Chapitre 29. Déterminants

Plan du chapitre

1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

1.1 Formes p-linéaires

Définition 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un entier naturel non nul. Une **forme p-linéaire sur E** est une application de E^p dans $\mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Plus explicitement, soit $f : \begin{array}{ccc} E^p & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & f((x_1, \dots, x_p)) \end{array}$. f est une forme p-linéaire sur E si et seulement si

$$\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \text{l'application } \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x_i & \mapsto & f((a_1, \dots, x_i, \dots, a_p)) \end{array} \text{ est linéaire.}$$

Un exemple fondamental d'expression p-linéaire est un produit de p réels. Le produit de deux réels c'est-à-dire l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \times y \end{array}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$. Le produit de trois réels c'est-à-dire l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x \times y \times z \end{array}$ est une forme trilinéaire sur $\mathbb{R}$ ...

Analysons le cas $p = 2$. Soit $f : \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & f((x, y)) \end{array}$ une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La bilinéarité de f se traduit explicitement par :

- $\forall (x, x', y) \in E^3,\ \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2,\ f((\lambda x + \lambda' x', y)) = \lambda f((x, y)) + \lambda' f((x', y))$
  et
- $\forall (x, y, y') \in E^3,\ \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2,\ f((x, \lambda y + \lambda' y')) = \lambda f((x, y)) + \lambda' f((x, y'))$.

Par exemple, le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{array}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Si $f : \begin{array}{ccc} E^2 & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & f((x, y)) \end{array}$ est une forme bilinéaire et que l'on fait agir les deux linéarités successivement, cela donne

$$\begin{aligned} f((\lambda x + \lambda' x', \mu y + \mu' y')) &= \lambda f((x, \mu y + \mu' y')) + \lambda' f((x, \mu y + \mu' y')) \\ &= \lambda \mu f((x, y)) + \lambda \mu' f((x, y')) + \lambda' \mu f((x', y)) + \lambda' \mu' f((x', y')). \end{aligned}$$

En développant, on obtient quatre termes.

Analysons le cas $p = 3$. Soit $f : \begin{array}{ccc} E^3 & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y, z) & \mapsto & f((x, y, z)) \end{array}$ une forme trilinéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La trilinéarité de f se traduit explicitement par :

- $\forall (x_1, x_2, y, z) \in E^4,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ f((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y, z)) = \lambda_1 f((x_1, y, z)) + \lambda_2 f((x_2, y, z))$
  et
- $\forall (x, y_1, y_2, z) \in E^4,\ \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{K}^2,\ f((x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, z)) = \mu_1 f((x, y_1, z))) + \mu_2 f((x, y_2, z))$
  et
- $\forall (x, y, z_1, z_2) \in E^4,\ \forall (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{K}^2,\ f((x, y, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) = \nu_1 f((x, y, z_1))) + \nu_2 f((x, y, z_2))$.

Si on fait agir les trois linéarités successivement, cela donne

$$\begin{aligned} f((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) &= \lambda_1 f((x_1, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) + \lambda_2 f((x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) \\ &= \lambda_1 \mu_1 f((x_1, y_1, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) + \lambda_1 \mu_2 f((x_1, y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_1 f((x_2, y_1, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) + \lambda_2 \mu_2 f((x_2, y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) \\ &= \lambda_1 \mu_1 \nu_1 f((x_1, y_1, z_1)) + \lambda_1 \mu_1 \nu_2 f((x_1, y_1, z_2)) \\ &\quad + \lambda_1 \mu_2 \nu_1 f((x_1, y_2, z_1)) + \lambda_1 \mu_2 \nu_2 f((x_1, y_2, z_2)) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_1 \nu_1 f((x_2, y_1, z_1)) + \lambda_1 \mu_1 \nu_2 f((x_2, y_1, z_2)) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_2 \nu_1 f((x_2, y_2, z_1)) + \lambda_1 \mu_2 \nu_2 f((x_2, y_2, z_2)). \end{aligned}$$

On obtient une somme de $2 \times 2 \times 2 = 8$ termes

1.2 Formes p-linéaires alternées, formes p-linéaires anti-symétriques

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $p \geqslant 2$ puis f une forme p-linéaire sur E.

f est **anti-symétrique** si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et pour toute transposition $\tau = \tau_{i,j}$ où $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et $i \neq j$,

$$f\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}\right) = -f(x_1, \ldots, x_p).$$

Cette dernière égalité s'écrit plus explicitement (mais moins précisément)

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p).$$

On analyse maintenant l'effet d'une permutation quelconque des indices. On sait que toute permutation est un produit de transpositions et donc :

Théorème 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $p \geqslant 2$ puis f une forme p-linéaire sur E. f est anti-symétrique si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et pour toute permutation σ de $[\![1,p]\!]$

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p).$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_p$. On sait qu'il existe des transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_k$, $k \geqslant 1$, telles que $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$. Pour $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, on a alors

$$\begin{aligned} f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) &= f\left(x_{\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k(1)}, \ldots, x_{\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k(p)}\right) \\ &= (-1)^k f(x_1, \ldots, x_p) \text{ (par récurrence sur } k) \\ &= \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

La réciproque est immédiate.

❏

Définition 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $p \geqslant 2$ puis f une forme p-linéaire sur E.

f est **alternée** si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, si il existe $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $x_i = x_j$, alors $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

Théorème 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $p \geqslant 2$ puis f une forme p-linéaire sur E.

f est anti-symétrique si et seulement si f est alternée.

Démonstration.

- Supposons f alternée. Soient $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ puis $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i < j$.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_p) \\ &= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_p) \\ &= f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

et donc $f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p)$. Ceci montre que f est anti-symétrique.

- Supposons f anti-symétrique. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$. On suppose qu'il existe $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i < j$ et $x_i = x_j$. Alors,

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p),$$

et donc $2f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$ puis $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$. Ceci montre que f est alternée. ❏

1.3 Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

On analyse maintenant le cas particulier des formes n-linéaires alternées sur une espace de dimension n. Si vous vous sentez dépassés par les pages de calculs qui suivent, vous pouvez aller directement à l'intitulé du théorème 3 et à la définition 4, page 6. Le but de ce qui suit est de dégager petit à petit l'expression du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

On se donne E un espace de dimension n puis $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On se donne ensuite f une forme n-linéaire alternée sur E. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on peut poser

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i,$$

(de sorte que la matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$). Il s'agit alors de calculer

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i\right),$$

en tenant compte du fait que f est n-linéaire, alternée et donc aussi anti-symétrique.

Pour appréhender cette expression pénible, commençons par le cas $n = 2$ (cas des formes bilinéaires alternées sur un espace de dimension 2).

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= f(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) \\
&= a_{1,1}a_{1,2}f(e_1, e_1) + a_{1,1}a_{2,2}f(e_1, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}f(e_2, e_1) + a_{2,1}a_{2,2}f(e_2, e_2) \ \text{(bilinéarité)} \\
&= a_{1,1}a_{2,2}f(e_1, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}f(e_2, e_1) \ \text{(f alternée)} \\
&= a_{1,1}a_{2,2}f(e_1, e_2) - a_{2,1}a_{1,2}f(e_1, e_2) \ \text{(f anti-symétrique)} \\
&= (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}) f(e_1, e_2).
\end{aligned}$$

Analysons de même le cas $n = 3$ (cas des formes trilinéaires alternées sur un espace de dimension 3). Le développement contient $3 \times 3 \times 3 = 27$ termes puis 21 de ces termes disparaissent car f est alternée. A la dernière étape du calcul intervient l'anti-symétrie de f.

