Planche n° 27. Polynômes. Corrigé

Exercice n° 1

Soit $n \geqslant 2$.

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i}\left(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}\right) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{-2ik\pi/n}\right).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\ldots+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{n-1} = i^{n-1},$$

et donc $\dfrac{1}{(2i)^{n-1}} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Il reste à calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{-2ik\pi/n}\right)$.

1ère solution. Les $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont les $n-1$ racines n-èmes de 1 distinctes de 1.
Puisque $X^n - 1 = (X-1)\left(1 + X + \ldots + X^{n-1}\right)$, ce sont donc les $n-1$ racines deux deux distinctes du polynôme $1 + X + \ldots + X^{n-1}$. Par suite,

$$1 + X + \ldots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{-2ik\pi/n}\right) = P.$$

En particulier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = P(1) = 1 + 1\ldots + 1 = n$.

2ème solution. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, posons $z_k = 1 - e^{-2ik\pi/n}$. Les nombres z_k sont deux à deux distincts et non nuls. De plus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $(1 - z_k)^n = 1$. Les nombres z_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont $n-1$ racines deux à deux distincts et non nulles du polynôme

$$\begin{aligned}(1-X)^n - 1 &= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}X^{n-1} + \ldots - \binom{n}{n-1}X + 1 - 1 \\ &= -X\left((-1)^{n-1}X^{n-1} + (-1)^{n-2}nX^{n-2} + \ldots + n\right),\end{aligned}$$

et donc sont les $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme $P = (-1)^{n-1}X^{n-1} + \ldots + n$ de degré $n-1$. D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé (obtenues en développant $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k)$ puis en identifiant les coefficients avec ceux de $(-1)^{n-1}X^{n-1} + \ldots + n$)

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1}\frac{n}{(-1)^{n-1}} = n.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.}$$

Exercice n° 2

Soit $n \geqslant 2$. Tout d'abord

$$Q = (1 + X + \ldots + X^n)' = \left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - \left(X^{n+1}-1\right)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, $\omega_0 = 1$ et donc, $Q(\omega_0) = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Puis, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\omega_k \neq 1$ et donc, puisque $\omega_k^n = 1$,

$$Q(\omega_k) = \frac{n\omega_k^{n+1} - (n+1)\omega_k^n + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n\omega_k - (n+1) + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n}{\omega_k - 1}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k - 1)}.$$

Mais, $X^n - 1 = (X-1)\left(1 + X + \ldots + X^{n-1}\right)$ et d'autre part $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right) = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega_k)$. On en déduit que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$.

En particulier, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega_k) = 1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-1} = n$ ou encore $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k - 1) = (-1)^{n-1}n$. Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n^n(n+1)}{2}\frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.}$$

Exercice n° 3

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout réel a,

$$e^{i(2p+1)a} = (\cos a + i\sin a)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{j}\cos^{2p+1-j} a (i\sin a)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)a) = \operatorname{Im}\left(e^{i(2p+1)a}\right) = \sum_{j=0}^{p}\binom{2p+1}{2j+1}\cos^{2(p-j)} a(-1)^j\sin^{2j+1} a.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, en posant $a = \dfrac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \sum_{j=0}^{p}\binom{2p+1}{2j+1}\cos^{2(p-j)}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)(-1)^j\sin^{2j+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = 0.$$

Ensuite, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\sin^{2p+1}\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right) \neq 0$. En divisant les deux membres de $(*)$ par $\sin^{2p+1}\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{2p+1}{2j+1}\operatorname{cotan}^{2(p-j)}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = 0.$$

Maintenant, les p nombres $\operatorname{cotan}^2\dfrac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts. En effet, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \dfrac{\pi}{2}$. Or, sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan} x$ est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction $x \mapsto \operatorname{cotan}^2 x$ est strictement décroissante et en particulier injective.

Ces p nombres deux à deux distincts sont racines du polynôme $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{2p+1}{2j+1}X^{p-j}$, qui est de degré p. Ce sont donc toutes les racines de P (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-\dbinom{2p+1}{3}}{\dbinom{2p+1}{1}} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

puis,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p} \left(1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2) Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. De plus, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2,$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$. La suite (u_n) est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite (u_n) converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3) Pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \tan x - x$. f et g sont dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 - \cos x$ et $g'(x) = \tan^2 x$. f' et g' sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc f et g sont strictement croissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que f et g sont strictement positives sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin x < x < \tan x$ et par passage à l'inverse $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cotan x < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sin x}$ puis $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cotan^2 x < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

4) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cotan^2 \dfrac{k\pi}{2p+1} < \left(\dfrac{2p+1}{k\pi}\right)^2 < \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2p+1}}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{p(2p-1)}{3} = \sum_{k=1}^{p} \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < \sum_{k=1}^{p} \frac{(2p+1)^2}{\pi^2 k^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2p+1}} = \frac{2p(p+1)}{3},$$

puis

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2} < u_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ quand p tend vers l'infini et donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_p) tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice n° 4

- $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7 = (X^6 + 8X^3 + 7) - (7X^4 + 7X) = (X^3+1)(X^3+7) - 7X(X^3+1) = (X^3+1)(X^3 - 7X + 7)$.
- $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7 = 3X^2(X^3+1) - 7(X^3+1) = (X^3+1)(3X^2-7)$. Donc,

$$\text{PGCD}\left(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7, 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7\right) = \left(X^3+1\right)\text{PGCD}\left(X^3 - 7X + 7, 3X^2 - 7\right).$$

Maintenant, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)^3 - 7\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) + 7 = -\varepsilon\dfrac{14}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}} + 7 \neq 0$.

