Planche n° 27. Polynômes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*I)**

Calculer $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $n \geqslant 2$.

Exercice n° 2 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. On note Q le polynôme $Q = 1 + 2X + \ldots + nX^{n-1}$.
Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$.

Exercice n° 3 (**I)** ($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

1) Soient p un entier naturel et a un réel. Donner le développement de $(\cos a + i \sin a)^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a, déterminer $\sum_{k=1}^{p} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$. En déduire alors $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$.

2) Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (pour majorer u_n, on remarquera que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$).

3) Montrer que pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\text{cotan}\, x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

4) En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n).

Exercice n° 4 (T)**

Déterminer le PGCD de $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ et $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$.

Exercice n° 5 (IT)**

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice n° 6 (***)

Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2 + S^2$.

Exercice n° 7 (**)

Soit P un polynôme différent de X. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice n° 8 (***)

Soit P un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m = P(n)$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(n + km)$ est un entier divisible par m.

2) Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.

Exercice n° 9 (***) (Polynômes P vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$)

Soit E la partie de $\mathbb{C}[X]$ formée des polynômes P vérifiant $\forall a \in \mathbb{Z},\ P(a) \in \mathbb{Z}$.

1) On pose $P_0 = 1$ et pour n entier naturel non nul, $P_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X+k)$ (on peut définir la notation $P_n = \binom{X+n}{n}$).
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \in E$.

2) Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est encore un élément de E.

3) Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_n.
(Pour traiter cette question, on admettra le résultat suivant qui sera démontré au deuxième semestre : si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$, alors tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n (n donné) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des polynômes P_k, $k \in [\![0, n]\!]$.)

Exercice n° 10 (****)

Division euclidienne de $P = \sin aX^n - \sin(na)X + \sin((n-1)a)$ par $Q = X^2 - 2X\cos a + 1$, a réel donné, $n \geqslant 2$.

Exercice n° 11 (*I)** (Théorème de LUCAS.)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que pour toute racine z de P', il existe des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, de somme égale à 1 tels que $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$ où $z_1, \ldots, z_n$ sont les n racines distinctes ou confondues de P dans $\mathbb{C}$ (on dit que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P ou encore que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P). Indication : calculer $\dfrac{P'}{P}$.

Exercice n° 12 (***)

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6 - 2X^3\cos a + 1$ où a est un réel donné dans $[0, \pi]$.

Exercice n° 13 (*T)**

Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X) + 10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X) - 10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

Exercice n° 14 (*I)**

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ (penser aux racines de P).

Exercice n° 15 (T)**

Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = X^5 - 209X + a$ admette deux zéros dont le produit vaut 1.

Exercice n° 16 (*T)**

Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ la famille des racines de $P = X^5 + 2X^4 - X - 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{5} \dfrac{a_k + 2}{a_k - 1}$.

Exercice n° 17 (**)

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{array}\right.$.

Exercice n° 18 (T)**

Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice n° 19 (*I)**

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$, dont les coefficients $a_0, \ldots, a_n$, sont des entiers relatifs avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
Soient p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $\mathrm{PGCD}(p, q) = 1$ puis $r = \dfrac{p}{q}$.
Montrer que si $P(r) = 0$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

2) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $12X^4 + X^3 + 15X^2 - 20X + 4$.

Exercice n° 20 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$ est divisible par $2X^3 - 3X^2 + X$ puis déterminer le quotient.

Exercice n° 21 (I)**

1) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer deux polynômes U et V tels que $UX^n + V(1-X)^n = 1$ et $\deg(U) < n$ et $\deg(V) < n$..

2) Plus généralement, si n et m sont deux entiers naturels non nuls, déterminer deux polynômes U et V vérifiant $UX^n + V(1-X)^m = 1$ et $\deg(U) < m$ et $\deg(V) < n$.

Exercice n° 22 (I)**

Soit P un polynôme réel de degré supérieur ou égal à 2.

1) a) Montrer que si P n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de P'.
b) Le résultat persiste-t-il si on suppose simplement que les racines de P sont simples mais pas nécessairement réelles ?

2) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

Exercice n° 23 (****)

Former une équation du sixième degré dont les racines sont les $\sin\dfrac{k\pi}{7}$ où $k \in \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ puis montrer que ces six nombres sont irrationnels.

Exercice n° 24 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l} y^2+yz+z^2=7 \\ z^2+zx+x^2=13 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{array}\right.$.

Exercice n° 25 (***)

Déterminer λ et μ complexes tels que les zéros de $z^4-4z^3-36z^2+\lambda z+\mu$ soient en progression arithmétique.

Exercice n° 26 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-21z+8=0$ sachant qu'il existe deux des solutions sont inverses l'une de l'autre.

Exercice n° 27 (***)

Soient x_1, x_2, x_3 les zéros de X^3+2X-1. Calculer $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

Exercice n° 28 (****)

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4.

Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune

Exercice n° 29 (*I)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$.

1) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{2}{2-\omega_k}\right)$.

2) Montrer que, pour tout réel a, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_k^2-2\omega_k\cos a+1\right) = 2(1-\cos(na))$ (questions indépendantes.)