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= f(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + a_{3,1}e_3, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + a_{3,2}e_3, a_{1,3}e_1 + a_{2,3}e_2 + a_{3,3}e_3) \\
&= a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}f(e_1, e_1, e_1) + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_1, e_1, e_2) + a_{1,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_1, e_1, e_3) \\
&+ a_{1,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_1, e_2, e_1) + a_{1,1}a_{2,2}a_{2,3}f(e_1, e_2, e_2) + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_1, e_2, e_3) \\
&+ a_{1,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_1, e_3, e_1) + a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_1, e_3, e_2) + a_{1,1}a_{3,2}a_{3,3}f(e_1, e_3, e_3) \\
&+ a_{2,1}a_{1,2}a_{1,3}f(e_2, e_1, e_1) + a_{2,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_2, e_1, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_2, e_1, e_3) \\
&+ a_{2,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_2, e_2, e_1) + a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}f(e_2, e_2, e_2) + a_{2,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_2, e_2, e_3) \\
&+ a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_2, e_3, e_1) + a_{2,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_2, e_3, e_2) + a_{2,1}a_{3,2}a_{3,3}f(e_2, e_3, e_3) \\
&+ a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3}f(e_3, e_1, e_1) + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_3, e_1, e_2) + a_{3,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_3, e_1, e_3) \\
&+ a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_3, e_2, e_1) + a_{3,1}a_{2,2}a_{2,3}f(e_3, e_2, e_2) + a_{3,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_3, e_2, e_3) \\
&+ a_{3,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_3, e_3, e_1) + a_{3,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_3, e_3, e_2) + a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}f(e_3, e_3, e_3) \\
&= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_1, e_2, e_3) + a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_1, e_3, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_2, e_1, e_3) \\
&+ a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_2, e_3, e_1) + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_3, e_1, e_2) + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_3, e_2, e_1) \\
&= (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}) f(e_1, e_2, e_3).
\end{aligned}$$

Passons au cas général où n est quelconque. Quand on développe l'expression $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i\right)$ par n-linéarité, on obtient une somme de $\underbrace{n \times \ldots \times n}_{n \text{ facteurs}} = n^n$ termes. Chaque terme est du type

$$a_{i_1,1}a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}),$$

ou encore du type

$$a_{\chi(1),1}a_{\chi(2),2} \ldots a_{\chi(n),n} f\left(e_{\chi(1)}, \ldots, e_{\chi(n)}\right),$$

où χ est une application quelconque de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. On peut donc écrire

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i\right) = \sum_{\chi \in [\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}} a_{\chi(1),1}a_{\chi(2),2} \ldots a_{\chi(n),n} f\left(e_{\chi(1)}, \ldots, e_{\chi(n)}\right).$$

Dans cette somme, puisque f est alternée, les termes pour lesquels χ n'est pas une application injective (auquel cas, il existe $i \neq j$ tel que $e_{\chi(i)} = e_{\chi(j)}$) disparaissent. Les termes qui n'ont pas disparu sont ceux pour lesquels χ est une application injective de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. On admet (ceci sera démontré dans le chapitre « Dénombrements ») qu'une application injective de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même est automatiquement bijective ou encore qu'une application injective de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même est une permutation de $[\![1, n]\!]$. Il reste

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2}e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}e_i\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n} f\left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma) f(e_1, \ldots, e_n) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n}\right) f(e_1, \ldots, e_n).
\end{aligned}$$

Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, posons $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n}$.

On vient de démontrer que si f est une forme n-linéaire alternée sur E, nécessairement

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ f = \lambda\Delta.$$

Vérifions maintenant que Δ est une forme n-linéaire alternée sur E.

• Δ est une application de E^n dans $\mathbb{K}$.

• Avec des notations évidentes,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(x_1, \ldots, \alpha x_j + \beta x'_j, \ldots, x_n\right) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots\left(\alpha a_{\sigma(j),j} + \beta a'_{\sigma(j),j}\right)\ldots a_{\sigma(n),n} \\
&= \alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n} + \beta \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a'_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n} \\
&= \alpha\Delta(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + \beta\Delta\left(x_1, \ldots, x'_j, \ldots, x_n\right).
\end{aligned}$$

Δ est donc effectivement linéaire par rapport à chacune de ses n variables ou encore Δ est une forme n-linéaire sur E.

• Vérifions que Δ est alternée. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ tel qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $x_i = x_j$. Soit $\tau = \tau_{i,j}$ la transposition qui échange les numéros i et j. On a vu dans le chapitre précédent (« Le groupe symétrique ») que les permutations σ sont de deux types

- les permutations paires de signature 1, l'ensemble des permutations paires étant noté $\mathcal{A}_n$,
- les permutations impaires de signature -1, l'ensemble des permutations impaires étant obtenu en composant à droite chaque permutation paire par la transposition fixée τ.

Ceci fournit

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) &= \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n} \\
&\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n} \\
&\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(\tau(1)),1}\ldots a_{\sigma(\tau(i)),i}\ldots a_{\sigma(\tau(j)),j}\ldots a_{\sigma(\tau(n)),n}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n}\\
&- \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(j),i}\ldots a_{\sigma(i),j}\ldots a_{\sigma(n),n}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n}\\
&- \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),j}\ldots a_{\sigma(j),i}\ldots a_{\sigma(n),n}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n}\\
&- \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1}\ldots a_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(j),j}\ldots a_{\sigma(n),n} \text{ (car } x_i = x_j)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que Δ est une forme alternée. Il est alors immédiat que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\Delta$ est encore une forme n-linéaire alternée.
En résumé, pour tout application f de E^n dans $\mathbb{K}$, f est une forme n-linéaire alternée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\Delta$.

Montrons enfin que Δ n'est pas nulle. Pour cela, calculons $\Delta(e_1,\ldots,e_n)$. Dans ce cas, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (la i-ème coordonnée de e_j dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$ est $\delta_{i,j}$) ou encore $\mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(e_1,\ldots,e_n) = I_n$. Donc

$$\Delta(e_1,\ldots,e_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\delta_{\sigma(1),1}\delta_{\sigma(2),2}\ldots\delta_{\sigma(n),n}.$$

Dans cette somme de $n!$ termes, si σ est une permutation telle qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$, alors le produit $\delta_{\sigma(1),1}\delta_{\sigma(2),2}\ldots\delta_{\sigma(n),n}$ est nul. Il ne reste que le terme où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$ ou encore il ne reste que le terme correspondant à $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. Donc,

$$\Delta(e_1,\ldots,e_n) = \varepsilon\left(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right)\delta_{1,1}\delta_{2,2}\ldots\delta_{n,n} = 1.$$

Ceci montre que Δ n'est pas nulle. Enfin, si f est une forme n-linéaire alternée non nulle, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\Delta$ puis

$$f(e_1,\ldots,e_n) = 1 \Leftrightarrow \lambda\Delta(e_1,\ldots,e_n) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Leftrightarrow f = \Delta.$$

On peut énoncer le théorème fondamental puis définir la forme déterminant dans la base $\mathcal{B}$:

Théorème 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base fixée de E.

- Il existe une et une seule forme n-linéaire alternée Δ sur E vérifiant $\Delta(e_1,\ldots,e_n) = 1$.
  De plus, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors

$$\Delta(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\ldots a_{\sigma(n),n}.$$

- L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est $\{\lambda\Delta,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ ou encore l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, de base (Δ).
- Pour toute f, forme n-linéaire alternée sur E, on a

$$f = f(e_1,\ldots,e_n)\,\Delta.$$

DÉFINITION 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de E.

