Chapitre 27. Matrices (2ème partie)

Plan du chapitre

Le calcul sur les matrices a été analysé au premier semestre. Nous allons maintenant interpréter les matrices et les différentes opérations sur les matrices de différentes manières.

1 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

1.1 Définition de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base (rappel)

On rappelle la définition de la matrice d'une famille finie $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ donnée de cette espace : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ est l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient ligne i, colonne j, $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, est la i-ème coordonnée de u_j dans la base $\mathcal{B}$.
La j-ème colonne, $1 \leqslant j \leqslant p$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$ et la i-ème ligne, $1 \leqslant i \leqslant n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est constituée des i-èmes coordonnées des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ dans la base $\mathcal{B}$.

Si on note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$, la famille des formes coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, n peut condenser les notations :

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_1, \ldots, u_p) = (e_i^*(u_j))_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}.$$

Par exemple, si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et si $u_1 = e_1 - 2e_3$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, alors

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X-1)^2$, alors la matrice de la famille (P_0, P_1, P_2) dans la base $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\mathrm{Mat}_{(X^2,X,1)}(P_0, P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1. Soient n un entier naturel puis a_0, ..., a_n, $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on pose

$$L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

1) Montrer que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer les coordonnées d'un élément $P \in \mathbb{C}_n[X]$ dans cette base.

2) Déterminer la matrice de la base $(1, X, \ldots, X^n)$ dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

Solution 1.

1) Chaque L_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, est un polynôme de degré n et en particulier un élément de $\mathbb{C}_n[X]$. Soit $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \lambda_j = 0.$$

Ainsi, la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de l'espace $\mathbb{C}_n[X]$. De plus,

$$\mathrm{card}\,(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n} = n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X]) < +\infty.$$

On en déduit que la famille $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de l'espace $\mathbb{C}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Il existe $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$. Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $P(a_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$. On a montré que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

2) En particulier, pour $j \in [\![0,n]\!]$,

$$X^j = \sum_{i=0}^{n} a_i^j L_i.$$

La matrice de $(1, X, \ldots, X^n)$ dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

1.2 Définition de la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \ldots, e'_p\right)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

La **matrice de l'application linéaire** f **relativement aux bases** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$**, notée Mat**$_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}f$, est la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \ldots, e'_p\right)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}))\,.$$

$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Si de plus, $F = E$ (cas d'un endomorphisme) et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, la **matrice de l'endomorphisme** f **dans la base** $\mathcal{B}$ est $\text{Mat}\mathcal{B}, \mathcal{B}(f)$. Cette matrice est notée plus simplement $\text{Mat}\mathcal{B}(f)$. On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))\,.$$

Aves les formes coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, on peut écrire :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \left({e_i}'^*(f(e_j))\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Exemple. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit f l'élément de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ défini par $f(e_1) = 2e'_1 - e'_2$, $f(e_2) = e'_2$ et $f(e_3) = -e'_1 + e'_2$. La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est un élément de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. ❏

1.3 Ecriture matricielle d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p respectivement. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \ldots, e'_p\right)$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant i\leqslant n}}$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Par définition de A, on a

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i.$$

Soit alors $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ un élément de E.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} x_j e'_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j e'_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) e'_i. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$, alors, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$. Ces égalités peuvent encore s'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

et on peut donc énoncer

Théorème 1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \dots, e'_p\right)$ une base de F.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ puis $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Soient $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$ puis $y = f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$Y = AX.$$

⇨ **Commentaire** . *Le plus long est effectivement de définir toutes les données.*

Exemple 1. On reprend l'exemple du paragraphe précédent. Soit f l'élément de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. L'image par f du triplet $u = (x, y, z)$ est obtenu par le calcul matriciel suivant : en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x + y + z \end{pmatrix},$$

ou encore $f((x, y, z)) = (2x - z, -x + y + z)$. ❑

Exemple 2. On se place sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Une base de cet espace est $\mathcal{B} = (e_1, e_2) = (1, i)$ puis un repère de cet espace est $\mathcal{R} = (0, e_1, e_2)$.
On sait que la transformation f d'expression complexe $z' = (a + ib)z$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est une similitude directe du plan complexe. A chaque point $M(x, y)$ d'affixe $z = x + iy$, elle associe le point $M'(x', y')$ d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $x' + iy' = (a + ib)(x + iy)$ avec

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}.$$

f peut aussi être considérée comme un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ qui à chaque vecteur $z = x + iy = xe_1 + ye_2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de $\mathbb{C}$, associe le vecteur $z' = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay) = (ax - by)e_1 + (bx + ay)e_2$. Puisque $f(e_1) = f(1) = a + ib = ae_1 + be_2$ et $f(e_2) = f(i) = -b + ai = -be_1 + ae_2$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{(1,i)}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

❑

Une conséquence immédiate du théorème 1 est

Théorème 2. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$.

$$\left(\forall X \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^2 \;\; AX = BX\right) \Rightarrow A = B.$$

Démonstration . Soit f (resp. g) l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A (resp. B) relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$

et $\mathbb{K}^n$.

$$\left(\forall X \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^2\ \ AX = BX\right) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{K}^p,\ f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g \Rightarrow A = B.$$

❑

1.4 Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E, F)$

Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F est de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension np de même que $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (ou aussi $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$). On sait alors que ces deux espaces sont isomorphes. On va expliciter un isomorphisme.

Théorème 3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies non nulles. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

1) a) $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2,\ \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.

b) $\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda\ \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

2) $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$.

Démonstration . Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F. Le coefficient line i, colonne j, $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, b]\!]$, de $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g)$ est la i-ème coordonnée du vecteur $\lambda f(e_j) + \mu g(e_j)$ de même que le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$. Les deux matrices sont donc égales.

