Planche n° 30. Comparaison des fonctions en un point

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{1/(2x-\pi)}$ **2)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}|\tan x|^{\cos x}$ **3)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}$ **5)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\cos x\times e^{1/(1-\sin x)}$ **6)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\sin x}$ **8)** $\displaystyle\lim_{x\to e,\ x<e}(\ln x)^{\ln(e-x)}$ **9)** $\displaystyle\lim_{x\to 1,\ x>1}\frac{x^x-1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(\operatorname{ch}x-1)}{x^2+1}$ **11)** $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x>0}\frac{(\sin x)^x-x^{\sin x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$ **12)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$

13) $\displaystyle\lim_{x\to 1/\sqrt{2}}\frac{(\operatorname{Arcsin}x)^2-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$ **14)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x$ (où $\cos a\neq 0$)

Exercice n° 2

Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1) $\dfrac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0) **2)** $\dfrac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0) **3)** $\operatorname{Arccos}\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0)

4) $\tan x$ (ordre 3 en $\dfrac{\pi}{4}$) **5)** $(\operatorname{ch}x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0) **6)** $\tan^3 x\left(\cos\left(x^2\right)-1\right)$ (ordre 8 en 0)

7) $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1) **8)** $\operatorname{Arctan}(\cos x)$ (ordre 5 en 0) **9)** $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0)

10) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x}$ (ordre 5 en 0) **11)** $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ (ordre 10 en 0) **12)** $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)

13) $\tan\sqrt[3]{4\left(\pi^3+x^3\right)}$ (ordre 3 en π)

Exercice n° 3

Soit $0<a<b$. Etude complète de la fonction $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Exercice n° 4

Etude au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{x^2-3}-\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1}$.

Exercice n° 5

Soit $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 10 secondes puis $f^{(n)}(x)$ pour $|x|\neq 1$ en à peine plus de temps).

Exercice n° 6

1) Equivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+5}-x+1$.

2) Equivalent simple en 0, 1, 2 et $+\infty$ de $3x^2-6x$

3) Equivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\sin x}$.

4) Equivalent simple en $+\infty$ de $x^{\operatorname{th}x}$.

5) Equivalent simple en 0 de $\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$.

Exercice n° 7

Développement asymptotique à la précision $\dfrac{1}{n^3}$ de $u_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!$.

Exercice n° 8

1) Développement asymptotique à la précision x^2 en 0 de $\dfrac{1}{x(e^x-1)}-\dfrac{1}{x^2}$.

2) Développement asymptotique à la précision $\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$.

Exercice n° 9

Soient $a>0$ et $b>0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

1) Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)$.

2) Même question pour $e^{-a}f_n(a)-1+\dfrac{a^2}{2n}$.

Exercice n° 10

Soit $u_0\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_{n+1}=\sin(u_n)$.

1) Montrer brièvement que la suite u est strictement positive et converge vers 0.

2) a) Déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle.
b) En utilisant le lemme de CESARO, déterminer un équivalent simple de u_n.

Exercice n° 11

Soit u la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0>0$ et la relation $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$. Equivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 12

1) Montrer que l'équation $\tan x=x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.

2) Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice n° 13

1) Montrer que l'équation $x+\ln x=k$ admet, pour k réel donné, une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée x_k.

2) Montrer que, quand k tend vers $+\infty$, on a : $x_k=ak+b\ln k+c\dfrac{\ln k}{k}+o\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)$ où a, b et c sont des constantes à déterminer.

Exercice n° 14

Soit $f(x)=1+x+x^2+x^3\sin\dfrac{1}{x^2}$ si $x\neq0$ et 1 si $x=0$.

1) Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Exercice n° 15

Etude au voisinage de 0 de $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{Arcsin}x}$ (existence d'une tangente ?)

Exercice n° 16

1) La fonction $x\mapsto\operatorname{Arccos}x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?

2) Equivalent simple de $\operatorname{Arccos}x$ en 1.

Exercice n° 17

1) Développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.

2) Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p+2q=k$.