L'unique forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 en la base $\mathcal{B}$ s'appelle la **forme déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ et se note $\det_{\mathcal{B}}$.

De plus, pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si on pose $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Quand $n = 2$ (E est de dimension 2), si $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, alors

$$\det_{(e_1,e_2)}(x_1, x_2) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

Quand $n = 3$ (E est de dimension 3), si $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, alors

$$\det_{(e_1,e_2,e_3)}(x_1, x_2, x_3) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

1.4 Changement de base

Théorème 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

ou encore

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

DÉMONSTRATION. $\det_{\mathcal{B}'}$ est une forme n-linéaire alternée sur E. D'après le théorème 3, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant les deux membres de cette égalité en $\mathcal{B}$, on obtient $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$ et donc $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

❏

⇨ **Commentaire**. *Il est important de noter que quand on change de base, le déterminant d'une famille de vecteurs peut changer.*

Une conséquence importante du théorème 4 est

Théorème 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$$

et en particulier,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0.$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 4, $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant les deux membres de cette égalité en $\mathcal{B}'$, on obtient $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$.

❏

1.5 Critère d'indépendance d'une famille de n vecteurs en dimension n

La première utilisation des déterminants est fournie par le théorème suivant. Quand on saura calculer des déterminants dans quelques paragraphes, on aura un outil très performant pour établir qu'une famille de n vecteurs est ou n'est pas une base de E :

Théorème 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ (x_1, \dots, x_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Démonstration . Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une certaine base $\mathcal{B}'$ de E, le théorème 5 montre que $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n) \neq 0$.

Si $(x_1,\dots,x_n)$ n'est pas une base de E, alors la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée (car $\text{card}\,(x_1,\dots,x_n) = n = \dim(E) < +\infty$). Donc, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que x_j est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Posons $x_j = \sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \lambda_i x_i$. Alors

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n) &= \det_{\mathcal{B}}\left(x_1,\dots,\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \lambda_i x_i,\dots,x_n\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \lambda_i \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_i,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{x_i},\dots x_n)\ \text{(linéarité par rapport au j-ème vecteur)}\\
&= 0\ (\det_{\mathcal{B}} \text{ est alternée}).
\end{aligned}$$

❏

2 Déterminant d'une matrice carrée

2.1 Définitions et notations

Définition 5. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le **déterminant** de la matrice A, noté $\det(A)$, est le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Plus explicitement,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}.$$

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$ se note $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}$.

Quand $n = 2$, $\det\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix} = ad - bc$.

De manière générale, $\sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$ est une somme de $n!$ termes (2 termes si $n = 2$, 6 termes si $n = 3$, 24 termes si $n = 4$, ...). $a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$ est obtenu de la façon suivante : on effectue le produit d'un coefficient de la première colonne, d'un coefficient de la deuxième colonne ... et d'un coefficient de la dernière colonne, ces coefficients appartenant à des lignes deux à deux distinctes ou encore $a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$ est un produit de n facteurs choisis de sorte que l'on ait exactement un coefficient par ligne et par colonne. On fait alors précéder ce terme d'un signe $+$ ou $-$ suivant la parité de la permutation σ utilisée.

Quand $n = 3$, $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}$ est une somme de 6 termes. Trois de ces termes sont précédés d'un signe $+$ et trois d'un signe $-$.

- Si $\sigma = Id_{[\![1,3]\!]}$, le terme correspondant est $\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$.
- Si σ est le cycle $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, le terme correspondant est $a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$.
- Si σ est le cycle $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, le terme correspondant est $a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$.
- Si $\sigma = \tau_{1,2}$, le terme correspondant est $-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$.
- Si $\sigma = \tau_{1,3}$, le terme correspondant est $-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$.
- Si $\sigma = \tau_{2,3}$, le terme correspondant est $-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$.

Donc, $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$.

On peut signaler une méthode, dite méthode de Sarrus, permettant de faire le tri entre ces différents termes. Nous signalons la méthode car elle fait partie de la culture générale des classes préparatoires en maths mais cette méthode s'avère être sans intérêt au bout du compte et nous ne l'utiliserons jamais.

La méthode de Sarrus peut être présentée de différentes manières. Les trois termes affectés d'un $+$ peuvent être repérés de manière géométrique dans le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Ce sont les trois termes « parallèles à la diagonale principale » :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Les trois autres termes, précédés d'un signe $-$, sont les termes « parallèles à l'autre diagonale » :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Ce « parallélisme » peut être présenté d'une autre façon. On écrit les coefficients du déterminant précédent et on complète le tableau obtenu par deux lignes supplémentaires où on a recopié les deux premières lignes :

$$\begin{array}{ccccc} + & & & & - \\ + & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & - \\ + & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & - \\ & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \\ & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \\ & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \end{array}$$

2.2 Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Le théorème suivant est immédiat :

Théorème 7. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B}$ une base de E. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. Alors,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(A).$$

Théorème 8. Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Démonstration. En notant $C_1, \dots, C_n$, les colonnes de A et $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det_{(E_1,\dots,E_n)}(C_1, \dots, C_n) \neq 0 \Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K}).$$

❏

2.3 Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

On s'intéresse au comportement du déterminant avec différentes opérations : $\times$, $.$, $+$ et la transposition.

Théorème 9. Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det\left(A^T\right) = \det(A).$$

Démonstration. Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ puis $A^T = \left(a'_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a'_{i,j} = a_{j,i}$.

$$\det\left(A^T\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Analysons un terme $\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)}$ de cette somme. En posant $\sigma(1)=j_1$, ..., $\sigma(n)=j_n$ de sorte que $\sigma^{-1}(j_1)=1$, ..., $\sigma^{-1}(j_n)=n$, on peut écrire $a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)}=a_{\sigma^{-1}(j_1),j_1}\dots a_{\sigma^{-1}(j_n),j_n}$.
En réordonnant ce dernier produit par ordre croissant des numéros de colonnes (et en tenant compte du fait que $\{j_1,\dots,j_n\}=\{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}=\{1,\dots,n\}$), on obtient $a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)}=a_{\sigma^{-1}(1),1}\dots a_{\sigma^{-1}(n),n}$. Enfin, on rappelle que $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=\varepsilon(\sigma)$ et on a donc

$$\det\left(A^T\right)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)a_{\sigma^{-1}(1),1}\dots a_{\sigma^{-1}(n),n}.$$

Enfin, l'application $\begin{array}{ccc}\mathcal{S}_n & \to & \mathcal{S}_n\\ \sigma & \mapsto & \sigma^{-1}\end{array}$ est bijective car involutive et donc, en posant $\sigma'=\sigma^{-1}$,

$$\det\left(A^T\right)=\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n}\varepsilon\left(\sigma'\right)a_{\sigma'(1),1}\dots a_{\sigma'(n),n}=\det(A).$$

❏

Le déterminant se comporte très bien aussi avec la multiplication des matrices :

Théorème 10.
- $\forall(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\det(AB)=\det(A)\times\det(B)$.
- $\det(I_n)=1$.
- $\forall A\in GL_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(A)}$.
- $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\det(A^p)=(\det(A))^p$ et $\forall A\in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall p\in\mathbb{Z}$, $\det(A^p)=(\det(A))^p$.
- L'application $\det : \begin{array}{ccc}(GL_n(\mathbb{K}),\times) & \mapsto & (\mathbb{K}^*,\times)\\ A & \mapsto & \det(A)\end{array}$ est un morphisme de groupes.

