Fiche n° 28. Probabilités

I Univers. Evénéments

A Expériences aléatoires

Définition 1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît toutes les **issues** ou encore tous les résultats possibles mais dont on ne peut prévoir le résultat que l'on obtient effectivement.

B L'ensemble des issues : l'univers

Définition 2

L'**univers** associé à une certaine expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire. Le choix d'un univers est arbitraire et est le résultat d'une **modélisation** de l'expérience aléatoire.

C Evénements

Définition 3

Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire.

Un **événement** est une partie de l'univers Ω.

Quand une issue appartient à un événement A, on dit que cette issue est une **réalisation** de l'événement A ou encore que cette issue **réalise** l'événement A.

Définition 4

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

L'**événement impossible** est $\varnothing$. L'**événement certain** est Ω.

Définition 5

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

Un événement constitué d'une seule issue s'appelle un **événement élémentaire**.

Définition 6

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. Soient A et B deux événements.

La **réunion des événements A et B** est l'ensemble des issues qui appartiennent à au moins un des deux événements A ou B. Elle se note $A \cup B$ (ce qui se lit A union B).
L'**intersection des événements A et B** est l'ensemble des issues qui appartiennent aux deux événements A et B. Elle se note $A \cap B$ (ce qui se lit A inter B).

Définition 7

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. Soient A et B deux événements.

Les événements A et B sont **disjoints** ou aussi **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Définition 8

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. Soit A un événement.

L'**événement contraire de A** est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à A. Il se note $\overline{A}$ (ce qui se lit A barre) ou aussi $\Omega \setminus A$ (ce qui se lit Ω privé de A).

II Probabilités

A Définition d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement

Définition 9

Soit Ω un univers associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose que Ω est constitué de n issues où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose donc $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ où $e_1, \ldots, e_n$, sont les n issues.

Définir une **loi de probabilité** sur Ω consiste à associer à chacun des n événements élémentaires $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, $\ldots$, $\{e_n\}$, n nombres $p_1, \ldots, p_n$, tels que

1) p_1 est par définition la probabilité de $\{e_1\}$, p_2 est par définition la probabilité de $\{e_2\}$, $\ldots$, p_n est par définition la probabilité de $\{e_n\}$,
2) $0 \leqslant p_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant p_2 \leqslant 1$, $\ldots$, $0 \leqslant p_n \leqslant 1$,
3) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Définition 10

Soit Ω un univers (fini) associé à une certaine expérience aléatoire. Soit A un événement (c'est-à-dire une partie de Ω).

Si A n'est pas vide (ou encore si A n'est pas l'événement impossible), la probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.

Si A est vide, la probabilité de A est 0.

Dans tous les cas, la probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

B La loi équirépartie

Définition 11

Soit Ω un univers fini à n éléments associé à une certaine expérience aléatoire. Soit p_1, p_2, $\ldots$, p_n, une loi de probabilité sur Ω.

Cette loi de probabilité est **équirépartie** si et seulement si les événements élémentaires sont **équiprobables** ce qui équivaut à $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$.

Théoreme 1

Soit Ω un univers fini à n éléments associé à une certaine expérience aléatoire. Soit p_1, p_2, $\ldots$, p_n, une loi de probabilité équirépartie sur Ω.

Alors $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$.

Théoreme 2

Soit Ω un univers fini à n éléments associé à une certaine expérience aléatoire. Soit p_1, p_2, $\ldots$, p_n, une loi de probabilité **équirépartie** sur Ω.

Soient A un événement puis k le nombre d'issues réalisant l'événement A (ou encore le nombre d'éléments de A). La probabilité de A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{k}{n}.$$

Les issues sont souvent appelées « les cas possibles » et les issues réalisant l'événement A sont aussi appelées « les cas favorables ». La formule donnant la probabilité d'un événement A dans le cas d'une loi équirépartie s'écrit encore :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

C Propriétés des probabilités

Théoreme 3

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Alors, $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

Théoreme 4

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Soient A et B deux événements disjoints (ou encore incompatibles). Alors, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Théoreme 5

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Soit A un événement. Alors, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

Théoreme 6

Soit Ω un univers fini associé à une certaine expérience aléatoire. On suppose Ω muni d'une loi de probabilité quelconque.

Soient A et B deux événements. Alors, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.