❑

Théorème 4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies non nulles notées respectivement n et p. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.

L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration . L'application φ est linéaire d'après le théorème précédent. Ensuite, si f est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = 0$, alors l'application linéaire f s'annule sur la base $\mathcal{B}$ et donc $f = 0$. Puisque $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) < +\infty$, on en déduit que φ est un isomorphisme.

❑

⇨ **Commentaire** . *L'isomorphisme du théorème 4 n'est pas un isomorphisme canonique ou encore n'est pas un isomorphisme privilégié parmi tous les isomorphismes car il dépend du choix de deux bases. Si on prend deux autres bases, on obtient un nouvel isomorphisme qui a le même statut que le premier isomorphisme fourni.*

1.5 Matrice d'une composée. Interprétation du produit de deux matrices

Théorème 5. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies non nulles notées respectivement n, p et q. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Démonstration . Posons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)$ et $C = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$.

Soit $x \in E$. Soient X, Y et Z les vecteurs colonnes, éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ respectivement, dont les composantes sont les coordonnées de x, $f(x)$ et $g(f(x))$ dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ respectivement.

On a d'une part $Z = CX$ et d'autre part $Z = BY = BAX$. Par suite, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $CX = BAX$. D'après le théorème 2, on en déduit que $C = BA$.

❑

Théorème 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle notée n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$.

Démonstration . Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\text{Id}_E(e_j) = e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} e_i$. Donc, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = I_n$.

❑

Théorème 7 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de même dimension finie non nulle notée n. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors, f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible. Dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f))^{-1}.$$

Démonstration .

• Supposons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$ inversible. Notons g l'élément de $\mathcal{L}(F, E)$ de matrice A^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A \times A^{-1} = I_n,$$

et donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. De même,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = A \times A^{-1} = I_n,$$

et donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On en déduit que l'application linéaire f est bijective et donc, est un isomorphisme de E sur F.

• Supposons que f soit un isomorphisme de E sur F. Posons $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$ (et toujours $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$).

$$B \times A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1} \circ f\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n,$$

et de même,

$$A \times B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f \circ f^{-1}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_F) = I_n.$$

On en déduit que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$.

❑

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.

Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et déterminer A^{-1}.

Solution 2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$. f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Pour $j \in [\![0, k]\!]$, la formule du binôme de Newton fournit

$$f\left(X^j\right) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^j.$$

Par suite, A est la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X-1) \end{array}$. On a $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Donc, $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_n[X])$ (car $\dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$) et $g = f^{-1}$.

Mais alors, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$. Plus précisément,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & & (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Théorème 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche.

2) A est inversible si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{0\}$ où $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \ AX = 0\}$.

Démonstration. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1) Si A est inversible à gauche, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B \times A = I_n$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B \times A = I_n$$

et donc $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$. Ainsi, f est inversible à gauche et donc inversible car $\dim(\mathbb{K}^n) < +\infty$. Mais alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

2) Puisque $\dim(\mathbb{K}^n) < +\infty$,

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow f \in GL(\mathbb{K}^n) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\}.$$

❑

Exercice 3. (Théorème de Hadamard). Soient $n \geqslant 2$ puis $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

(A est dite « à diagonale strictement dominante »). Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Solution 3. Montrons que $\text{Ker}(A) = \{0\}$. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A) &\Rightarrow AX = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ |a_{i,i}||x_i| = \left| -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ |a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \ |a_{i,i}||x_i| \leqslant \left(\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right) \times \text{Max}\{|x_j|, \ j \in [\![1, n]\!]\}. \end{aligned}$$

Supposons de plus $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$. Soit X un vecteur non nul de $\text{Ker}(A)$. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_j|, \ j \in [\![1, n]\!]\}$. Puisque $X \neq 0$, $|x_{i_0}| > 0$.

D'après ce qui précède, $|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right) |x_{i_0}|$ puis $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$.

En résumé, $\text{Ker}(A) \neq \{0\} \Rightarrow \exists i_0 \in [\![1, n]\!] / \ |a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$. Par contraposition,

$$\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\right) \Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Théorème 9. Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^p\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)^p$.

2) Si de plus $f \in GL(E)$, alors $\forall p \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^p\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)^p$.

Démonstration . 1) se démontre par récurrence grâce aux théorèmes 5 et 6. Si $p < 0$, le théorème 7 fournit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^p\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-p}\right)\right)^{-1} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-p}\right)^{-1} = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^p$.

❑

2 Changement de bases

2.1 Matrices de passage

Théorème 10. Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est inversible.

Démonstration . Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$. Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de A, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = u_i$ et donc

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow f \in GL(E) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K}).$$

❑

Définition 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Un cas particulier du théorème 10 est

Théorème 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si la famille $(L_1, \dots, L_n)$ des lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Démonstration . Si on note C_1, ..., C_n les colonnes de la matrice, A est aussi la matrice de la famille $(C_1, \dots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc, A est inversible si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On sait que A est inversible si et seulement si A^T est inversible ou encore A est inversible si et seulement si la famille des colonnes de A^T est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou enfin A est inversible si et seulement si la famille des lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

❑

2.2 La formule de changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle n. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
Soit $x \in E$. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (resp. $X' = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ (resp. la base $\mathcal{B}'$). Soit enfin $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Par définition de P, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$. On en déduit que

$$\begin{aligned}x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} x'_j e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j\right) e_i\end{aligned}$$

et donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j.$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$ donné, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j$ est le produit de la i-ème ligne de la matrice P par le vecteur colonne X' et on a donc montré que $X = PX'$. On peut énoncer :