Démonstration .

• Soit $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Si A ou B n'est pas inversible, $\text{Min}\{\text{rg}(A),\text{rg}(B)\}<n$ puis $\text{rg}(AB)\leqslant\text{Min}\{\text{rg}(A),\text{rg}(B)\}<n$ et donc AB n'est pas inversible. Dans ce cas,

$$\det(AB)=0=\det(A)\det(B).$$

Supposons maintenant A et B inversibles. Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ puis $\mathcal{B}'$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que $A=\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ puis $\mathcal{B}''$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que $B=\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$. Alors $AB=\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ puis, d'après le théorème 4,

$$\det(AB)=\det\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}\right)=\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}''\right)=\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right)\det_{\mathcal{B}'}\left(\mathcal{B}''\right)=\det\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)\det\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}\right)=\det(A)\det(B).$$

• Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $I_n=\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ puis

$$\det(I_n)=\det\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=1.$$

• Soit $A\in GL_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$\det(A)\times\det\left(A^{-1}\right)=\det\left(AA^{-1}\right)=\det(I_n)=1.$$

• Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par récurrence, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\det(A^p)=(\det(A))^p$. Si de plus A est inversible, pour p entier naturel strictement négatif,

$$\det(A^p)=\det\left(\left(A^{-p}\right)^{-1}\right)=\left(\det\left(A^{-p}\right)\right)^{-1}=\left((\det A)^{-p}\right)^{-1}=(\det A)^p.$$

❏

On en déduit en particulier :

Théorème 11. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration . Soit $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose qu'il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B=P^{-1}AP$. Alors

$$\det(B)=\det\left(P^{-1}AP\right)=\det\left(P^{-1}\right)\det(A)\det(P)=\frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P)=\det(A).$$

❏

Pour les deux dernières opérations, $+$ et $.$, les calculs se passent moins bien. Déjà, en général, $\det(\lambda A)\neq\lambda\det(A)$ (alors que $\text{Tr}(\lambda A)=\lambda\text{Tr}(A)$). Par exemple, $\det(2I_2)=4\neq 2=2\det(I_2)$. Mais :

Théorème 12. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration . On note C_1, ..., C_n, les colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Par n-linéarité,

$$\det(\lambda A) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda C_1, \ldots, \lambda C_n) = \lambda \times \ldots \times \lambda \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n) = \lambda^n \det(A).$$

❑

Il reste à préciser le comportement du déterminant avec l'addition des matrices. Dans la plupart des cas, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. Par exemple, au format 2, $\det(E_{1,1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ et $\det(E_{2,2}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ mais

$$\det(E_{1,1} + E_{2,2}) = \det(I_2) = 1 \neq \det(E_{1,1}) + \det(E_{2,2}).$$

En fait, aucun résultat agréable ne peut être énoncé concernant le déterminant d'une somme de matrices. On peut démontrer que, si $n \geqslant 2$, il existe une et une seule matrice carrée A telle que pour toute matrice carrée B, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ à savoir $A = 0$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

3.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soient A la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et B la matrice de f dans $\mathcal{B}'$. On sait que les matrices A et B sont semblables ($B = P^{-1}AP$ où $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$) et donc A et B ont le même déterminant d'après le théorème 11. Ceci motive la définition suivante :

Définition 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Le **déterminant** de f est le déterminant de sa matrice dans une base donnée $\mathcal{B}$ de E ou encore le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ où $\mathcal{B}$ est une base donnée de E. Ce nombre ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

3.2 Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Les propriétés usuelles du déterminant d'un endomorphisme se déduisent alors immédiatement des propriétés du déterminant d'une matrice carrée (théorème 10, 11 et 12) :

Théorème 13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ (f \in GL(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0).$$

Théorème 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

- $\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $\det(g \circ f) = \det(f) \times \det(g)$.
- $\det(Id_E) = 1$.
- $\forall f \in GL(E)$, $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$.
- L'application $\begin{array}{rccc} \det : & (GL(E), \circ) & \mapsto & (\mathbb{K}^*, \times) \\ & f & \mapsto & \det(f) \end{array}$ est un morphisme de groupes.

Théorème 15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

$\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

3.3 Autre présentation du déterminant d'un endomorphisme

Le plan adopté depuis le début du chapitre a été le suivant :

- Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base.

- Déterminant d'une matrice carrée.
On démontre que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$ à partir de la formule $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.
On en déduit en particulier que deux matrices semblables ont même déterminant.

- Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, puisque deux matrices semblables ont même déterminant : ce nombre est le déterminant d'un endomorphisme f, $\det(f)$. Il vérifie par exemple, $\forall(f,g)\in(\mathcal{L}(E))^2$, $\det(g\circ f)=\det(f)\times\det(g)$.

On aurait pu inverser l'ordre des deux paragraphes (« déterminant d'une matrice carrée » et « déterminant d'un endomorphisme ») en donnant une définition plus directe du déterminant d'un endomorphisme comme ci-dessous.

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ (avec E de dimension n). Soit $\mathcal{B}$ une base donnée de E. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(f(x_1),\dots,f(x_n)) \end{array}$.
φ est une forme n-linéaire alternée sur E. Donc, il existe $\lambda_{\mathcal{B}}\in\mathbb{K}$ tel que $\varphi=\lambda_{\mathcal{B}}\det_{\mathcal{B}}$ (à priori, $\lambda_{\mathcal{B}}$ est fonction de $\mathcal{B}$) ou encore tel que

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(f(x_1),\dots,f(x_n))=\lambda_{\mathcal{B}}\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n).$$

En appliquant à la famille $\mathcal{B}$ elle-même, on obtient $\lambda_{\mathcal{B}}=\lambda_{\mathcal{B}}\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$. Ainsi,

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(f(x_1),\dots,f(x_n))=\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)\quad(*).$$

Si maintenant $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, alors,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}'))&=\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\times\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}'))\text{ (changement de base)}\\&=\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\times\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))\times\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\text{ (d'après }(*))\\&=\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})).\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend que de f et pas de $\mathcal{B}$. On l'appelle le déterminant de f (et pas le déterminant de f dans $\mathcal{B}$).

A partir de cette définition, on peut démontrer directement que $\forall(f,g)\in(\mathcal{L}(E))^2$, $\det(g\circ f)=\det(g)\times\det(f)$.
Soit $\mathcal{B}$ une base donnée de E.

$$\det(g\circ f)=\det_{\mathcal{B}}(g(f(\mathcal{B})))=\det(g)\times\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))=\det(g)\times\det(f).$$

4 Calculs de déterminants

Dans ce paragraphe, on apprend les différentes techniques de calcul d'un déterminant (qui se rajoutent à la possibilité d'utiliser l'expression développée de $\det(A)$: $\det(A)=\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$). On commence par un type de déterminant de référence, les déterminants triangulaires.

4.1 Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 16. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux. En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Démonstration . Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons A triangulaire supérieure. Alors, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, si $i>j$, on a $a_{i,j}=0$.

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}\quad(*).$$

Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$. S'il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i)>i$, alors $a_{\sigma(i),i}=0$ puis $\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}=0$. Dans la somme ci-dessus, ne persistent donc que les termes pour lesquels σ vérifie : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(i)\leqslant i$.

Soit donc σ un élément de $\mathcal{S}_n$ tel que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(k)\leqslant k$. Montrons alors par récurrence finie que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(k)=k$.

