Planche n° 26. Matrices (partie I)

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (*I)**

On pose $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1) Calculer J^2. En déduire J^n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

2) Exprimer A en fonction de I_3 et J. En déduire A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

3) a) A l'aide de 1), déterminer deux réels α et β tels que $A^2+\alpha A+\beta I_3=0$.

b) En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

4) Application :

a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites définies par

$$u_0=1,\ v_0=0,\ w_0=2 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{l}u_{n+1}=2u_n+v_n+w_n\\v_{n+1}=u_n+2v_n+w_n\\w_{n+1}=u_n+v_n+2w_n\end{array}\right..$$

Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l}2x+y+z=5\\x+2y+z=1\\x+y+2z=-1\end{array}\right.$ (S).

Exercice n° 2 : (I)**

Pour x réel, on pose

$$A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif (on calculera d'abord $A(x)\times A(y)$ pour x et y réels donnés).

Exercice n° 3 : (***)

Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&1\\0&&\iddots&1&0\\\vdots&\iddots&\iddots&\iddots&\vdots\\0&1&0&&0\\1&0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

1) Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, exprimer le coefficient $a_{i,j}$ de A situé ligne i, colonne j.

2) Calculer A^2. Que peut-on en déduire ?

3) Calculer A^n pour n entier relatif.

Exercice n° 4 : (***)

1) Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b$ et $\operatorname{sh}(a+b)=\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b+\operatorname{ch}a\operatorname{sh}b$.

2) Montrer que $\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1&x\\x&1\end{pmatrix},\ x\in]-1,1[\right\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices (on posera $x=\operatorname{th}a$).

Exercice n° 5 : (***)

Soient $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ puis $E=\{M(x,y)=xI+yJ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

1) Montrer que $(E,+)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

2) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

3) Montrer que pour tout $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$, $M(x,y)=M(x',y')\Leftrightarrow x=x'$ et $y=y'$.

4) Quels sont les inversibles de l'anneau $(E, +, \times)$?

5) Résoudre dans E les équations suivantes :

$$\text{a) } X^2 = I_2 \quad \text{b) } X^2 = 0 \quad \text{c) } X^2 = X.$$

6) Calculer $(M(x, y))^n$ pour n entier naturel non nul.

Exercice n° 6 : (***)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ $(n \geqslant 2)$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{array}\right. .$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice n° 7 : (*I)**

Déterminer l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (utiliser les matrices élémentaires).

Exercice n° 16 : (*I)** (Matrice de VANDERMONDE des racines n-ièmes de l'unité).

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$, $(n \geqslant 2)$. Soit $A = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (calculer d'abord $A\overline{A}$).

Exercice n° 18 : (I)**

On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n. En déduire u_n et v_n en fonction de n.

2) En utilisant deux combinaisons linéaires intéressantes des suites u et v, calculer directement u_n et v_n en fonction de n.

