FICHE n° 26. INFORMATIONS CHIFFRÉES

I Calculs de proportions

A Effectifs, proportions, fréquences, pourcentages

Définition 1

Soient E une population puis A une partie de E.

L'**effectif** de la sous-population A est le nombre d'individus de cette sous-population.
L'effectif de la population E est noté n_{E} et l'effectif de la sous-population A est noté n_{A}.
L'effectif de la population E est l'**effectif total** et celui de la sous-population A est un **effectif partiel**.

Définition 2

Soient E une population puis A une sous-population (ou un sous-ensemble) de E.

La **proportion** ou la **fréquence** de la sous-population A dans la population E est le quotient de l'effectif de la sous-population A par l'effectif de la population E.

Si on note t cette proportion (t est l'initiale de « taux »), alors $t = \dfrac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}}$ (ou aussi si on note f la fréquence $f = \dfrac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}}$).

On a donc les trois égalités, à utiliser en fonction des données : $t = \dfrac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{E}}}$, $n_{\mathrm{A}} = t \times n_{\mathrm{E}}$ et $n_{\mathrm{E}} = \dfrac{n_{\mathrm{A}}}{t}$.

Définition 3

Soient E une population puis A une sous-population (ou un sous-ensemble) de E. Soit t (pour « taux ») la proportion de la sous-population A dans la population E.

Le **pourcentage** de la sous-population A dans la population E est le réel p tel que $t = \dfrac{p}{100}$.

Théoreme 1

Soient E une population puis A une sous-population (ou un sous-ensemble) de E. Soient t (pour « taux ») la proportion de la sous-population A dans la population E et p le pourcentage de la sous-population A dans la population E.

Alors, $p = 100 \times t$ puis $n_{\mathrm{A}} = t \times n_{\mathrm{E}} = \dfrac{p}{100} \times n_{\mathrm{E}}$.

B Proportions de proportions ou pourcentages de pourcentages

Théoreme 2

Soit E une population. Soient A une sous-population de E puis B une sous-population de A.

Soient t_{A} la proportion de la sous-population A dans la population E puis $t_{\mathrm{B/A}}$ la proportion de la sous-population B dans la population A. Alors, la proportion t_{B} de B dans E est $t_{\mathrm{A}} \times t_{\mathrm{B/A}}$:

$$t_{\mathrm{B}} = t_{\mathrm{A}} \times t_{\mathrm{B/A}}.$$

Soient p_{A} la pourcentage d'éléments de A dans E puis $p_{\mathrm{B/A}}$ la pourcentage d'éléments de B dans A. Alors, la pourcentage p_{B} d'éléments de B dans E est donné par :

$$p_{\mathrm{B}} = \frac{p_{\mathrm{A}} \times p_{\mathrm{B/A}}}{100}.$$

Ainsi, 10% de 10% c'est-à-dire $10\% \times 10\%$ sont 1%. Pour calculer un pourcentage de pourcentage, le plus simple est de calculer une proportion de proportion (qui s'obtient en multipliant les taux) puis de multiplier par 100 la proportion obtenue.

II Evolutions

A Variation absolue et variation relative (ou taux d'évolution)

Définition 4

Une certaine quantité évolue d'une valeur initiale strictement positive V_i à une valeur finale strictement positive V_f.

La **variation absolue** de cette quantité est $V_f - V_i$ (valeur finale moins valeur initiale).

La **variation relative** ou **taux d'évolution** de cette quantité est $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$ c'est-à-dire le quotient de la variation absolue par la valeur initiale.

B Coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution

Définition 5

Au cours d'une évolution, le **coefficient multiplicateur** est $C_M = \dfrac{V_f}{V_i}$.

Théoreme 3

$C_M = 1 + t$ puis $V_f = C_M \times V_i = (1+t)V_i$.

C Evolution en pourcentage

Définition 6

Soient V_i et V_f les valeurs initiale et finale d'une certaine quantité puis $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$ le taux d'évolution.

Le pourcentage d'évolution est $p = 100 \times t$.

Théoreme 4

$V_f = \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)V_i$ (si $p < 0$, on a une diminution et si $p > 0$, on a une augmentation). On peut détailler :

Soit p un réel strictement positif. Augmenter une valeur V_i de $p\%$, c'est multiplier V_i par $1 + \dfrac{p}{100}$: $V_f = \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)V_i$.

Soit p un réel de $]0, 100]$. Diminuer une valeur V_i de $p\%$, c'est multiplier V_i par $1 - \dfrac{p}{100}$: $V_f = \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)V_i$.

D Evolutions successives

Théoreme 5

Une certaine quantité Q a une valeur initiale (strictement positive) V_i et subit deux évolutions successives. On note t_1 et t_2 les taux d'évolution respectifs associés à chacune des deux évolutions. On note encore V_f la valeur finale de la quantité Q. Alors,

$$V_f = (1+t_1)(1+t_2)V_i.$$

Plus généralement, si la quantité Q subit n évolutions successives (où n est un entier supérieur ou égal à 2) et si t_1, t_2, ..., t_n, sont les taux d'évolution respectifs (taux positifs en cas d'augmentation et négatifs en cas de diminution) et p_1, ..., p_n, les pourcentages correspondants, associés à chacune des n évolutions, alors

$$V_f = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)V_i = \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\dots\left(1 + \frac{p_n}{100}\right)V_i.$$

E Evolutions réciproques

Définition 7

Une quantité Q subit une évolution qui la fait passer d'une valeur V_1 à une valeur V_2. L'**évolution réciproque** est l'évolution qui refait passer la quantité Q de la valeur V_2 à la valeur V_1.

Théoreme 6

Soient t le taux de l'évolution qui fait passer d'une valeur V_1 strictement positive à une valeur V_2 strictement positive et t' le taux de l'évolution qui fait passer de la valeur V_2 à la valeur V_1 (évolution réciproque). Alors,

$$(1+t)(1+t') = 1$$

et donc aussi

$$t' = \frac{1}{1+t} - 1.$$