- $\sigma(1)\leqslant 1$ et $\sigma(1)\geqslant 1$. Donc, $\sigma(1)=1$.
- Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$ (si $n=1$, il n'y a plus rien à faire). Supposons que $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $\sigma(i)=i$. Alors, $\sigma(k+1)\in[\![1,k+1]\!]$ mais, σ devant être injective, $\sigma(k+1)\notin\sigma([\![1,k]\!])=[\![1,k]\!]$. Donc, $\sigma(k+1)=k+1$.

Le résultat est démontré par récurrence. Ainsi, dans la somme $(*)$, seul un terme persiste, le terme correspondant à $\sigma=\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ et donc

$$\det(A)=\varepsilon\left(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right)a_{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}(1),1}\dots a_{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}(n),n}=\prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Si A est triangulaire inférieure, on applique l'égalité $\det(A)=\det\left(A^T\right)$ où A^T est triangulaire supérieure.

❏

En particulier,

Théorème 17. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

4.2 Transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes

On rappelle que det : $(C_1\ C_2\ \ldots\ C_n) \mapsto \det(C_1\ C_2\ \ldots\ C_n)$ est une forme n-linéaire alternée. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes et si deux colonnes sont égales, alors le déterminant est nul.
Puisque le déterminant d'une matrice est le déterminant de sa transposée, le déterminant est aussi une forme n-linéaire alternée des lignes de la matrice : le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes et si deux lignes sont égales, alors le déterminant est nul.

On étudie maintenant l'effet de différentes transformations des lignes ou des colonnes d'un déterminant sur la valeur de ce déterminant.

• Permutation des colonnes (ou des lignes) d'un déterminant. Puisque det est une forme n-linéaire anti-symétrique des colonnes de la matrice, on a

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \det\begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & \ldots & C_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma)\det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$$

et puisque $\det\left(A^T\right) = \det(A)$,

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \det\begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma)\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Par exemple (en effectuant la transformation $C_1 \leftrightarrow C_2$), $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 2 \times 1 = -6.$

• Si $i \neq j$, $\det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j & \ldots & C_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j + C_i & \ldots & C_n \end{pmatrix}$

et de même, $\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$

En effet, par linéarité par rapport à la j-ème colonne,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j + C_i & \ldots & C_n \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j & \ldots & C_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_i & \ldots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_j & \ldots & C_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(puisque det est alternée, le déterminant $\det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_i & \ldots & C_i & \ldots & C_n \end{pmatrix}$ est nul car deux de ses colonnes sont égales).

Par exemple, en appliquant les transformations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_1$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

• La linéarité par rapport à une colonne fournit aussi $\det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & \lambda C_j & \ldots & C_n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_j & \ldots & C_n \end{pmatrix}$

et de même pour une ligne $\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$

Ces transformations fournissent de nouvelles idées pour calculer des déterminants. On utilise ces transformations pour essayer le ramener le calcul d'un déterminant à celui d'un déterminant triangulaire. Par exemple :

Exercice 1. Calculer le déterminant de format $n \geqslant 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Solution 1. On applique les transformations : $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j - C_1$. Ces transformations ne modifient pas la valeur de Δ_n et on obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

⇨ **Commentaire** . *Dans l'exercice, on a effectué* ***en même temps*** *plusieurs transformations élémentaires sur les colonnes. On a doit avoir conscience qu'après chaque transformation effectuée, une ancienne colonne a disparu et une nouvelle colonne est apparue. L'****ordre*** *dans lequel on effectue ces transformations peut donc avoir de l'importance. Ce n'était pas le cas dans l'exercice 1 car la colonne C_1 n'était jamais modifiée. Effectuer la transformation $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ aboutit au même résultat que si on effectue la transformation $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$. Le problème se posera par contre dans l'exercice suivant.*

Exercice 2. Calculer le déterminant de format $n \geqslant 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution 2. On effectue successivement les transformations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$, ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

⇨ **Commentaire** . *Dans l'exercice 2, l'ordre dans lequel on effectue les transformations est essentiel. Si on effectue les transformations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, on aboutit au déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & n-2 & & 2 & 1 \\ 0 & 0 & n-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Mais si on effectue les transformations $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, la colonne C_2 dont il est question dans la deuxième transformation n'est plus la colonne 2 initiale. On aboutit au déterminant

$$\begin{vmatrix} n-1 & 1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & 1 & n-2 & & 2 & 1 \\ n-2 & 0 & n-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et ce n'est pas ce que l'on voulait.

4.3 Déterminants par blocs

Théorème 18. Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$. Soit A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par blocs par

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$.

Alors, $\det(A) = \det(B) \times \det(D)$.

Démonstration . Fixons les matrices C et D. On note X_1, ..., X_p les colonnes de la matrice B ou encore on pose $B = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_p \end{pmatrix}$. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p & \to & \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_p) & \mapsto & \det \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} \end{array}$.

• Soient $j \in [\![1, n]\!]$ puis $\left(X_1, \dots, X_j, X_j', \dots, X_p\right) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^{p+1}$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit B (resp. B', B'') l'élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont X_1, ..., X_j, ..., X_p (resp. X_1, ..., X_j', ..., X_p et X_1, ..., $\lambda X_j + \mu X_j'$, ..., X_p). La j-ème colonne de la matrice $\begin{pmatrix} B'' & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda X_j + \mu X_j' \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_j \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} X_j' \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix}.$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la j-ème colonne, on a donc

$$\varphi\left(X_1, \dots, \lambda X_j + \mu X_j', \dots, X_p\right) = \lambda\varphi\left(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p\right) + \mu\varphi\left(X_1, \dots, X_j', \dots, X_p\right).$$

Ceci montre que φ est une forme p-linéaire sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

• Soit $(X_1, \dots, X_p) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p$ tel qu'il existe $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $X_i = X_j$. La i-ème colonne de la matrice $\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} X_i \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix}$ et la j-ème est $\begin{pmatrix} X_j \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix}$. Ces deux colonnes sont égales et donc le déterminant est nul. Ceci montre que φ est alternée.

En résumé, φ est une forme p-linéaire alternée sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension p. On sait alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathcal{K})$. En évaluant en $\mathcal{B}$ les deux membres de cette égalité, on obtient

$$\lambda = \varphi(\mathcal{B}) = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que pour tout $(X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^p$, $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_p)$ ou encore, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} = \det(B)\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$.

De même, l'application $D \mapsto \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$ « est » une forme $n-p$-linéaire alternée des lignes de D. Donc, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, $\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} = \mu \det(D)$. En évaluant en I_{n-p}, on obtient $\mu = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}$.