Théorème 12. (La formule de changement de base.)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Soit $x \in E$. Soit X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ (resp. la base $\mathcal{B}'$). Alors,

$$X = PX'.$$

⇨ **Commentaire** . *On doit noter que la formule* $X = PX'$ *expriment les* ***anciennes coordonnées*** *de* x *(c'est-à-dire les coordonnées de* x *dans la base initiale* $\mathcal{B}$*)* ***en fonction des nouvelles coordonnées*** *de* x *(c'est-à-dire les coordonnées de* x *dans la nouvelle base* $\mathcal{B}'$*).*

Exemple. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $u_1 = (2, 0, 0) = 2e_1$, $u_2 = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2$ et $u_3 = (3, 1, -1) = 3e_1 + e_2 - e_3$. La matrice de la famille (u_1, u_2, u_3) dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Au vu de cette matrice, la famille (u_1, u_2, u_3) est de rang 3 et donc est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$. La matrice ci-dessus est alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les composantes x, y et z de ce triplet sont aussi ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ($v = xe_1 + ye_2 + ze_3$). Si on note (x', y', z') les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3), les formules de changement de bases fournissent :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' - y' + 3z' \\ y' + z' \\ -z' \end{pmatrix}.$$

❏

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 = 2$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2) = (O, \mathcal{B})$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

On pose $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ et $e'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

1) Montrer que (e'_1, e'_2) est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ et préciser la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

2) Ecrire les formules de changement de base (et donc de changement de repère).

3) Déterminer une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O, e'_1, e'_2)$. Identifier la courbe $\mathcal{C}$ et la construire.

Solution 4. 1) e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Donc, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

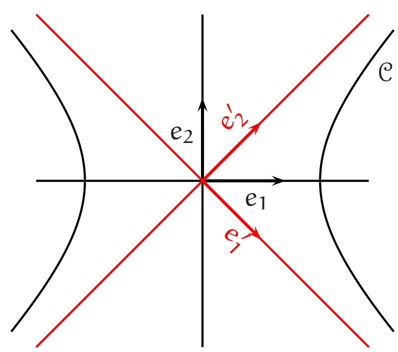
2) Les formules de changement de base s'écrivent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3) Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ et (x', y') dans le repère $\mathcal{R}' = (O, e_1', e_2')$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x'^2 + 2x'y' + y'^2\right) - \frac{1}{2}\left(x'^2 - 2x'y' + y'^2\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow x'y' = 1. \end{aligned}$$

On reconnaît l'hyperbole d'équation $y' = \dfrac{1}{x'}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.



On déduit du théorème 12 un certain nombre de propriétés de calcul des matrices de passage :

Théorème 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie non nulle.

1) Pour toutes bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ de E, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.

2) a) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.

b) Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

Démonstration .

1) Soit $x \in E$. Soit X (resp. X', X'') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$).

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X'' = X = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X''.$$

Ainsi, pour tout élément X'' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X'' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X''$. On en déduit que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

2) a) Il est clair que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.

b) On sait déjà que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible. Ensuite,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$$

et donc $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

❏

Le théorème précédent fournit une nouvelle méthode de calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible : on interprète cette matrice comme une matrice de passage. Cette technique est de loin la technique la plus simple et la plus facile à rédiger proprement pour inverser une matrice de format $(3, 3)$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que A est inversible et déterminons son inverse.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. A est inversible si et seulement si $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Or

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = e_1 - e_2 \\ u_2 = e_1 - e_3 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_2 = e_1 - u_1 \\ e_3 = e_1 - u_2 \\ u_3 = e_1 + (e_1 - u_1) + (e_1 - u_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_1 = \dfrac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) \\ e_2 = \dfrac{1}{3}(-2u_1 + u_2 + u_3) \\ e_3 = \dfrac{1}{3}(u_1 - 2u_2 + u_3) \end{array}\right.$$

Donc, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis $A \in GL_3(\mathbb{R})$. De plus, $A = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et donc

$$A^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Changements de bases et applications linéaires

Théorème 14.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles notées n et p respectivement.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ deux bases de F. Soient $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'} \in GL_p(\mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_1'}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors,

$$B = Q^{-1}AP.$$

Démonstration . Soit $x \in E$. Soit X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Soit Y (resp. Y') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $y = f(x)$ dans $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_1'$).

D'après les théorèmes 1 et 12,

$$QY' = Y = AX = APX'$$

et donc $Y' = Q^{-1}APX'$. D'autre part, $Y' = BX'$. Ainsi, $\forall X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Q^{-1}APX' = BX'$. D'après le théorème 2, $B = Q^{-1}AP$.

❏

Un cas particulier très important du théorème 14 est :

Théorème 15.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finie non nulle notées n.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$B = P^{-1}AP.$$

Démonstration . C'est le cas particulier où $F = E$ puis $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1' = \mathcal{B}'$.

❏

Le théorème précédent est très utilisé, entre autres pour calculer des puissances de matrices et ceci en liaison avec le théorème suivant :

Théorème 16. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Alors, $\forall p \in \mathbb{N}$, $B^p = P^{-1}A^pP$.

De plus $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow B \in GL_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $B^p = P^{-1}A^pP$.

Démonstration . Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ puis $\mathcal{B}'$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = B$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$B^p = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f))^p = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^p) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p)\,P = P^{-1}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^p\,P = P^{-1}A^pP.$$

Si de plus, A est inversible, alors $B = P^{-1}AP$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles et si B est inversible alors $A = PBP^{-1}$ est inversible et dans ce cas, le calcul ci-dessus est valable pour $p \in \mathbb{Z}$.

❏

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & 5/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer une base (u_1) de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, une base (u_2) de $\mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base (u_3) de $\mathrm{Ker}\,(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

2) a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

b) Déterminer P^{-1}.

c) Déterminer la matrice D de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

3) a) A l'aide des formules de changement de base, exprimer A en fonction de P et D.

b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$ (après en avoir justifié l'existence).