Les polynômes $X^3 - 7X + 7$ et $3X^2 - 7$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ et sont donc premiers entre eux. Par suite,

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{PGCD}\left(X^6-7X^4+8X^3-7X+7, 3X^5-7X^3+3X^2-7\right)=X^3+1.}$$

Exercice n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2+X+1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &(\text{car } (X+1)^n - X^{n-1} \text{ est dans } \mathbb{R}[X])\\ &\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0.\end{aligned}$$

- Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
- Si $n \in 1+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
- Si $n \in 2+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
- Si $n \in 3+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
- Si $n \in 4+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.
- Si $n \in 5+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.

En résumé, $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 si et seulement si n est dans $(1+6\mathbb{Z}) \cup (5+6\mathbb{Z})$.

Exercice n° 6

Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Pour tout réel x, on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les a_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_i des entiers naturels et les $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.

Tout d'abord, pour tout réel x, $\displaystyle\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinômes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)

Donc, $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \geqslant 0)$.

Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x) \geqslant 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en a_i, ce qui contredit l'hypothèse faite sur P. Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs. Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

Posons $A = \sqrt{\lambda}\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite $Q_1 = \displaystyle\prod_{j=1}^{l}(x-z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \displaystyle\prod_{j=1}^{l}(x-\overline{z_j})^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$ puis

$$P = A^2Q_1Q_2 = A^2(B+iC)(B-iC) = A^2(B^2+C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

Exercice n° 7

Si P est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair. Sinon, posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$.

$$\begin{aligned}P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left((P(X))^k - X^k\right) + (P(X) - X)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k\left((P(X))^k - X^k\right) + (P(X) - X).\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Mais, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $(P(X))^k - X^k) = (P(X) - X)\left((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + \ldots + X^{k-1}\right)$ est divisible par $P(X) - X$ et il en est donc de même de $P(P(X)) - X$.

Exercice n° 8

1) Posons $P = \sum_{i=0}^{l} a_i X_i$ où $l \geqslant 1$ et où les a_i sont des entiers relatifs avec $a_l \neq 0$. D'après la formule du binôme de Newton, il existe des entiers relatifs K_i, $0 \leqslant i \leqslant l$, tels que

$$P(n+km) = \sum_{i=0}^{l} a_i(n+km)^i = \sum_{i=0}^{l} a_i(n^i + K_i m) = \sum_{i=0}^{l} a_i n^i + Km = m + Km = m(K+1),$$

où K est un entier relatif. $P(n+km)$ est donc un entier relatif multiple de $m = P(n)$.

2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est premier.

Soit n un entier naturel donné et $m = P(n)$ (donc, $m \geqslant 2$ et en particulier $m \neq 0$). Pour tout entier relatif k, $P(n+km)$ est divisible par m mais $P(n+km)$ est un nombre premier ce qui impose $P(n+km) = m$. Par suite, le polynôme $Q = P - m$ admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque $m \neq 0$) et est donc le polynôme nul ou encore P est constant.

Par contraposition, si P non constant, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ n'est pas un nombre premier.

Exercice n° 9

1) Déjà, P_0 est dans E.

Soit n un naturel non nul. $P_n = \dfrac{1}{n!}(X+1)\ldots(X+n)$ et donc, si k est élément de $[\![-n, -1]\!]$, $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Si k est un entier positif, $P_n(k) = \dfrac{1}{n!}(k+1)\ldots(k+n) = \dbinom{n+k}{n} \in \mathbb{Z}$.

Enfin, si k est un entier strictement plus petit que $-n$,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\ldots(k+n) = (-1)^n \frac{1}{n!}(-k-1)\ldots(-k-n) = (-1)^n \binom{-k-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z},\ P_n(k) \in \mathbb{Z}$, ou encore $P_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2) Une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est donc dans E.

3) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$ (si P est nul, P est combinaison linéaire à coefficients entiers des P_k).

Puisque $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(P_k) = k$, on sait que pour tout entier naturel n, tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Soit $n = \deg(P)$. Il existe $n+1$ nombres complexes a_0,..., a_n tels que $P = a_0P_0 + \ldots + a_nP_n$. Il reste à montrer que les a_i sont des entiers relatifs.

