dérivable sur $[0,1]$ et en particulier continue sur $[0,1]$. La dérivée de F est nulle sur $[0,1[$ et donc la fonction F est constante sur $[0,1[$ puis sur $[0,1]$ par continuité en 1. Mais alors, la dérivée de F est nulle sur $[0,1]$ et en particulier $F'(1) = 0 \neq 1 = f(1)$. La dérivée de F sur $[0,1]$ ne peut pas être f et donc F ne peut pas être une primitive de f sur $[0,1[$.

On aurait aussi pu raisonner de la façon suivante : F est de classe C^0 sur $[0,1]$, de classe C^1 sur $[0,1[$ et $F'_{/[0,1[} = f_{/[0,1[}$ a une limite réelle quand x tend vers 1. Donc, F est de classe C^1 sur $[0,1]$ d'après un théorème classique d'analyse. Mais ceci contredit la discontinuité de $F' = f$ en 1. Donc, f n'admet pas de primitive sur $[0,1]$. On note que la fonction f est un exemple de fonction n'admettant pas de primitive sur $[0,1]$ mais intégrable sur $[0,1]$: $\int_0^1 f(x)\ dx = 0$.

Par contre, quand la fonction f est continue sur I, on a le théorème fondamental suivant :

Théorème 40. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f sur I et en particulier, f admet au moins une primitive sur I.

2) Soit F une primitive donnée de f sur I. Les primitives de la fonction f sur I sont les fonctions de la forme $G = F + C$, où C est une (fonction) constante. En particulier, deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

3) Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une primitive F et une seule vérifiant $F(x_0) = y_0$ à savoir la fonction

$$F\ :\ x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\ dt.$$

En particulier, pour tout $x_0 \in I$, il existe une primitive et une seule de f sur I, s'annulant en x_0, à savoir la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\ dt$.

4) Pour tous réels a et b de I, $\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

Démonstration. **1)** est une conséquence immédiate du théorème 39.

2) Soit F une primitive donnée de f sur I. Soit G une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} G \text{ primitive de } f \text{ sur } I &\Leftrightarrow G' = f \Leftrightarrow G' = F' \Leftrightarrow (G - F)' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ G(x) - F(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C. \end{aligned}$$

3) Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Pour $x \in I$, posons $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\ dt$. F est une primitive de f sur I et $F(x_0) = 0$. Soit G une primitive de f. Il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + C$.

$$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow C = y_0.$$

Ceci montre 3).

4) Soient a et b deux réels de I. Pour $x \in I$, posons $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. F est une primitive de f sur I et $F(a) = 0$. On a donc

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) = F(b) - F(a).$$

Soit G une primitive quelconque de f sur I. Il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + C$. Mais alors,

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

❏

Il est important de noter qu'une intégrale n'est pas définie à une constante additive près. Par exemple, $\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$ et non pas $\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3} + C$.

Notation. On pose $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ et donc, si F est une primitive de f sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)\ dt = [F(x)]_a^b$. Avec cette notation, un calcul d'intégrale prend la tournure suivante :

$$\int_0^1 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 10. Etude complète de la fonction $F\ :\ x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}\ dt$.

Solution 10. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ (car pour tout réel t, $t^4 + t^2 + 1 > 0$) et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Définition, dérivabilité, dérivée.
Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, F est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F(x) = G(2x) - G(x)$. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Parité. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $t = -u$ et donc $dt = -du$, on obtient, en notant que g est paire

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\ dt = \int_{x}^{2x} g(-u) \times (-du) = -\int_{x}^{2x} g(u)\ du = -F(x).$$

F est donc impaire.

Variations. Pour tout x réel,

$$\begin{aligned}\text{sgn}(F'(x)) &= \text{sgn}\left(\frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\right) = \text{sgn}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)\\ &= \text{sgn}\left(4(x^4+x^2+1) - (16x^4+4x^2+1)\right)\ \text{(par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+)\\ &= \text{sgn}(-12x^4+3) = \text{sgn}(1-4x^4) = \text{sgn}\left(\left(1-2x^2\right)\left(1+2x^2\right)\right) = \text{sgn}(1-2x^2).\end{aligned}$$

F est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

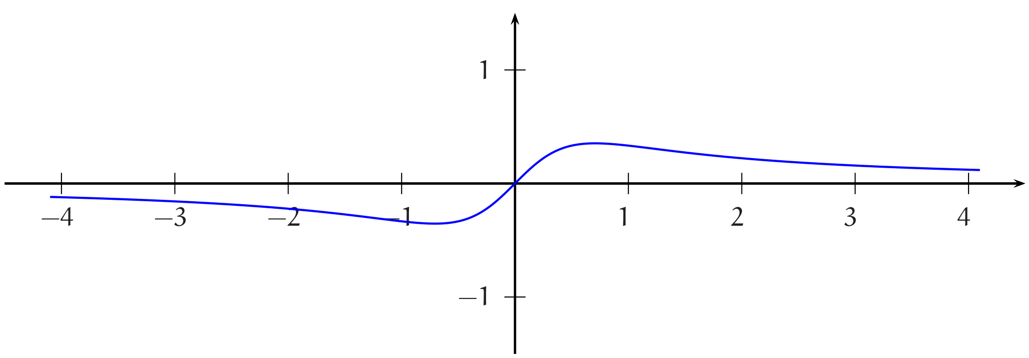
Etude en $+\infty$. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 2x]$, $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}$. En intégrant, on obtient pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_{x}^{2x} \frac{1}{t^2}\ dt \leqslant \int_{x}^{2x} \frac{1}{x^2}\ dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Graphe. Le graphe de F a l'allure suivante :