Solution 5.

1) • Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0 \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & 3/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{3}{2}y + \dfrac{3}{2}z = 0 \\ 3x + \dfrac{3}{2}y - \dfrac{9}{2}z = 0 \\ 3x - \dfrac{3}{2}y - \dfrac{3}{2}z = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = y \\ 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\,(u_1)$ où $u_1 = (1, 1, 1)$.

• Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow (f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0 \Leftrightarrow (A + 2I_3)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & 9/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{3}{2}z = 0 \\ 3x + \dfrac{9}{2}y - \dfrac{9}{2}z = 0 \\ 3x - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{3}{2}z = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -2x + y \\ 2x + 3y - 3(-2x + y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } z = y.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}\,(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\,(u_2)$ où $u_2 = (0, 1, 1)$.

• Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$u \in \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0 \Leftrightarrow (A - 4I_3)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & -3/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & -9/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{3}{2}z = 0 \\ 3x - \dfrac{3}{2}y - \dfrac{9}{2}z = 0 \\ 3x - \dfrac{3}{2}y - \dfrac{9}{2}z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x - y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 2x + y \\ 2x - y - 3(2x + y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x \text{ et } z = x.$$

Donc, $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(u_3)$ où $u_3 = (1, -1, 1)$.

2) a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -a \\ 2a + b = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus, $\text{card}(u_1, u_2, u_3) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) < +\infty$. Finalement, la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u_1, u_2, u_3) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) P^{-1} est la matrice de passage de la base (u_1, u_2, u_3) à la base (e_1, e_2, e_3). Or

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad (\text{I}) \\ u_2 = e_2 + e_3 \quad (\text{II}) \\ u_3 = e_1 - e_2 + e_3 \quad (\text{III}) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - u_3) \quad (\text{I}) - (\text{III}) \\ u_1 = e_1 + \dfrac{1}{2}(u_1 - u_3) + e_3 \\ u_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - u_3) + e_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - u_3) \\ e_3 = \dfrac{1}{2}(-u_1 + 2u_2 + u_3) \\ e_1 = u_1 - \dfrac{1}{2}(u_1 - u_3) - \dfrac{1}{2}(-u_1 + 2u_2 + u_3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - u_3) \quad (\text{I}) - (\text{III}) \\ e_3 = \dfrac{1}{2}(-u_1 + 2u_2 + u_3) \\ e_1 = u_1 - u_2 \end{array} \right.$$

Finalement, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Par construction, $(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})(u_1) = 0$ et donc $f(u_1) = u_1$. De même, $f(u_2) = -2u_2$ et $f(u_3) = 4u_3$. Donc,

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{diag}(1, -2, 4).$$

3) a) La formule de changement de base fournit :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = PDP^{-1}.$$

b) D est inversible car aucun des coefficients diagonaux de D n'est nul puis A est inversible en tant que produit de matrices inversibles (d'inverse $\left(PDP^{-1}\right)^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$). Donc, A^n existe pour tout n de $\mathbb{Z}$ et

$$\begin{aligned}
A^n &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n)\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = PD^nP^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4^n\\ 1 & (-2)^n & -4^n\\ 1 & (-2)^n & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1-4^n & -1+4^n\\ 2-2(-2)^n & 1+4^n & -1+2(-2)^n-4^n\\ 2-2(-2)^n & 1-4^n & -1+2(-2)^n+4^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.4 Matrices équivalentes. Matrices semblables

Définition 3.

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. B est **équivalente** à A si et seulement si il existe $(P,Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = QAP$.

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. B est **semblable** à A si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Un premier théorème immédiat est :

Théorème 17. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Si B est semblable à A, **alors** B est équivalente à A.

La réciproque de l'implication précédente est fausse, ne serait-ce que parce que la notion d'équivalence des matrices concerne les matrices rectangulaires, alors que la notion de matrices semblables ne concerne que les matrices carrées. Même dans le cas de matrices carrées, on verra au fur et à mesure des exemples de matrices équivalentes mais pas semblables.

Théorème 18.

La relation « B est équivalente à A » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La relation « B est semblable à A » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration . On démontre le théorème pour la relation « B est équivalente à A ». On note $\mathcal{R}$ cette relation ou encore, on pose : $\forall(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $A\ \mathcal{R}\ B \Leftrightarrow$ B est équivalente à $A \Leftrightarrow \exists(P,Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) /\ B = QAP$.

• Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On prend $Q = I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = I_p \in GL_p(\mathbb{K})$. On a alors $QAP = I_nAI_p = A$. Par suite, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A\ \mathcal{R}\ A$. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

• Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. Supposons $A\ \mathcal{R}\ B$. Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$. Mais alors, $Q^{-1}BP^{-1} = Q^{-1}QAPP^{-1} = A$. Ainsi, si on prend $Q_1 = Q^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P_1 = P^{-1} \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $A = Q_1BP_1$ et donc $B\ \mathcal{R}\ A$. La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

• Soit $(A,B,C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$. Supposons $A\ \mathcal{R}\ B$ et $B\ \mathcal{R}\ C$. Il existe $(Q_1,Q_2) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ et $(P_1,P_2) \in (GL_p(\mathbb{K}))^2$ telles que $B = Q_1AP_1$ et $C = Q_2BP_2$. Mais alors, $C = Q_2Q_1AP_1P_2$. Ainsi, si on prend $Q = Q_2Q_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = P_1P_2 \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $C = QAP$ et donc $A\mathcal{R}C$. La relation $\mathcal{R}$ est transtive.

On a montré que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

❏

⇨ **Commentaire** . *Dorénavant, on peut dire que les matrices* A *et* B *sont équivalentes (ou pas) à la place de* B *est équivalente à* A*. De même pour* A *et* B *sont semblables (ou pas).*

Théorème 19.