- La phrase « $P(-1)$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : a_0 est dans $\mathbb{Z}$.
- La phrase « $P(-2)$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : $a_0 - a_1$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_1 est dans $\mathbb{Z}$.
- La phrase « $P(-3)$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : $a_0 - 2a_1 + a_2$ est dans $\mathbb{Z}$ et donc a_2 est dans $\mathbb{Z}$...
- La phrase « $P(-(k+1))$ est dans $\mathbb{Z}$ » fournit : $a_0 - ka_1 + \ldots + (-1)^k a_k$ est dans $\mathbb{Z}$ et si par hypothèse de récurrence, a_0,..., a_{k-1} sont des entiers relatifs alors a_k l'est encore.

Tous les coefficients a_k sont des entiers relatifs et E est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_k.

Exercice n° 10

On prend $n \geqslant 2$ (sinon tout est clair).
$Q = \left(X - e^{ia}\right)\left(X - e^{-ia}\right)$ est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq e^{-ia}$ ou encore $e^{2ia} \neq 1$ ou enfin, $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$ alors, $P = 0 = 0 \times Q$.

2ème cas. Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, d'après la formule de Moivre

$$\begin{aligned} P\left(e^{ia}\right) &= \sin a(\cos(na) + i\sin(na)) - \sin(na)(\cos a + i\sin a) + \sin((n-1)a) \\ &= \sin((n-1)a) - (\sin(na)\cos a - \cos(na)\sin a) = 0. \end{aligned}$$

Donc, e^{ia} est racine de P et de même, puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} est racine de P. P est donc divisible par Q.

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

$$P = P - P(e^{ia}) = \sin a\left(X^n - e^{ina}\right) - \sin(na)\left(X - e^{ia}\right) = \left(X - e^{ia}\right)\left(\sin a\sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k}e^{ika} - \sin(na)\right)$$
$$= \left(X - e^{ia}\right)S.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
S &= S - S(e^{-ia}) = \sin a\sum_{k=0}^{n-1} e^{ika}\left(X^{n-1-k} - e^{-i(n-1-k)a}\right)\\
&= \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{k=0}^{n-2} e^{ika}\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j}e^{-ija}\right)\\
&= \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{k=0}^{n-2}\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{n-2-k-j}e^{i(k-j)a}\right) = \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{l=0}^{n-2}\left(\sum_{k+j=l} e^{i(k-j)a}\right)X^{n-2-l}\\
&= \sin a\left(X - e^{-ia}\right)\sum_{l=0}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)a}\right)X^{n-2-l}
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{l} e^{i(2k-l)a} = e^{-ila}\frac{1 - e^{2i(l+1)a}}{1 - e^{2ia}} = \frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}.$$

Donc

$$S = \sin a(X - e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\frac{\sin((l+1)a)}{\sin a}X^{n-2-l} = (X - e^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\sin((l+1)a)X^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})\sum_{k=0}^{n-2}\sin((k+1)a)X^{n-2-k} = (X^2 - 2X\cos a + 1)\sum_{k=0}^{n-2}\sin((k+1)a)X^{n-2-k}.$$

Exercice n° 11

Soit P un polynôme de degré n supérieur ou égal à 2.
Posons $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}(X - z_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{P}{X - z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X - z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans $\mathbb{C}$. Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z - z_k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{z - z_k}}{|z - z_k|^2} = \overline{\sum_{k=1}^{n}\frac{z - z_k}{|z - z_k|^2}}\quad (*).$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\lambda_k = \dfrac{\dfrac{1}{|z - z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|z - z_j|^2}$. Chaque λ_k est un réel strictement positif et de plus

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k|^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|z-z_j|^2} = 1.$$

En conjuguant les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|z-z_j|^2}\right)z = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k|^2}z_k$ et donc,

$$z = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k.$$

Exercice n° 12

$$\begin{aligned}
P = X^6 - 2X^3\cos a + 1 &= \left(X^3 - e^{ia}\right)\left(X^3 - e^{-ia}\right)\\
&= \left(X - e^{ia/3}\right)\left(X - je^{ia/3}\right)\left(X - j^2e^{ia/3}\right)\left(X - e^{-ia/3}\right)\left(X - je^{-ia/3}\right)\left(X - j^2e^{-ia/3}\right)\\
&= \left(X^2 - 2X\cos\frac{a}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{a}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right).
\end{aligned}$$

Il reste à se demander : 1) si les facteurs précédents sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et 2) si ces facteurs sont deux à deux distincts.

Les trois facteurs de degré 2 ont un discriminant réduit du type $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$ et Δ' est nul si et seulement si α est dans $\pi\mathbb{Z}$.

Les cas particuliers sont donc ($\dfrac{a}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = 0$) et ($\dfrac{a+2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a = \pi$) et ($\dfrac{a-2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ ce qui n'a pas de solution dans $[0,\pi]$).