6 Sommes de Riemann à pas constant

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $x_k = x_0 + k\frac{b-a}{n}$. $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ à pas constant. On pose alors :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

$S_n(f)$ est la n-ème **somme de Riemann** associée à f sur le segment $[a, b]$.

On a le résultat suivant :

Théorème 41. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors,

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Le résultat précédent s'écrit $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(x)\,dx$. Il peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

ce qui se lit : la moyenne arithmétique des nombres $f(x_0),\ldots,f(x_{n-1})$ tend vers la moyenne de f à savoir $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, quand n tend vers $+\infty$ de sorte que le pas de la subdivision σ tend vers 0.

Démonstration . Nous allons démontrer le résultat dans deux situations :

- en supposant f lipschitzienne sur $[a,b]$ (ce qui est en particulier le cas si f est de classe C^1 sur $[a,b]$),
- en supposant f continue sur $[a,b]$ (ce qui est en particulier le cas si f est lipschitzienne sur $[a,b]$).

Le programme officiel prévoit de démontrer le résultat quand f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - (x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\,dx.\end{aligned}$$

• Supposons maintenant f lipschitzienne sur $[a,b]$. Soit $M\in\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $(x,y)\in[a,b]^2$, $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\,dx\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x)-f(x_k)|\,dx \leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|x-x_k|\,dx \leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|x_{k+1}-x_k|\,dx\\ &= M\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)^2 = Mn\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{n}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f)\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{n}$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M(b-a)^2}{n}=0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b f(x)\,dx$.

• Recommençons cette démonstration sous l'hypothèse plus faible : f est continue sur le segment $[a,b]$.

Soit $\varepsilon>0$. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et donc, la fonction f est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Par suite, il existe $\alpha>0$ tel que, pour $(x,y)\in[a,b]^2$, $\left(|x-y|\leqslant\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)$.

On fixe alors un entier naturel non nul n_0 tel que $\dfrac{b-a}{n_0}\leqslant\alpha$ (on prend par exemple $n_0=E\left(\dfrac{b-a}{\alpha}\right)+1$). Pour $n\geqslant n_0$ puis $k\in[\![0,n-1]\!]$ puis $x\in[x_k,x_{k+1}]$, on a

$$|x-x_k| = x-x_k \leqslant x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n}\leqslant\frac{b-a}{n_0}\leqslant\alpha,$$

et donc $|f(x)-f(x_k)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Mais alors, pour $n\geqslant n_0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(x)-f\left(x_k\right)\right)\,dx\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|f(x)-f\left(x_k\right)\right|\,dx \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_k\right)\frac{\varepsilon}{b-a} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{n} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

On a montré que : $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left(n\geqslant n_0\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n(f)\right|\leqslant\varepsilon\right)$. Donc, encore une fois, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b f(x)\,dx$.

En adaptant un peu la démonstration précédente, on peut obtenir le résultat pour les fonctions continues par morceaux.

❑

Le théorème précédent dit que si f est continue (ou plus généralement continue par morceaux) sur $[a,b]$, la somme $\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(x_k\right)$ tend vers $\int_a^b f(x)\,dx$. Le résultat est identique pour les sommes $\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)$ ou $\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}f\left(x_k\right)$ ou même $\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=3}^{n+4}f\left(x_k\right)$ car toutes ces sommes différent de la somme initiale par un nombre fini de termes, en plus ou en moins, tendant tous vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par exemple,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_k\right)=\frac{b-a}{n}\left(f\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)\right)=\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_k\right)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice 11. Déterminer les limites des suites suivantes :

1) $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

2) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}$.

3) $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}ke^{\frac{2k}{n}}$.

Solution 7.

1) Pour $x\in[0,\pi]$, posons $f(x)=x\sin(\pi x)$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ puis $k\in[\![0,n]\!]$, posons $x_k=\dfrac{k}{n}$. $\sigma=\left(x_0,\dots,x_n\right)$ est une subdivision à pas constant du segment $[0,1]$. Posons encore

$$S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\times\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_k\right)f\left(x_k\right).$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, la somme de Riemann S_n tend vers $\int_0^1 f(x)\,dx$ quand n tend vers $+\infty$, avec

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\sin(\pi x)\,dx &= \left[x\times\left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right)\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos(\pi x)\,dx \\
&= -\frac{\cos(\pi)}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)=\dfrac{1}{\pi}$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}$.

$$S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Pour $x\in[0,1]$, posons $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ puis $k\in[\![0,n]\!]$, posons $x_k=\dfrac{k}{n}$. Alors, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right).$$

Puisque f est continue sur $[0,1]$, la somme de Riemann S_n tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ quand n tend vers $+\infty$ avec

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2).$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}=\ln(2)$.