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. A et B sont équivalentes si et seulement si il existe E et F espaces de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ base de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_1'}(f)$.

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. A et B sont semblables si et seulement si il existe E espace de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Démonstration . Supposons qu'il existe E et F espaces de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ base de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_1'}(f)$. Si on pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}$, les formules de changement de base fournissent $B = Q^{-1}AP$ où $Q^{-1} \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et B sont donc équivalentes.

Réciproquement, supposons A et B équivalentes. Il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ tel que $B = QAP$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement. Soient $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_1'$ les bases de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement définies par $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'} = Q^{-1}$. Soit enfin f l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}(f)$. D'après les formules de changement de base, on a $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_1'}(f)$.

❏

Ainsi, deux matrices rectangulaires équivalentes peuvent être interprétées comme les matrices d'une même application linéaire relativement à deux couples de bases éventuellement différents. De même, deux matrices carrées semblables peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme relativement à deux bases éventuellement différentes.

3 Rang d'une matrice

3.1 Définition du rang d'une matrice

Définition 4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le **rang** de A, noté $\text{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Par exemple, $\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

3.2 Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Théorème 20. Soient E un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E, $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$.

Alors, $\text{rg}(A) = \text{rg}(u_1, \ldots, u_p)$.

Démonstration . Posons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & E \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$. φ est linéaire et l'image par φ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Donc, φ est un isomorphisme.

Par suite, en notant $C_1, \ldots, C_p$, les colonnes de A

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}(C_1, \ldots, C_p) = \dim(\text{Vect}(C_1, \ldots, C_p)) = \dim(\varphi(\text{Vect}(C_1, \ldots, C_p))) = \dim(\text{Vect}(\varphi(C_1), \ldots, \varphi(C_p))) \\ &= \dim(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)) = \text{rg}(u_1, \ldots, u_p). \end{aligned}$$

❏

En reprenant les premières propriétés du rang d'une famille de vecteurs, on en déduit immédiatement

Théorème 21. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, $\text{rg}(A) \leqslant \text{Min}\{n, p\}$.

De plus,
$\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$\text{rg}(A) = p \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

et en particulier

Théorème 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\text{rg}(A) \leqslant n$.

De plus, $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$.

3.3 Lien avec le rang d'une application linéaire

Théorème 23. Soient E et F deux espaces de dimensions respectives n et p puis $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Alors, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration. Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de sorte que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Alors,

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)\right) = \mathrm{rg}(A).$$

❏

En appliquant les propriétés déjà connues du rang d'une application linéaire (voir la fin du chapitre « Dimension d'un espace vectoriel »), on obtient :

Théorème 24.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{rg}(A + B) \leqslant \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{rg}(\lambda A) = \begin{cases} \mathrm{rg}(A) \text{ si } \lambda \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \end{cases} \leqslant \mathrm{rg}(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{rg}(\lambda A + \lambda B) \leqslant \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

De même,

Théorème 25.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A \times B) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$ ou encore $\mathrm{rg}(A \times B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(A \times B) \leqslant \mathrm{rg}(B)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. L'inégalité $\mathrm{rg}(A \times B) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$ est la traduction en termes de matrices de l'inégalité déjà connue $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$.

Etudions alors les deux cas d'égalité. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. On a déjà $\mathrm{rg}(AP) \leqslant \mathrm{rg}(A)$. Mais d'autre part, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left((AP)P^{-1}\right) \leqslant \mathrm{rg}(AP)$. Finalement, $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$. De même, $\mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A)$ si Q est inversible.

❏

On en déduit encore :

Théorème 26. Deux matrices équivalentes ont même rang. Deux matrices semblables ont même rang.

3.4 Une caractérisation du rang d'une matrice

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Pour $r \in [\![0, \mathrm{Min}\{n, p\}]\!]$, on définit la matrice J_r par : si $r = 0$, $J_r = 0_{n,p}$ et si $r \geqslant 1$, J_r est la matrice de format (n, p) telle que pour $1 \leqslant i \leqslant r$, le coefficient ligne i, colonne i, de J_r est égal à 1, tous les autres coefficients étant nuls. La matrice J_r peut se définir par blocs (en adaptant la lecture dans les cas particuliers $r = 0$, ou $r = p$ ou $r = n$) :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix},$$

I_r désignant la matrice unité de format r et $0_{u,v}$ désignant la matrice nulle de format (u, v).

On peut alors caractériser le rang d'une matrice à partir de la matrice J_r.

Théorème 27. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $r \in [\![0, \mathrm{Min}\{n, p\}]\!]$.

$\mathrm{rg}(A) = r \Leftrightarrow A$ est équivalente à J_r.

Démonstration.

- Supposons A équivalente à J_r. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(J_r)$, puisque deux matrices équivalentes ont même rang, et donc $\mathrm{rg}(A) = r$ (d'après le travail effectué sur le calcul du rang d'une famille de vecteurs dans le chapitre « Dimension d'un espace vectoriel »).

- Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r \in [\![0, \mathrm{Min}\{n, p\}]\!]$. Il s'agit de montrer que A est équivalente à J_r.

Soit f l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{K}^p) - \mathrm{rg}(f) = p - \mathrm{rg}(A) = p - r.$$

Si $r=0$, alors $f=0$ puis $A=0_{n,p}$ et d'autre part, $J_r=0_{n,p}$. Dans ce cas, A et J_r sont équivalentes. Dorénavant, $1\leqslant r\leqslant p$.
Soit $\mathcal{F}=(e_{r+1},\dots,e_p)$ si $r<p$ ou $\mathcal{F}=\varnothing$ si $r=p$, une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On complète (éventuellement) la famille libre $\mathcal{F}$ en $\mathcal{B}'=(e_1,\dots,e_p)$ base de $\mathbb{K}^p$. On sait que $S=\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_r)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathbb{K}^p$.