Ceci montre que pour toutes matrices B, C et D,

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} = \det(B)\det(D)\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Enfin, la matrice $\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Donc, $\det\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p}\end{pmatrix} = 1$ et finalement

$$\det\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D\end{pmatrix} = \det(B)\det(D).$$

❑

⇨ **Commentaire**. *Le résultat précédent se généralise à toute matrice triangulaire par blocs : le déterminant d'une telle matrice est le produit des déterminants des blocs diagonaux.*

4.4 Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4.1 Mineurs, cofacteurs

Définition 7. Soit $n \geqslant 2$ puis $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Le **mineur** $m_{i,j}$ associé au coefficient $a_{i,j}$ est le déterminant de format $n-1$ obtenu en supprimant dans la matrice A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne :

$$m_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le **cofacteur** $A_{i,j}$ du coefficient $a_{i,j}$ est :

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemple. Le cofacteur du coefficient ligne 1, colonne 2, du déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ est

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

❑

Analysons la répartition des signes attribués aux cofacteurs. $(-1)^{i+j}$ vaut 1 (ou encore « $+$ ») quand $i+j$ est pair et vaut -1 (ou encore « $-$ ») quand $i+j$ est impair. Une situation où $i+j$ est pair est quand $i=j$ (cofacteur d'un coefficient de la diagonale principale). Les cofacteurs des coefficients diagonaux sont les mineurs de ces coefficients affectés d'un $+$.
A partir de cette diagonale, quand on avance ou recule de 1 dans une ligne ou que l'on monte ou descend de 1 dans une colonne, $i+j$ change de parité et donc $(-1)^{i+j}$ change de signe. On obtient donc la répartition de signes suivantes :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & + & & (-1)^n \\ + & - & + & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & + \\ (-1)^n & & \ddots & \ddots & + & - \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & \dots & + & - & + \end{vmatrix}.$$

4.4.2 La formule de développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 19. Soient $n \geqslant 2$ puis $A = (a_{k,l})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ (formule de développement suivant la i-ème ligne).
- $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ (formule de développement suivant la j-ème colonne).

Démonstration. Commençons par développer suivant la première colonne C_1. Cette première colonne s'écrit

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{i,1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{n,1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{1,1} E_1 + \ldots + a_{i,1} E_i + \ldots + a_{n,1} E_n$$

où $(E_1, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Par linéarité par rapport à la première colonne, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \Delta_i$$

où $\Delta_i = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \ldots & \ldots & a_{i-1,n} \\ 1 & a_{i,2} & \ldots & \ldots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \ldots & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

On applique aux lignes du déterminant Δ_i le cycle $(2\ 3\ \ldots\ i\ 1\ i+1\ \ldots\ n)$ de longueur i et donc de signature $(-1)^{i-1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \Delta_i &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,2} & \ldots & \ldots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \ldots & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \ldots & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,2} & \ldots & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \ldots & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n,2} & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ (déterminant par blocs)} \\ &= (-1)^{i+1} m_{i,1} = A_{i,1} \text{ (car } i-1 \text{ et } i+1 \text{ ont la même parité).} \end{aligned}$$

Finalement, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} (-1)^{i+1} m_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} A_{i,1}$ ce qui montre la formule de développement suivant la première colonne.

Passons au cas général. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On applique aux colonnes de $\det(A)$ le cycle $(2\ 3\ \ldots\ j\ 1\ j+1\ \ldots\ n)$ de longueur j et donc de signature $(-1)^{j-1}$ et on obtient

$$\det(A) = (-1)^{j-1} \det\left(C_j, C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n\right).$$

En appliquant la formule de développement suivant la première colonne à ce dernier déterminant (dont la première colonne est C_j), on obtient

$$\det(A) = (-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+1}m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j},$$

ce qui montre la formule de développement suivant la j-ème colonne.

Enfin, si on applique la formule de développement suivant la i-ème colonne à $\det\left(A^T\right)$ (qui est égal à $\det(A)$), on obtient (en notant $a'_{i,j}$ les coefficients de ${}^tA$ et $A'_{i,j}$ les cofacteurs correspondants)

$$\det(A) = \det\left({}^tA\right) = \sum_{j=1}^{n} a'_{j,i}A'_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$$

ce qui montre la formule de développement suivant la i-ème ligne.

❏

Exemple. Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Si on développe Δ suivant sa première colonne, cela donne

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times 6 + (-8) + 0 = 10$$

et si on développe Δ suivant sa deuxième colonne, cela donne

$$\Delta = -0\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = (-2)(-5) = 10.$$

On aboutit bien sûr au même résultat. Ici, il fallait choisir de développer Δ suivant sa deuxième colonne, ce qui rendait immédiat le calcul. ❏

⇨ **Commentaire** . *Le programme officiel prévoit que l'on reporte en math spé l'étude du calcul par blocs sur les matrices et donc aussi les calculs de déterminant par blocs. La démonstration précédente est donc hors programme. On peut montrer directement que*

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Faisons-le. On pose : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a'_{i,1} = \delta_{i,j}$ *et* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![2,n]\!]$, $a'_{i,j} = a_{i,j}$ *puis* $A' = \left(a'_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *On a*

$$\det(A') = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)a'_{\sigma(1),1}a'_{\sigma(2),2}\dots a'_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)a'_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}.$$

Dans cette somme, si $\sigma(1) \neq 1$, *alors* $a'_{\sigma(1),1} = 0$ *puis* $\varepsilon(\sigma)a'_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(n),n} = 0$. *Il ne reste alors que les termes correspondant aux permutations* σ *telles que* $\sigma(1) = 1$ *:*

$$\det(A') = \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n \\ \sigma(1)=1}} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}.$$

Soit σ *une permutation de* $[\![1,n]\!]$ *telle que* $\sigma(1) = 1$. *Donc, pour* $i \in [\![2,n]\!]$, $\sigma(i) \in [\![2,n]\!]$ *car* $\sigma(i) \neq 1$. σ *induit donc une permutation* σ' *de* $[\![2,n]\!]$ *:*

$$\sigma' : \begin{array}{ccc} [\![2,n]\!] & \rightarrow & [\![2,n]\!] \\ i & \mapsto & \sigma(i) \end{array}.$$

Puisque $\sigma(1) = 1$, σ *et* σ' *ont le même nombre d'inversions et donc* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')$. *On en déduit que*

$$\det(A') = \sum_{\sigma'\in\mathcal{S}([\![2,n]\!])} \varepsilon(\sigma')a_{\sigma'(2),2}\dots a_{\sigma'(n),n} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Soient $n \geqslant 1$ puis $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$D_n(z) = \begin{vmatrix} z & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & z & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & z + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Calculer $D_n(z)$ en fonction de z.

Solution 3. $D_n(z)$ est un déterminant de format n.
On développe $D_n(z)$ suivant sa dernière colonne en commençant par la fin. Puisque pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, a_k est situé à la ligne $k+1$, colonne n, on obtient

$$D_n(z) = (z + a_{n-1}) \begin{vmatrix} z & 0 & \ldots & 0 \\ \bullet & z & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ \bullet & & \bullet & z \end{vmatrix} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (-1)^{k+1+n} \Delta_k = (z + a_{n-1})\, z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (-1)^{k+1+n} \Delta_k,$$

où Δ_k est défini par blocs par :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} z & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \bullet & z & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \bullet & & \bullet & z & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \hline \bullet & & & \bullet & -1 & \bullet & & \bullet \\ & & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ \bullet & & & \bullet & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1-k} z^k.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-1-k}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} D_n(z) &= z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (-1)^{n+k+1} (-1)^{n-1-k} z^k = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k z^k \\ &= z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k. \end{aligned}$$

4.5 Déterminants de Vandermonde

Définition 8 (déterminant de Vandermonde).

Soient $n \geqslant 2$ puis $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose

$$\operatorname{Van}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \det\left(x_{j-1}^{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$\operatorname{Van}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ est le déterminant de Vandermonde de la famille de n nombres $(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Théorème 20. $\forall n \geqslant 2$, $\forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i).$$

En particulier, $\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1})$ est non nul si et seulement si les nombre x_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ sont deux à deux distincts.

Démonstration. Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ n nombres complexes. On effectue dans $\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_n)$ la transformation $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1} L_i$, ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient

$$\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ P(x_0) & P(x_1) & P(x_2) & \dots & P(x_{n-1}) & P(x_n) \end{vmatrix},$$

où $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme unitaire de degré n quelconque. On prend alors $P = P_0 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$ (qui est effectivement unitaire de degré n). On obtient le déterminant suivant que l'on développe suivant sa dernière ligne :

$$\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_0(x_n) \end{vmatrix} = P_0(x_n)\,\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)\right) \mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Montrons alors par récurrence que : $\forall n \geqslant 2$, $\forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i)$.

- Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$. $\mathrm{Van}(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 2$.

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i)$.

  Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Van}(x_0, \dots, x_n) &= \mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) \left(\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)\right) \\ &= \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i) \times \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geqslant 2$, $\forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$. ❏

Ainsi, par exemple, si $j = e^{2i\pi/3}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = (j-1)\left(j^2-1\right)\left(j^2-j\right)$.

Exercice 4. Montrer que la famille des suites géométriques $\left((q^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{q \in \mathbb{C}}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (avec la convention $(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1\ 0\ 0\ 0\ \dots)$ quand $q = 0$).

Solution 4. On montre que toute sous-famille finie non vide de la famille $\left((q^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{q \in \mathbb{C}}$ est libre.

Soient $p \geqslant 2$ puis $(q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que les nombres q_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, soient deux à deux distincts. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \left(q_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \dots + \lambda_p \left(q_p^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_1 q_1^n + \dots + \lambda_p q_p^n = 0 \\ &\Rightarrow \forall n \in [\![0, p-1]\!],\ \lambda_1 q_1^n + \dots + \lambda_p q_p^n = 0 \quad (S).\end{aligned}$$

(S) est un système de p équations linéaires homogènes à p inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. (S) s'écrit matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ q_1 & q_2 & \dots & \dots & q_p \\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & \dots & q_p^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ q_1^{p-1} & q_2^{p-1} & \dots & \dots & q_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice A ci-dessus est $\text{Van}(q_1, \dots, q_p)$. Il est non nul car les nombres $q_1, \dots, q_p$, sont deux à deux distincts. Cette matrice A est donc inversible. Par suite, le système (S) admet l'unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$. Ceci montre que la famille $\left(\left(q_1^n\right)^{n\in\mathbb{N}}, \dots, \left(q_p^n\right)^{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre.

On a montré que la famille $\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{q\in\mathbb{C}}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Il y a un lien entre les déterminants de VANDERMONDE et les polynômes de LAGRANGE. Donnons nous $n \in \mathbb{N}^*$ puis $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$. On sait que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un et un seul polynôme de degré n, noté L_i, tel que

$$\forall (i, j) \in [\![0, n]\!],\ L_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

On sait de plus que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

En particulier,

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ X^j = \sum_{i=0}^{n} a_i^j L_i.$$

Le déterminant de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \text{Van}(a_0, a_1, \dots, a_n),$$

car le déterminant d'une matrice carrée est aussi le déterminant de sa transposée.

5 Quelques applications des déterminants

5.1 Inversibilité d'une matrice carrée, bijectivité d'un endomorphisme, indépendance d'une famille de n vecteurs

Dans ce paragraphe, on rappelle des résultats antérieurs et on en profite pour réunir certains résultats disséminés dans les chapitres précédents.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dans $GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :

1- $\det(A) \neq 0$
2-a. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ A \times B = I_n$ et $B \times A = I_n$ (définition de l'inversibilité)
b. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ A \times B = I_n$ (inversible $\Leftrightarrow$ inversible à droite)
c. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) /\ B \times A = I_n$ (inversible $\Leftrightarrow$ inversible à gauche)

3-a. Les colonnes de A constituent une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
b. Les lignes de A constituent une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
4- $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ (où $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})/\ AX = 0\}$).
5-a. $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (où $\mathrm{Im}(A) = \{AX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$).
b. $\mathrm{rg}(A) = n$.
6- $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, a une et une seule solution.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle n puis $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dans $GL(E)$ si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :

1- $\det(f) \neq 0$
2-a. $\exists g \in \mathcal{L}(E)/\ f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_E$ (définition de l'inversibilité)
b. $\exists g \in \mathcal{L}(E)/\ f \circ g = Id_E$ (inversible $\Leftrightarrow$ inversible à droite)
c. $\exists f \in \mathcal{L}(E)/\ g \circ f = Id_E$ (inversible $\Leftrightarrow$ inversible à gauche)
3- L'image par f d'une base de E est une base de E.
4-a. f injectif.
b. $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
5-a. f surjectif.
b. $\mathrm{Im}(f) = E$.
c. $\mathrm{rg}(f) = n$.
6- $\forall b \in E$, l'équation $f(x) = b$ a une solution et une seule dans E.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si l'une des propositions suivantes est vraie :

1- $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$
2- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \in GL_n(\mathbb{K})$
3- $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre
4-a. $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E
b. $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) = n$.

5.2 Inverse d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, on établit une formule qui fournit une bonne fois pour toutes l'inverse d'une matrice carrée inversible.

DÉFINITION 9. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La **comatrice** de A, notée $\mathrm{com}(A)$, est la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, est le cofacteur $A_{i,j}$ de $a_{i,j}$.

$$\mathrm{com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Théorème 21. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \times (\mathrm{com}(A))^T = (\mathrm{com}(A))^T \times A = (\det(A))I_n$.

DÉMONSTRATION .

• Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Le coefficient ligne i, colonne i, de $A \times {}^t(\mathrm{com}(A))$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ ($A_{i,j}$ étant le coefficient ligne j, colonne i, de $(\mathrm{com}(A))^T$). On reconnaît le développement de $\det(A)$ suivant sa i-ème ligne et donc le coefficient ligne i, colonne i, de $A \times {}^t(\mathrm{com}(A))$ est $\det(A)$.

• Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Le coefficient ligne i, colonne j, de $A \times {}^t(\mathrm{com}(A))$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k}$ ($A_{j,k}$ étant le coefficient ligne k, colonne j, de $(\mathrm{com}(A))^T$). On reconnaît le développement suivant la j-ème ligne du déterminant suivant :

$$\begin{array}{cc} \left|\begin{array}{cccc} a_{1,1} & \ldots & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{array}\right| & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \longleftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Les i-ème et j-ème lignes (avec $i \neq j$) de ce déterminant sont égales et donc ce déterminant est nul. Ainsi,

$$A \times (\text{com}(A))^T = (\delta_{i,j}\det(A))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = (\det(A))I_n.$$

On montre de même que $(\text{com}(A))^T \times A = (\det(A))I_n$ (en raisonnant sur les colonnes). ❑

En particulier,

Théorème 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. De plus, en cas d'inversibilité

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{com}(A))^T.$$

Démonstration . On sait déjà que $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Si $\det(A) \neq 0$, alors $A \times \dfrac{1}{\det(A)}(\text{com}(A))^T = I_n$. Par suite, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\text{com}(A))^T$.

❑

Exemple. Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. En développant suivant la dernière ligne, on obtient

$$\det(A) = -2(3 \times 2 - 1 \times 2) = -8 \neq 0.$$

Donc, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, la formule du théorème 22 n'est pas la « formule ultime » pour obtenir l'inverse d'une matrice inversible. On l'utilise très peu et pour les matrices de format $(3,3)$ par exemple, on préfère très souvent inverser une telle matrice en l'interprétant comme une matrice de passage ($\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$).

❑

Avec le théorème 22, on on retrouve le cas particulier de l'inverse d'une matrice carrée de format 2 inversible.