1er cas. Si $a = 0$.

$$P = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1) = (X-1)^2(X^2 + X + 1)^2.$$

2ème cas. Si $a = \pi$, en remplaçant X par $-X$ on obtient :

$$P = (X+1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

3ème cas. Si a est dans $]0,\pi[$, les trois facteurs de degré 2 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$. D'autre part, e^{ia} et e^{-ia} sont distincts et donc n'ont pas de racine cubique en commun. Les trois facteurs de degré 2 sont deux à deux distincts. Dans ce cas,

$$P = \left(X^2 - 2X\cos\frac{a}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{a+2\pi}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{a-2\pi}{3} + 1\right).$$

Exercice n° 13

Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P + 10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P+10)' = P'$ d'ordre au moins deux.
De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un complexe λ tel que $P' = \lambda(X-2)^2(X+2)^2 = \lambda\left(X^2-4\right)^2 = \lambda\left(X^4 - 8X^2 + 16\right)$ et enfin, nécessairement,

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 /\ P = \lambda\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Réciproquement, soit $P = \lambda\left(\dfrac{1}{5}X^5 - \dfrac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu$ avec $\lambda \neq 0$.

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}
\text{P solution} &\Leftrightarrow \text{P}+10 \text{ divisible par } (\text{X}+2)^3 \text{ et } \text{P}-10 \text{ est divisible par } (\text{X}-2)^3\\
&\Leftrightarrow \text{P}(-2)+10=0=\text{P}'(-2)=\text{P}''(-2) \text{ et } \text{P}(2)+10=0=\text{P}'(2)=\text{P}''(2)\\
&\Leftrightarrow \text{P}(-2)=-10 \text{ et } \text{P}(2)=10\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda\left(-\dfrac{32}{5}+\dfrac{64}{3}-32\right)+\mu=-10\\ \lambda\left(\dfrac{32}{5}-\dfrac{64}{3}+32\right)+\mu=10\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \mu=0 \text{ et } \lambda\left(\dfrac{32}{5}-\dfrac{64}{3}+32\right)=10\\
&\Leftrightarrow \mu=0 \text{ et } \lambda=\dfrac{75}{128}
\end{aligned}$$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir $\text{P}=\dfrac{75}{128}\left(\dfrac{1}{5}\text{X}^5-\dfrac{8}{3}\text{X}^3+16\text{X}\right)=\dfrac{15}{128}\text{X}^5-\dfrac{25}{16}\text{X}^3+\dfrac{75}{8}\text{X}$.

Exercice n° 14

Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont 0 et 1 car $\lambda=\lambda\times\lambda\Leftrightarrow\lambda\in\{0,1\}$.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que $\text{P}(\text{X}^2)=\text{P}(\text{X})\text{P}(\text{X}+1)$.
Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Alors, a^2, a^4, a^8..., sont encore racines de P. Mais, P étant non nul, P ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite $\left(a^{(2^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose $a=0$ ou $|a|=1$ car si $|a|\in]0,1[\cap]1,+\infty[$, la suite $\left(\left|a^{(2^n)}\right|\right)$ est strictement monotone et en particulier les $a^{(2^n)}$ sont deux à deux distincts.

De même, si a est racine de P alors $(a-1)^2$ l'est encore mais aussi $(a-1)^4$, $(a-1)^8$..., ce qui impose $a=1$ ou $|a-1|=1$.

En résumé,

$$\begin{aligned}
(a \text{ racine de P dans } \mathbb{C}) &\Rightarrow ((a=0 \text{ ou } |a|=1) \text{ et } (a=1 \text{ ou } |a-1|=1))\\
&\Rightarrow (a=0 \text{ ou } a=1 \text{ ou } |a|=|a-1|=1).
\end{aligned}$$

Maintenant, $|a|=|a-1|=1\Leftrightarrow|a|=1$ et $|a|=|a-1|\Leftrightarrow a\in\mathscr{C}((0,0),1)\cap\text{med}[(0,0),(1,0)]=\{-j,-j^2\}$.

Donc, si $\text{P}\in\mathbb{R}[\text{X}]$ est solution, il existe K, α, β, γ, K complexe non nul et α, β et γ entiers naturels tels que

$$\text{P}=\text{K}\text{X}^\alpha(\text{X}-1)^\beta(\text{X}+j)^\gamma(\text{X}+j^2)^\gamma=\text{K}\text{X}^\alpha(\text{X}-1)^\beta(\text{X}^2-\text{X}+1)^\gamma$$

($-j$ et $-j^2$ devant avoir même ordre de multiplicité puisque P est à coefficients réels).

Réciproquement, si $\text{P}=\text{K}\text{X}^\alpha(\text{X}-1)^\beta(\text{X}^2-\text{X}+1)^\gamma$.

$$\begin{aligned}
\text{P}(\text{X}^2)&=\text{K}\text{X}^{2\alpha}(\text{X}^2-1)^\beta(\text{X}^4-\text{X}^2+1)^\gamma=\text{K}\text{X}^{2\alpha}(\text{X}^2-1)^\beta(\text{X}^4+2\text{X}^2+1-3\text{X}^2)^\gamma\\
&=\text{K}\text{X}^{2\alpha}(\text{X}-1)^\beta(\text{X}+1)^\beta(\text{X}^2-\sqrt{3}\text{X}+1)^\gamma(\text{X}^2+\sqrt{3}\text{X}+1)^\gamma,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{P}(\text{X})\text{P}(\text{X}+1)&=\text{K}\text{X}^\alpha(\text{X}-1)^\beta(\text{X}^2-\text{X}+1)^\gamma\text{K}(\text{X}+1)^\alpha\text{X}^\beta(\text{X}^2+\text{X}+1)^\gamma\\
&=\text{K}^2\text{X}^{\alpha+\beta}(\text{X}-1)^\beta(\text{X}+1)^\alpha(\text{X}^2-\text{X}+1)^\gamma(\text{X}^2+\text{X}+1)^\gamma.
\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul, P est solution si et seulement si $\text{P}=0$ ou $\text{K}=1$ et $\alpha=\beta$ et $\gamma=0$.