D'après le théorème du rang, on sait que la restriction de f à S induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$. On en déduit que la famille $\mathcal{F}'=(e_1',\dots,e_r')=(f(e_1),\dots,f(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. On la complète (éventuellement) en $\mathcal{B}_1'=(e_1',\dots,e_n')$ base de $\mathbb{K}^n$.

Pour $i\in[\![1,r]\!]$, on a $f(e_i)=e_i'$ et pour $i>r$ (si $r<p$), on a $f(e_i)=0$. Donc, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_1'}(f)=J_r$. Soient $P=\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q=\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}$. Les formules de changement de base fournissent $J_r=Q^{-1}AP$. Ceci montre que A et J_r sont équivalentes.

❏

On déduit du théorème 27 :

Théorème 28. Soit $(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. A et B sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)$.

Démonstration . On sait déjà que deux matrices équivalentes ont même rang.

Inversement, si $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)=r$, alors A et B sont toutes deux équivalentes à J_r et donc, par transitivité, A et B sont équivalentes.
❏

Du théorème 27, on déduit aussi :

Théorème 29. $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}\left(A^T\right)=\mathrm{rg}(A)$.

Démonstration . Soit r le rang de A. La matrice A est équivalente à la matrice J_r et donc il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q\in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A=QJ_rP$. Mais alors, $A^T=P^TJ_r^TQ^T$ avec $P^T\in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q^T\in GL_p(\mathbb{K})$. Maintenant, la matrice J_r^T est la matrice J_r de format (p,n) : $J_r^T=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{r,p-r} & 0_{p-r,n-r}\end{pmatrix}$. Ceci montre que A^T est de rang r. ❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *Une conséquence de ce résultat est que tout résultat concernant le rang d'une matrice, énoncé en termes de colonnes de cette matrice, peut aussi être énoncé en termes de lignes. Par exemple, pour $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,*

rg(A) est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A
rg(A) est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes de A

rg$(A)=n\Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\Leftrightarrow$ les lignes de A forment une famille libre de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

rg$(A)=p\Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\Leftrightarrow$ les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

et si de plus $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

rg$(A)=n\Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\Leftrightarrow$ les lignes de A forment une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$

◇ *Il faut concrétiser le fait que rg$(A)=$ rg$\left(A^T\right)$. Construisons une matrice A carrée de format 3 et de rang 2 en plaçant d'abord 2 colonnes non colinéaires puis en mettant en troisième colonne la somme des deux autres :*

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 5 & 7 & 12\end{pmatrix}.$$

La famille des lignes de cette matrice doit aussi être de rang 2 et donc, puisque les deux premières lignes sont non colinéaires, et bien que nous n'ayons rien fait pour ça, la troisième ligne doit être une combinaison linéaire des deux premières. De fait, $L_3=\dfrac{1}{2}L_1+\dfrac{11}{4}L_2$ (nous n'avons vraiment pas fait exprès).

On peut alors rappeler et compléter les transformations d'une matrice ne modifiant pas le rang.

Les transformations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice, ne modifiant pas le rang de cette matrice sont :

- Echange de deux colonnes. L'échange de la colonne i et de la colonne j $(i\neq j)$: $C_i\leftrightarrow C_j$.
  Echange de deux lignes. L'échange de la ligne i et de la ligne j $(i\neq j)$: $L_i\leftrightarrow L_j$.

- Multiplier une colonne par un nombre $\lambda \neq 0$: $C_j \leftarrow \lambda C_j$.
  Multiplier une ligne par un nombre $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Ajouter une colonne à une autre : $C_j \leftarrow C_j + C_i$ $(i \neq j)$.
  Ajouter une ligne à une autre : $L_i \leftarrow L_i + L_j$ $(i \neq j)$.

les transformations moins élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice, ne modifiant pas le rang de cette matrice :

- Permuter des colonnes : pour toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$, $\text{rg}\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_p \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & \dots & C_{\sigma(p)} \end{pmatrix}$.

  Permuter des lignes : pour toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$, $\text{rg}\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

- Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes : $C_j \leftarrow C_j + \displaystyle\sum_{i \neq j} \lambda_i C_i$.

  Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes : $L_i \leftarrow L_i + \displaystyle\sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$.

On peut appliquer la transformation $C_i \leftarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j$ sans changer le rang si on prend bien garde au fait que λ_i (le coefficient de C_i) soit **non nul**. De même pour les lignes.

Enfin, on ne change pas le rang d'une matrice quand :

- on supprime une colonne de 0 ou une ligne de 0 (la nouvelle matrice a alors un format différent du format de départ),
- On supprime une colonne (ou une ligne) qui est égale ou plus généralement colinéaire à une autre colonne (ou une autre ligne).
- On supprime une colonne (ou une ligne) qui est combinaison linéaire d'autres colonnes (ou d'autres lignes).

Exercice 6. Soit $p \geqslant 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & & & & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & \iddots & \iddots & \vdots \\ & & 0 & a & b & 0 & & & \\ & & 0 & b & a & 0 & & & \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & & & & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{C})$.

Déterminer $\text{rg}(A)$ en fonction de a et b.

Solution 6. On effectue les transformations : $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j}$. On obtient

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} a+b & 0 & \dots & & & & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & \iddots & \iddots & \vdots \\ & & 0 & a+b & b & 0 & & & \\ & & 0 & a+b & a & 0 & & & \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ a+b & 0 & \dots & & & & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

- Si $a+b=0$ ou encore si $b=-a$, en supprimant les colonnes de 0 puis en supprimant les p premières lignes, chacune étant colinéaire à l'une des p dernières, on a

$$\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ -a & 0 & & \\ a & 0 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}=\text{rg}\left(aI_p\right).$$

Si $b=-a\neq 0$, $\text{rg}(A)=p$ et si $a=b=0$, $\text{rg}(A)=0$.