On note que l'on aurait aussi pu concevoir S_n comme une somme de Riemann associée à la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur le segment $[1,2]$ en écrivant

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k/n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}ke^{\frac{2k}{n}}=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k}{n}e^{\frac{2k}{n}}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}\times\frac{2k}{n}e^{\frac{2k}{n}}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2(k+1)}{n}-\frac{2k}{n}\right)\frac{2k}{n}e^{\frac{2k}{n}}.$$

Donc, $\dfrac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}ke^{\frac{2k}{n}}$ est une somme de Riemann associée à la subdivision $\sigma=(x_0,\ldots,x_n)$ où pour $k\in[\![0,n]\!]$, $x_k=\dfrac{2k}{n}$ et à la fonction $f\ :\ x\mapsto xe^x$ sur le segment $[0,2]$. Puisque f est continue sur $[0,2]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}ke^{\frac{2k}{n}}=\frac{1}{4}\int_0^2 xe^x\,dx=\frac{1}{4}\left([xe^x]_0^2-\int_0^2 e^x\,dx\right)=\frac{1}{4}\left(2e^2-\left(e^2-1\right)\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

Bien sûr, on aurait pu aussi considérer que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}ke^{\frac{2k}{n}}&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}e^{\frac{2k}{n}}\\&\underset{n\to+\infty}{\to}\int_0^1 xe^{2x}\,dx\\&=\left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

Pour la question 2), on rappelle que le résultat peut être obtenu autrement si on sait que $H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+o(1)$ où $H_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}$ et γ est la constante d'Euler :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} &= H_{2n}-H_n\\ &\underset{n\to+\infty}{=}(\ln(2n)+\gamma+o(1))-(\ln(n)+\gamma+o(1))\\ &\underset{n\to+\infty}{=}\ln(2)+o(1).\end{aligned}$$

7 La formule de Taylor-Laplace

Théorème 42. (formule de Taylor-Laplace ou formule de Taylor avec reste intégrale)

Soient $n\in\mathbb{N}$ puis f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $(a,b)\in I^2$,

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur n.

- Soit f une fonction de classe C^1 sur I. Alors la fonction f' est définie et continue sur I et pour $(a,b)\in I^2$

$$\int_a^b\frac{(b-t)^0}{0!}f^{(0+1)}(t)\ dt=\int_a^b f'(t)\ dt=f(b)-f(a)$$

puis

$$f(b)=f(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^0}{0!}f^{(0+1)}(t)\ dt.$$

La formule à démontrer est vraie quand $n=0$.

- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que pour toute fonction f de classe C^{n+1} sur I et tout $(a,b)\in I^2$, on ait

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Soient f une fonction de classe C^{n+2} sur I et $(a,b)\in I^2$. Les deux fonctions $t\mapsto-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $t\mapsto f^{(n+1)}(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,b]$ ou $[b,a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt&=\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b-\int_a^b-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\ dt\\ &=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\ dt.\end{aligned}$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}f(b)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\ dt\\ &=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\ dt\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, si f est de classe C^{n+1} sur I et tout $(a,b)\in I^2$, alors

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

❏

En particulier, si x_0 est un réel de I, pour toute fonction de classe C^∞ sur I, on a pour tout x de I et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt\quad(*).$$

On note que cette formule ressemble beaucoup à la formule de TAYLOR-YOUNG en x_0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\left(x-x_0\right)^k + o\left(\left(x-x_0\right)^n\right) \quad (**).$$

Néanmoins, ces formules ne sont pas de même nature. La formule de TAYLOR-YOUNG $(**)$ est une **formule locale** : x tend vers x_0. La formule de TAYLOR-LAPLACE $(*)$ est une **formule globale** : elle est valable pour tout x (de I).

De l'égalité de TAYLOR-LAPLACE, on déduit

Théorème 43. (inégalité de TAYLOR-LAGRANGE)

Soient $n \in \mathbb{N}$ puis f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \frac{M_{n+1}|b-a|^{n+1}}{(n+1)!},$$

où M_{n+1} est un majorant de la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,b]$ si $a \leqslant b$ ou $[b,a]$ si $b \leqslant a$.

DÉMONSTRATION . Supposons par exemple $a \leqslant b$. La fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est continue sur $[a,b]$ et en particulier bornée sur $[a,b]$. On en déduit l'existence de M_{n+1} puis

$$\begin{aligned}\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &= \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.\right| \\ &\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|\ dt \\ &\leqslant M_{n+1}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\ dt = M_{n+1}\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b = \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

❏

On appliquera cette inégalité à la fonction exponentielle dans le chapitre suivant.