Les polynômes solutions sont 0 et les $(\text{X}^2-\text{X})^\alpha$ où α est un entier naturel quelconque.

Exercice n° 15

a est solution du problème si et seulement si $\text{X}^5-209\text{X}+a$ est divisible par un polynôme de la forme $\text{X}^2+\alpha\text{X}+1$. La division euclidienne de $\text{X}^5-209\text{X}+a$ par $\text{X}^2+\alpha\text{X}+1$ s'écrit

$$\text{X}^5-209\text{X}+a=(\text{X}^2+\alpha\text{X}+1)(\text{X}^3-\alpha\text{X}^2+(\alpha^2-1)\text{X}-(\alpha^3-2\alpha))+(\alpha^4-3\alpha^2-208)\text{X}+a+(\alpha^3-2\alpha).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}/ \left\{\begin{array}{l}\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0\\ a = -\alpha^3 + 2\alpha\end{array}\right.$. Mais,

$$\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \in \{-13, 16\} \Leftrightarrow \alpha \in \left\{-4, 4, i\sqrt{13}, -i\sqrt{13}\right\}$$

et la deuxième équation fournit $a \in \left\{56, -56, 15i\sqrt{13}, -15i\sqrt{13}\right\}$.

Exercice n° 16

On note que $P(1) = 1 \neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k + 2}{a_k - 1} = \sum_{k=1}^{5} \left(1 + \frac{3}{a_k - 1}\right) = 5 - 3\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{1 - a_k} = 5 - 3\frac{P'(1)}{P(1)} = 5 - 3 \times \frac{12}{1} = -31.$$

Exercice n° 17

Notons (S) le système proposé.

$$\begin{aligned}
(S) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1\\ \dfrac{xy + xz + yz}{xyz} = 1\\ xyz = -4\end{array}\right. \Leftrightarrow \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = \sigma_3 = -4\\
&\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0\\
&\Leftrightarrow x,\ y \text{ et } z \text{ sont les trois solutions de l'équation } (X-1)(X-2)(X+2) = 0\\
&\Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(1, 2, -2), (1, -2, 2), (2, 1, -2), (2, -2, 1), (-2, 1, 2), (-2, 2, 1)\}
\end{aligned}$$

Exercice n° 18

Le polynôme nul est solution. Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 1 ne convient pas.
Soit P un polynôme non nul solution de degré $n \geqslant 2$. Alors $n = n - 1 + n - 2$ et donc $n = 3$. Posons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(2X) = P'(X)P''(X) &\Leftrightarrow 8aX^3 + 4bX^2 + 2cX + d = (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b)\\
&\Leftrightarrow (18a^2 - 8a)X^3 + (18ab - 4b)X^2 + (4b^2 + 6ac - 2c)X + 2bc - d = 0\\
&\Leftrightarrow 18a^2 - 8a = 18ab - 4b = 4b^2 + 6ac - 2c = 2bc - d = 0\\
&\Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \text{ et } b = c = d = 0 \text{ (car } a \neq 0).
\end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et $\frac{4}{9}X^3$.

Exercice n° 19

1) Puisque $a_0 \neq 0$, 0 n'est pas racine de P.

Soient p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que PGCD$(p, q) = 1$ puis $r = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned}
P(r) = 0 &\Rightarrow a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_np^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}\right)\\ a_0q^n = p\left(-a_np^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \ldots - a_1q^{n-2}\right)\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

La première égalité montre que q divise a_np^n. Mais q est premier à p et donc q est premier à p^n. D'après le théorème de Gauss, q divise a_n.

De même, la deuxième égalité montre que p divise a_0.

2) 0 n'est pas racine de P.
Soit $r = \frac{p}{q}$, ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, PGCD$(p, q) = 1$) une éventuelle racine racine rationnelle de P. Alors, p divise 4 et q divise 12 et donc, p est élément de $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$ et q est élément de $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ou encore r est élément de $\left\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}\right\}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Réciproquement, on trouve $P\left(\frac{2}{3}\right)=P\left(\frac{1}{4}\right)=0$. P est donc divisible par

$$12\left(X-\frac{2}{3}\right)\left(X-\frac{1}{4}\right)=(3X-2)(4X-1)=12X^2-11X+2.$$

Plus précisément, $P=\left(12X^2-11X+2\right)\left(X^2+X+2\right)=(3X-2)(4X-1)\left(X-\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)$.

Exercice n° 20

Pour $n\geqslant 0$, posons $P_n=(X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$. $P_n(0)=P_n(1)=P_n\left(\frac{1}{2}\right)=0$. P_n admet 0, 1 et $\frac{1}{2}$ pour racines et est donc divisible par $X(X-1)(2X-1)=2X^3-3X^2+X$.