• Si $a+b\neq 0$ ou encore si $b\neq -a$,

$$\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & b & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & a & 0 & & & \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & & & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

On effectue les transformations : $\forall i\in[\![p+1,2p]\!]$, $L_i\leftarrow L_i-L_{2p+1-i}$. On obtient

$$\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & \iddots & \iddots & \vdots \\ & & & 1 & b & 0 & & & \\ & & & 0 & a-b & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Si $b\neq a$ (et $b\neq -a$), $\text{rg}(A)=2p$ (matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls). Si $a=b\neq 0$, en supprimant les p dernières lignes qui sont nulles puis les p dernières colonnes, chacune colinéaire à l'une des p premières, on obtient $\text{rg}(A)=\text{rg}\left(I_p\right)=p$.

En résumé,

- Si $b\neq a$ et $b\neq -a$, $\text{rg}(A)=2p$ et en particulier, A est inversible.
- Si $b=a\neq 0$ ou $b=-a\neq 0$, $\text{rg}(A)=p$.
- Si $a=b=0$, $\text{rg}(A)=0$.

Exercice 7. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ puis $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit B la matrice diagonales par blocs définie par

$B=\begin{pmatrix} A & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & A \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (où $p\in\mathbb{N}^*$ et 0_n est la matrice nulle de format n).

Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

Solution 7. Soit $r=\text{rg}(A)\in[\![0,n]\!]$. Si $r=0$, alors $A=0$ puis $B=0$ et donc $\text{rg}(B)=0$. On suppose maintenant $r\in[\![1,n]\!]$.

Il existe $(P_1,Q_1)\in\left(GL_n(\mathbb{K})\right)^2$ tel que $A=Q_1J_rP_1$.

On pose $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & P_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & P_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & Q_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & Q_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Un calcul par blocs montre que P et Q sont inversibles, d'inverses respectifs $\begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & Q_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & Q_1^{-1} \end{pmatrix}$.

De nouveau, un calcul par blocs fournit $A = Q \begin{pmatrix} J_r & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & J_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & J_r \end{pmatrix} P$ puis $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} J_r & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & J_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & J_r \end{pmatrix}$. En supprimant les colonnes nulles puis les lignes nulles, on obtient

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} I_r & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & I_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & I_r \end{pmatrix} = \text{rg}\left(I_{pr}\right) = pr = p\ \text{rg}(A),$$

ce qui reste vrai quand $r = 0$.

On a montré que $\text{rg}(B) = p\ \text{rg}(A)$.

3.5 Matrices extraites. Une autre caractérisation du rang

3.5.1 Définition d'une matrice extraite

On se donne une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une **matrice extraite** de la matrice A est une matrice de la forme $A_{I,J} = (\alpha_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant m \\ 1\leqslant l\leqslant q}}$ où

- $(m, q) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,
- $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subset [\![1, n]\!]$ avec $i_1 < \dots < i_m$,
- $J = \{j_1, \dots, j_q\} \subset [\![1, p]\!]$ avec $j_1 < \dots < j_q$,
- $\forall (k, l) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, q]\!],\ \alpha_{k,l} = a_{i_k, j_l}$.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de format 2, extraite de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Elle est obtenue en « barrant puis supprimant » dans la matrice A les colonnes 1 et 3 et la ligne 3. ❏

3.5.2 Caractérisation du rang comme le format maximal d'une matrice extraite inversible

Théorème 30. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Le rang de A est le format maximum d'une matrice carrée extraite de A et inversible.

Plus explicitement, si $r \in [\![1, \text{Min}\{n, p\}]\!]$,
$\text{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible et toute matrice carrée extraite de A de format strictement supérieur à r est non inversible.

Démonstration . Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A.

• Soit $r \in [\![1, \text{Min}\{n, p\}]\!]$. On suppose qu'il existe une matrice carrée de format r, extraite de A et inversible. Quite à permuter les colonnes de A puis les lignes de A, ce qui ne modifie pas le rang de A, on peut supposer que la matrice extraite $A' = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ est inversible. Montrons que la famille $(C_1, \dots, C_r)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soient $C_1', \dots, C_r'$, les vecteurs $C_1, \dots, C_r$ tronqués à la r-ème composante (si pour $j \in [\![1, r]\!]$, $C_j = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$, alors $C_j' = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant r}$). La matrice $A' = \begin{pmatrix} C_1' & \dots & C_r' \end{pmatrix}$ est une matrice carrée inversible. Donc, $(C_1', \dots, C_r')$ est une base de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ et en particulier une famille libre de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Mais alors, pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$,

$$\sum_{j=1}^{r}\lambda_j C_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{r}\lambda_j C'_j = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1,r]\!],\ \lambda_j = 0.$$

La famille $(C_1,\dots,C_r)$ est donc une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On en déduit que $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$.

• Réciproquement, supposons que $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$. Il existe r colonnes de A constituant une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Quite à permuter les colonnes de A, ce qui ne modifie pas le rang de A, on peut supposer que $(C_1,\dots,C_r)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit $A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathrm{rg}(A_1) = r$ et donc, on peut trouver r lignes de A_1 constituant une famille libre de $\mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{K})$. Soit A' la matrice carrée de format r constituée de ces r lignes. A' est une matrice carrée de format r, extraite de A et de plus A' est inversible car de rang r.

On a montré que $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r, extraite de A et inversible.

Puisque, $\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$ et $\mathrm{rg}(A) \not\geqslant r+1$, on en déduit que $\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r, extraite de A et inversible et toute matrice carrée de format strictement supérieur à r, extraite de A, est non inversible.