Théorème 23. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. $A \in GL_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. De plus, en cas d'inversibilité

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Pour finir, revenons sur la résolution d'un système d'équations linéaires dans le cas particulier où le système a autant d'équations que d'inconnues. On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right. \quad (S),$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres complexes donnés et les x_i sont des nombres complexes inconnus. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de sorte que le système (S) s'écrit

$$AX = B \quad (E).$$

On sait que cette équation linéaire admet une unique solution dans le cas où la matrice A est inversible :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Le système (S) est alors appelé système de CRAMER. Si, dans le cas général, on note n le nombre d'inconnues, p le nombre d'équations et r le rang de la matrice A, un système de CRAMER est un système tel que $n = p = r$.

On va voir que l'unique solution de l'équation (E)d (ou ce qui revient au même du système (S)) peut être obtenue grâce à des calculs de déterminants. Les formules fournissant cette solution sont connues sous le nom de formules de CRAMER. Ces formules ne sont plus au programme de math sup depuis le dernier changement de programme officiel mais elles s'avèrent très pratiques surtout dans le cas $n = 2$. Nous traitons donc ces formules en exercice. On note $X_0 = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ l'unique solution de l'équation (E) et on note $C_1, \ldots, C_n$, les colonnes de la matrice A :

Exercice 5. (formules de CRAMER).

1) a) Montrer que $B = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j C_j$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ où $\Delta_i = \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n)$ et $\Delta = \det(C_1, \ldots, C_n) = \det(A)$ (Δ est appelé le déterminant du système (S)).

2) Application : résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{array}\right.$ d'inconnues x, y et z en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m.

Solution 5.

1) a) Par définition de X_0,

$$B = AX_0 = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j.$$

b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \det\left(C_1, \ldots, C_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n) \text{ (par linéarité par rapport à la } i-\text{ème colonne)} \\ &= x_i \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n) + \sum_{j\neq i} x_j \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n)\end{aligned}$$

Maintenant, si $j \neq i$, deux des colonnes du déterminant $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n)$ sont identiques, à savoir la i-ème colonne et la j-ème colonne. Donc, si $j \neq i$, $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots, C_n) = 0$. Il reste $\Delta_i = x_i \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n) = x_i\Delta$ et donc, en tenant compte de $\Delta \neq 0$,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

2) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système (S). Le déterminant du système (S) est :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = 2(m(m-5) - 6) + (3(m-5) - 3) + 7(6 - m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6).$$

Le système est de Cramer si et seulement si $m \in \{1, 6\}$.

• Si $m \notin \{1, 6\}$, les formules de Cramer fournissent alors :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{4(m^2-5m-6)-5(3m-18)-7(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1}$$
$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(5m-39))+(4m-27)+21}{2(m-1)(m-6)} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1}$$
$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{2(7m-15)+9+7(-4m+15)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

Si $m \notin \{1, 6\}$, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2m-9}{m-1}, \frac{7}{m-1}, -\frac{7}{m-1}\right)\right\}$.

• Si $m = 1$,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+y+2z=5 \\ 7x+3y-4z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-3y+4 \\ -x+y+2(-2x-3y+4)=5 \\ 7x+3y-4(-2x-3y+4)=7 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-3y+4 \\ -5x-5y=-3 \\ 15x+15y=23 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-3y+4 \\ 15x+15y=9 \\ 15x+15y=23 \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, le système (S) n'a pas de solution : si $m = 1$, $\mathcal{S} = \varnothing$.

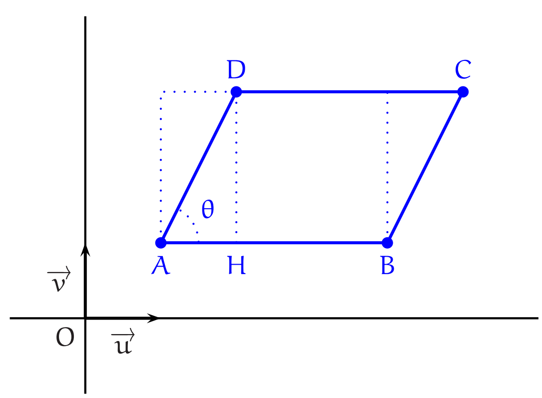
• Si $m = 6$,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+6y+2z=5 \\ 7x+3y+z=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-3y+4 \\ -x+6y+2(-2x-3y+4)=5 \\ 7x+3y+(-2x-3y+4)=7 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-3y+4 \\ -5x=-3 \\ 5x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/5 \\ z=-3y+14/5 \end{array}\right.$$

Si $m = 6$, le système (S) admet une infinité de triplets solutions à savoir : $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{5}, y, -3y+\frac{14}{5}\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$.

5.3 Calculs d'aires et de volumes

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On se donne quatre points A, B, C et D deux à deux distincts tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.



L'aire du parallélogramme $ABCD$ est $AB \times HD = AB \times AD \times \sin\theta = AB \times AD \times \sin\left(\widehat{BAD}\right)$.

L'**aire algébrique** du parallélogramme $ABCD$ (aire affectée d'un signe tenant compte du fait que l'on aille de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AD}$ dans le sens direct ou indirect) est

$$AB \times AD \times \sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right).$$

Soient alors M et M' deux points du plan, tous deux distincts de O, d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$$\overline{z} \times z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - yx') = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} + i\ \det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right).$$

Mais d'autre part, en posant $\theta = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $\theta' = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$,

$$\overline{z} \times z' = |z|e^{-i\theta}|z'|e^{i\theta'} = OM\ OM'\ e^{i(\theta'-\theta)} = OM\ OM' \cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) + i\ OM\ OM' \sin\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right).$$

Donc,

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = OM\ OM' \cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \text{ et } \det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = OM\ OM' \sin\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right).$$

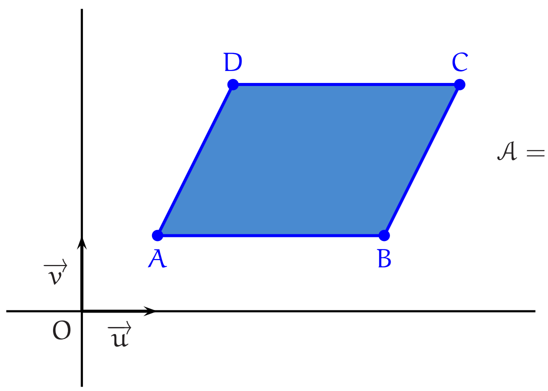
L'aire algébrique du parallélogramme $ABCD$ est donc

$$AB \times AD \times \sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right),$$

et son aire géométrique (aire algébrique sans son signe) est

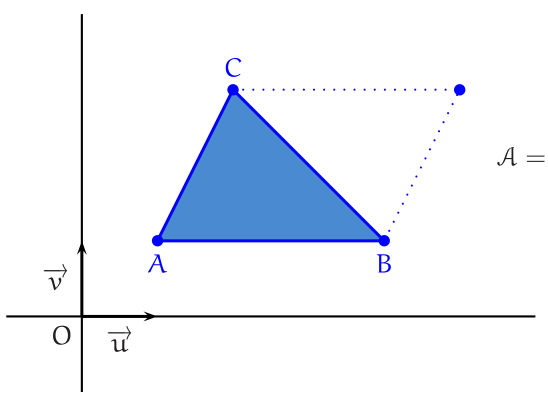
$$\mathcal{A} = \left|\det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

En résumé,



$$\mathcal{A} = \left|\det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$$

Puisque l'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme, on a aussi



$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$$

On montre de même que le volume algébrique d'un parallélépipède $ABCDEFGH$, dans l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est

$$\mathcal{V} = \det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right),$$

le volume géométrique étant la valeur absolue de ce déterminant.