Si $n=0$ ou $n=1$, le quotient est nul. Si $n=2$, le quotient vaut -2.

Soit $n\geqslant 3$. On met successivement $2X-1$ puis $X-1$ puis X en facteur :

$$\begin{aligned}
P_n&=\left((X-1)^2\right)^n-\left(X^2\right)^n+(2X-1)=\left((X-1)^2-X^2\right)\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)}+(2X-1)\\
&=(2X-1)\left(-\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)}+1\right)=(2X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)}+1-X^{2n-2}\right)\\
&=(2X-1)\left(-(X-1)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}-(X-1)\sum_{k=0}^{2n-1}X^k\right)\\
&=(2X-1)(X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}-\sum_{k=0}^{2n-1}X^k\right)\\
&=(2X-1)(X-1)\left(-\left(\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}\right)-\left(\sum_{k=1}^{2n-1}X^k\right)-1-(X-1)^{2n-3}\right)\\
&=(2X-1)(X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)}-\sum_{k=1}^{2n-1}X^k-\sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}\binom{2n-3}{k}X^k\right)\\
&=X(2X-1)(X-1)\left(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2n-2k-3}-\sum_{k=1}^{2n-1}X^{k-1}-\sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}\binom{2n-3}{k}X^{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Exercice n° 21

1)

$$\begin{aligned}
1=(X+(1-X))^{2n-1}&=\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k}+\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k}\\
&=(1-X)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}+X^n\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}
\end{aligned}$$

Soient $U=\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}$ et $V=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n+V(1-X)^n=1$. De plus, pour $n\leqslant k\leqslant 2n-1$, $\deg\left(X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}\right)=k-n+2n-1-k=n-1<n$ et donc $\deg(U)<n$ et de même pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\deg\left(X^k(1-X)^{n-1-k}\right)=k+n-1-k=n-1<n$ et $\deg(V)<n$.

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

2)

$$\begin{aligned}
1=(X+(1-X))^{n+m-1}&=\sum_{k=0}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k}+\sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&=(1-X)^m\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}+X^n\sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}.
\end{aligned}$$

Soient $U=\displaystyle\sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}$ et $V=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n+V(1-X)^m=1$. De plus, pour $n\leqslant k\leqslant n+m-1$, $\deg\left(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}\right)=k-n+n+m-1-k=m-1<m$ et donc $\deg(U)<m$ et de même pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\deg\left(X^k(1-X)^{n-1-k}\right)=k+n-1-k=n-1<n$ et $\deg(V)<n$.

Exercice n° 22

Soit $n\geqslant 2$ le degré de P.

1) a) Si P admet n racines réelles simples, le théorème de Rolle fournit au moins $n-1$ racines réelles deux à deux distinctes pour P'. Mais, puisque P' est de degré $n-1$, ce sont toutes les racines de P', nécessairement toutes réelles et simples.

b) Le résultat tombe en défaut si les racines de P ne sont pas toutes réelles. Par exemple, $P=X^3-1=(X-1)(X-j)(X-j^2)$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ mais $P'=3X^2$ admet une racine double.

2) Séparons les racines simples et les racines multiples de P. Posons $P=(X-a_1)...(X-a_k)(X-b_1)^{\alpha_1}...(X-b_l)^{\alpha_l}$ où les a_i et les b_j sont $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et les α_j des entiers supérieurs ou égaux à 2 (éventuellement $k=0$ ou $l=0$ et dans ce cas le produit vide vaut conventionnellement 1).

P s'annule déjà en $k+l$ nombres réels deux à deux distincts et le théorème de Rolle fournit $k+l-1$ racines réelles deux à deux distinctes et distinctes des a_i et des b_j. D'autre part, les b_j sont racines d'ordre α_j de P et donc d'ordre α_j-1 de P'. On a donc trouvé un nombre de racines (comptées en nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) égal à $k+l-1+\displaystyle\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j-1)=k+\left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\right)-1=n-1$ racines réelles et c'est fini.

Exercice n° 23

Pour k élément de $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, posons $x_k=\sin\dfrac{k\pi}{7}$ (les x_k sont deux à deux opposés). Il faut calculer les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned}
P&=\left(X-\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(X-\sin\frac{2\pi}{7}\right)\left(X-\sin\frac{3\pi}{7}\right)\left(X+\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(X+\sin\frac{2\pi}{7}\right)\left(X+\sin\frac{3\pi}{7}\right)\\
&=\left(X^2-\sin^2\frac{\pi}{7}\right)\left(X^2-\sin^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(X^2-\sin^2\frac{3\pi}{7}\right)\\
&=\left(X^2-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\right)\left(X^2-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\right)\left(X^2-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)\right)\\
&=\frac{1}{8}Q\left(-2X^2+1\right)
\end{aligned}$$

où $Q(Y)=\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}-Y\right)\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}-Y\right)\left(\cos\dfrac{8\pi}{7}-Y\right)$.