❏

On peut améliorer le théorème 30 en limitant le nombre de vérifications :

Théorème 31. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Soit $r \in [\![1, \mathrm{Mi}\{n,p\}-1]\!]$.

$\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible et toute matrice carrée extraite de A de format $r+1$ est non inversible.

Démonstration . L'implication de gauche à droite est une conséquence du théorème 30.

Inversement, supposons qu'il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible et que toute matrice carrée extraite de A de format $r+1$ est non inversible. Puisqu'il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible, on a $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$. Mais on ne peut avoir $\mathrm{rg}(A) \geqslant r+1$, car sinon il existe une matrice carrée de format $r+1$ extraite de A et inversible. Ceci montre que $\mathrm{rg}(A) = r$.

❏

4 Trace

4.1 Trace d'une matrice carrée

Définition 5. Soient $n \geqslant 1$ puis $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La **trace** de la matrice A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Théorème 32. La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B).$$

Démonstration . Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B).$$

❏

Théorème 33. $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Démonstration . Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Le coefficient ligne i, colonne i, de AB est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}$ et le coefficient ligne j, colonne j, de BA est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j}$. Donc

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j}\right) = \mathrm{Tr}(BA).$$

❑

Exercice 8. Existe-t-il $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB - BA = I_n$?

Solution 8. Non, car pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0 \neq n = \mathrm{Tr}(I_n)$.

Théorème 34. Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ puis $B = P^{-1}AP$.

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \mathrm{Tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(A).$$

❑

Si A, B et C sont trois matrices carrées, on a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$ car par exemple $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}((AB)C) = \mathrm{Tr}(C(AB)) = \mathrm{Tr}(CAB)$. Mais en général, $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$.
Par exemple, prenons $A = E_{1,2}$, $B = E_{2,2}$, $C = E_{2,1}$. Alors, $ABC = E_{1,1}$ et donc $\mathrm{Tr}(ABC) = 1$ et $ACB = 0$ et donc $\mathrm{Tr}(ACB) = 0$.

Exercice 9.

1) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sont -elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

2) Les matrices $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ sont -elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Solution 9.

1) $\mathrm{Tr}(A) = 4 + 2 + 1 = 7$ et $\mathrm{Tr}(B) = -2 + 1 + 2 = 1$. $\mathrm{Tr}(A) \neq \mathrm{Tr}(B)$ et donc A et B ne sont pas semblables.

2) Pour $P \in GL_3(\mathbb{C})$, $P^{-1}I_3P = I_3$ ou encore une matrice semblable à I_3 est égale à I_3. On en déduit que I_3 et A ne sont pas semblables. Pourtant, $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 4 - 2 = 3 = \mathrm{Tr}(I_3)$.

Ainsi, deux matrices carrées peuvent avoir mettre trace sans être semblables. La réciproque du théorème 34 est fausse.

4.2 Trace d'un endomorphisme

Théorème 35. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Alors, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

Démonstration. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Les formules de changement de base fournissent $A' = P^{-1}AP$. Les matrices A et A' sont semblables et on en déduit que ces matrices ont même trace.

❑

Ainsi, le nombre $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ (ce nombre ne dépend que de f). Ceci motive la définition suivante :

Définition 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

La **trace** de f, notée $\mathrm{Tr}(f)$, est la trace de sa matrice dans une base donnée $\mathcal{B}$ de E.

On peut exprimer la trace d'un endomorphisme à l'aide des formes coordonnées : si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base donnée de E, alors

$$\mathrm{Tr}(f)=\sum_{i=1}^{n} e_i^*\left(f\left(e_i\right)\right).$$

D'après le théorème 35, le nombre $\mathrm{Tr}(f)$ ne dépend pas de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ choisie.

Le théorème qui suit montre que la trace peut avoir une signification très concrète.

Théorème 36. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soit p une projection.

Alors, $\mathrm{Tr}(p)=\mathrm{rg}(p)$ (la trace d'un projecteur est son rang).

Démonstration. Si $\mathrm{rg}(p)=0$, alors $p=0$ puis $\mathrm{Tr}(p)=0=\mathrm{rg}(p)$. Si $\mathrm{rg}(p)=n$, alors $p=\mathrm{Id}_E$ (car par exemple, $\mathrm{rg}(p)=n\Rightarrow p\in GL(E)$ puis $p^2=p\Rightarrow p=\mathrm{Id}_E$). Dans ce cas, $\mathrm{Tr}(p)=n=\mathrm{rg}(p)$.

On suppose dorénavant que $\mathrm{rg}(p)=r\in[\![1,n-1]\!]$. Dans une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E=\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Ker}(p)$, la matrice A de p est $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r}\end{pmatrix}$. Mais alors, $\mathrm{Tr}(p)=\mathrm{Tr}(A)=r=\mathrm{rg}(p)$.

❏

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

$A^2=\dfrac{1}{81}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{81}\begin{pmatrix}9&18&18\\18&36&36\\18&36&36\end{pmatrix}=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}=A$. Donc, $f^2=f$ et f est une projection.

$$\mathrm{rg}(f)=\mathrm{Tr}(f)=\frac{1}{9}(1+4+4)=1,$$

(ce qui est encore plus immédiat ici à partir de la matrice mais dans le cas général, la trace est certainement plus facile à calculer que le rang). Ainsi, f est une projection sur une droite parallèlement à un plan.

Plus explicitement, f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(u)$ où $u=e_1+2e_2+2e_3$ (obtenu à partir des colonnes de la matrice et en particulier de la première) parallèlement au plan d'équation $x+2y+2z=0$ (obtenu à partir des lignes de la matrice et en particulier de la première).

❏