Posons $\omega=e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}&=\frac{1}{8}\left(\omega+\omega^6\right)\left(\omega^2+\omega^5\right)\left(\omega^3+\omega^4\right)=\frac{1}{8}\left(\omega^6+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{15}\right)\\
&=\frac{1}{8}\left(\omega^6+1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega\right)=\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Puis,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}&=\frac{1}{4}\left(\left(\omega+\omega^6\right)\left(\omega^2+\omega^5\right)+\left(\omega+\omega^6\right)\left(\omega^3+\omega^4\right)+\left(\omega^3+\omega^4\right)\left(\omega^2+\omega^5\right)\right)\\&=\frac{1}{4}\left(2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6\right)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6\right)=-\frac{1}{2}$$

Donc, $Q=\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)Y+\left(-\frac{1}{2}\right)Y^2-Y^3=\frac{1}{8}\left(-8Y^3-4Y^2+4Y+1\right)$ puis,

$$P=\frac{1}{64}\left(-8\left(-2X^2+1\right)^3-4\left(-2X^2+1\right)^2+4\left(-2X^2+1\right)+1\right)=\frac{1}{64}\left(64X^6-112X^4+56X^2-7\right).$$

Une équation du 6ème degré dont les solutions sont les $\sin\frac{k\pi}{7}$, $k\in\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ est $64x^6-112x^4+56x^2-7=0$.

Maintenant, si $r=\frac{p}{q}$ (p entier relatif non nul, q entier naturel non nul, p et q premiers entre eux) est une racine rationnelle de cette équation, alors p divise -7 et q divise 64 et donc p est élément de $\{1,-1,7,-7\}$ et q est élément de $\{1,2,4,8,16,32,64\}$. Réciproquement, on vérifie qu'aucun des rationnels r obtenu n'est racine de P et donc les racines de P sont irrationnelles.

Exercice n° 24

Si (x,y,z) est solution du système proposé noté (S), alors x, y et z sont deux à deux distincts. En effet, si par exemple $x=y$ alors $7=y^2+yz+z^2=x^2+xz+z^2=13$ ce qui est impossible. Donc,

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y^3-z^3=7(y-z)\\z^3-x^3=13(z-x)\\x^3-y^3=3(x-y)\end{array}\right..$$

En additionnant les trois équations, on obtient $-10x+4y+6z=0$ ou encore $-5x+2y+3z=0$. Donc,

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\\left(\frac{1}{2}(5x-3z)\right)^2+\frac{1}{2}(5x-3z)z+z^2=7\\z^2+zx+x^2=13\\x^2+\frac{1}{2}(5x-3z)x+\left(\frac{1}{2}(5x-3z)\right)^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\25x^2-20xz+7z^2=28\\z^2+zx+x^2=13\\39x^2-36xz+9z^2=12\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\xz=13-x^2-z^2\\25x^2-20(13-x^2-z^2)+7z^2=28\\13x^2-12(13-x^2-z^2)+3z^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}(5x-3z)\\xz=13-x^2-z^2\\5x^2+3z^2=32\end{array}\right.$$

Soit (S') le système formé des deux dernières équations. On note que $x=0$ ne fournit pas de solution et donc

$$(S')\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z^2=\frac{1}{3}\left(32-5x^2\right)\\xz=13-x^2-\frac{1}{3}\left(32-5x^2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=\frac{2x^2+7}{3x}\\\frac{\left(2x^2+7\right)^2}{9x^2}=\frac{1}{3}(32-5x^2)\end{array}\right.$$

La deuxième équation s'écrit $\left(2x^2+7\right)^2=3x^2\left(32-5x^2\right)$ puis $19x^4-68x^2+49=0$ puis $x^2=\frac{34\pm15}{19}$ D'où les solutions $x=1$ ou $x=-1$ ou $x=\sqrt{\frac{49}{19}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{49}{19}}$. Les quatre triplets solutions du système : $(1,-2,3)$, $(-1,2,-3)$, $\left(\frac{7}{\sqrt{19}},\frac{1}{\sqrt{19}},\frac{11}{\sqrt{19}}\right)$ et $\left(-\frac{7}{\sqrt{19}},-\frac{1}{\sqrt{19}},-\frac{11}{\sqrt{19}}\right)$.

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Exercice n° 25

Posons $\mathsf{P} = \mathsf{X}^4 - 4\mathsf{X}^3 - 36\mathsf{X}^2 + \lambda\mathsf{X} + \mu$.

$$\begin{aligned}
(\lambda,\mu) \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \text{ les racines de P soient } a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}\sigma_1 = 4\\ \sigma_2 = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}4a+6r = 4\\ a(3a+6r)+(a+r)(2a+5r)+(a+2r)(a+3r) = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}2a+3r = 2\\ 6a^2+18ra+11r^2 = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}a = 1-\dfrac{3}{2}r\\ 6\left(1-\dfrac{3}{2}r\right)^2+18\left(1-\dfrac{3}{2}r\right)r+11r^2 = -36\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists(a,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}-\dfrac{5}{2}r^2+42 = 0\\ a = 1-\dfrac{3}{2}r\\ \sigma_3 = -\lambda\\ \sigma_4 = \mu\end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où la solution (les deux valeurs opposées de r fournissent évidemment la même progression arithmétique) $r = 2\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ puis $a = 1-3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ puis les racines $z_1 = 1-3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, $z_2 = 1-\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, $z_3 = 1+\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ et $z_4 = 1+3\sqrt{\dfrac{21}{5}}$, obtenues pour

$$\mu = z_1z_2z_3z_4 = \left(1-3\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1+3\sqrt{\frac{21}{5}}\right) = \left(1-9\times\frac{21}{5}\right)\left(1-\frac{21}{5}\right) = \frac{2944}{25},$$

et

$$\begin{aligned}
\lambda &= \left(1-3\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\left(1-\frac{21}{5}\right)+\left(1-9\times\frac{21}{5}\right)\left(1-\sqrt{\frac{21}{5}}\right)+\left(1-9\times\frac{21}{5}\right)\left(1+\sqrt{\frac{21}{5}}\right)+\left(1-\frac{21}{5}\right)\left(1+3\sqrt{\frac{21}{5}}\right)\\
&= 2\left(1-\frac{21}{5}\right)+2\left(1-9\times\frac{21}{5}\right) = 2\left(2-10\frac{21}{5}\right) = -80
\end{aligned}$$

Exercice n° 26

L'équation proposée admet deux solutions inverses l'une de l'autre si et seulement si il existe deux complexes a et b tels que

$$\mathsf{X}^4-21\mathsf{X}+8 = (\mathsf{X}^2+a\mathsf{X}+1)(\mathsf{X}^2+b\mathsf{X}+8) = \mathsf{X}^4+(a+b)\mathsf{X}^3+(9+ab)\mathsf{X}^2+(8a+b)\mathsf{X}+8\ (*)$$

$(*) \Leftrightarrow b = -a$ et $ab = -9$ et $8a+b = -21 \Leftrightarrow a = -3$ et $b = 3$. Ainsi,

$$\mathsf{X}^4-21\mathsf{X}+8 = \left(\mathsf{X}^2-3\mathsf{X}+1\right)\left(\mathsf{X}^2+3\mathsf{X}+8\right) = \left(\mathsf{X}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\mathsf{X}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\mathsf{X}-\frac{-3+i\sqrt{23}}{2}\right)\left(\mathsf{X}-\frac{-3-i\sqrt{23}}{2}\right).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.

Exercice n° 27

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. On veut calculer S_4.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $x_i^3 + 2x_i - 1 = 0$ et donc $x_i^4 + 2x_i^2 - x_i = 0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4 + 2S_2 - S_1 = 0$ et donc

$$\begin{aligned} S_4 &= -2S_2 + S_1 = -2\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\right) + (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= -2\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right) + \sigma_1 = -2(-2 \times 2) = 8. \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8.}$$

Exercice n° 28

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4. On suppose P unitaire sans perte de généralité. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 forment un parallélogramme, notons a le centre de ce parallélogramme. Les racines de P s'écrivent alors z_1, z_2, $2_a - z_1$, $2a - z_2$ et si $Q = P(X + a)$ alors $Q(-a + z_1) = Q(a - z_1) = Q(-a + z_2) = Q(a - z_2) = 0$. Les racines du polynôme Q sont deux à deux opposées, ce qui équivaut à dire que le polynôme Q est bicarré ou encore de la forme $X^4 + \alpha X^2 + \beta$ ou enfin que

$$P = (X - a)^4 + \alpha(X - a)^2 + \beta.$$

Mais alors a est racine de $P' = 4(X - a)^3 + 2\alpha(X - a)$ et de $P^{(3)} = 24(X - a)$.

Réciproquement, si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune a. $P^{(3)}$ est de degré 1 et de coefficient dominant 24 et donc $P^{(3)} = 24(X - a)$ puis en intégrant $P'' = 12(X - a)^2 + \lambda$ puis $P' = 4(X - a)^3 + \lambda(X - a) + \mu$. La condition a est racine de P' fournit $\mu = 0$ et donc $P = (X - a)^4 + \alpha(X - a)^2 + \beta$. Donc, le polynôme $Q = P(X + a)$ est bicarré et ses racines sont deux à deux opposées et donc de la forme $Z_1 = a - z_1$, $Z_2 = z1 - a$, $Z_3 = a - z_2$, $Z_4 = z_2 - a$ et on a bien $Z_1 - Z_3 = Z_4 - Z_2$.

Exercice n° 29

Soit $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k) = X^n - 1$ (où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$)

1) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(4 - \omega_k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2 - \omega_k)} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k}\right) = 2^n + 1.}$$

2)

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{ia} - \omega_k\right)\left(e^{-ia} - \omega_k\right) = P(e^{ia})P(e^{-ia}) = (e^{ina} - 1)(e^{-ina} - 1) \\ &= 2 - e^{ina} - e^{-ina} = 2(1 - \cos na). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1\right) = 2(1 - \cos na).}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2021. Tous droits réservés.