Chapitre 26. Dimension d'un espace vectoriel

Plan du chapitre

1 Définition de la dimension d'un espace vectoriel

1.1 Espaces de dimension finie

On va dire plus loin dans le chapitre que la dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs d'une base de cet espace. Mais pour énoncer une telle phrase, on doit franchir deux problèmes.

- on ne sait pas si deux bases d'un même espace ont le même nombre d'éléments.
- on ne sait pas si un espace donné admet au moins une base.

Par contre, un espace E donné admet toujours au moins une famille génératrice, à savoir une famille de vecteurs constituée de tous les vecteurs de E (la partie E est génératrice de E). Ceci nous conduit à la définition initiale suivante :

Définition 1. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

E est **de dimension finie** sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe une famille finie de vecteurs de E, génératrice de E.

Exemples.

• $(\{0\}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie car $\{0\}$ admet la famille finie (0) pour famille génératrice. Une autre famille génératrice est la famille vide $\varnothing$.

• $(\mathbb{K}^n, +, .)$ est de dimension finie car la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à savoir $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ où, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est en particulier une famille génératrice finie de $\mathbb{K}^n$.

• $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ est de dimension finie car la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ à savoir $\mathcal{B} = \left(X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est en particulier une famille génératrice finie de $\mathbb{K}_n[X]$.

❏

1.2 Le théorème de la dimension finie

On va maintenant démontrer qu'en dimension finie, il existe au moins une base et que deux bases de E ont le même nombre d'éléments. Les théorèmes 1 et 2 préparent le terrain.

Le nombre d'éléments d'un ensemble A s'appelle le **cardinal** de A et se note $\text{card}(A)$ ou aussi $\#(A)$. L'ensemble A est dit fini si et seulement si il est constitué d'un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, l'ensemble A est dit infini. La notion de cardinal d'un ensemble sera étudiée en détail dans le chapitre « Dénombrements ». Nous nous contenterons ici d'une vision intuitive de la notion de cardinal d'un ensemble avec des résultats évidents comme par exemple : si A et B sont deux ensembles finis (ayant un nombre fini d'éléments) tels que $A \subset B$ alors $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$.

Dans ce qui suit, nous identifions les notions de familles de vecteurs et ensembles de vecteurs pour ne pas compliquer les notations.

Théorème 1. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit G une famille génératrice de E, finie de cardinal $m \in \mathbb{N}$

Pour toute famille libre L, $\text{card}(L) \leqslant m$.

Démonstration. Si $m = 0$, alors $G = \varnothing$ puis $E = \{0\}$. Si L est une famille libre, L ne peut contenir aucun vecteur de E et donc $L = \varnothing$. Dans ce cas, $\text{card}(L) \leqslant m$.
Supposons $m \geqslant 1$. Soit L une famille libre. Si par l'absurde $\text{card}(L) \geqslant m+1$, alors L contiendrait une sous-famille de $m+1$ vecteurs, tous combinaisons linéaires des m vecteurs de G. L contiendrait donc une sous-famille liée (d'après le théorème 32, page 23, du chapitre précédent) et finalement L serait liée ce qui est faux. Donc, $\text{card}(L) \leqslant m$.

❏

Théorème 2. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie. Soient L une famille libre et G une famille génératrice de E telles que $L \subset G$.

Il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$.

Démonstration. Soient $\mathcal{L} = \{L' \in \mathcal{P}(E) / \ L \subset L' \subset G \text{ et } L' \text{ libre}\}$ puis $\mathcal{C} = \{\text{card}(L'),\ L' \in \mathcal{L}\}$.

$\mathcal{C}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $\text{card}(L) \in \mathcal{C}$) et majorée (par le cardinal d'une famille génératrice finie donnée d'après le théorème 1). Donc, $\mathcal{C}$ admet un plus grand élément que l'on note n. Soit B un élément de $\mathcal{L}$ de cardinal n. B est donc une famille libre telle que $L \subset B \subset G$. Vérifions que B est une base de E. Il reste à établir pour cela que B est une famille génératrice de E.

Si $G = \varnothing$, alors $E = \{0\}$ puis $B = \varnothing$ est une base de E.

Sinon, soit $x \in G$. Si x est l'un des vecteurs de B, alors $x \in \text{Vect}(B)$. Si x n'est pas un vecteur de B, la famille $B' = B \cup \{x\}$ contient $n+1$ vecteurs et vérifie $L \subset B' \subset G$. Par définition de n, B' est liée.

Ainsi, B est libre et $B' = B \cup \{x\}$ est liée. On sait alors que $x \in \text{Vect}(B)$. On a montré que tout x de G est combinaison linéaire des vecteurs de B ou encore $G \subset \text{Vect}(B)$. On en déduit que $E = \text{Vect}(G) \subset \text{Vect}(B)$ et finalement que $\text{Vect}(B) = E$.

On a montré que B est libre et génératrice de E. Donc, B est une base de E telle que $L \subset B \subset G$.

❑

Théorème 3 (le théorème de la dimension finie). Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Il existe au moins une base B de E.

2) Deux bases ont le même nombre d'éléments et ce nombre d'éléments est fini.

Démonstration .

1) La famille $L = \varnothing$ est libre et la « famille » $G = E$ est génératrice de E. D'après le théorème 2, il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$. En particulier, il existe au moins une base de E.

2) Soient B_1 et B_2 deux bases de E. B_1 et B_2 sont en particulier libres et ont donc un nombre fini d'éléments d'après le théorème 1. B_1 est une famille libre et B_2 est une famille génératrice finie de E. Donc, $\text{card}(B_1) \leqslant \text{card}(B_2)$. En échangeant les rôles de B_1 et B_2, on a aussi $\text{card}(B_2) \leqslant \text{card}(B_1)$ et finalement, $\text{card}(B_1) = \text{card}(B_2)$.

❑

⇨ **Commentaire** . *Si on trouve que la démonstration précédente n'est pas convaincante car cette démonstration s'appuye sur une une convention « arbitraire », à savoir « $\varnothing$ est libre », on peut séparer le cas de l'espace nul. Si* $E = \{0\}$, E *admet (conventionnellement) au moins une base, à savoir* $B = \varnothing$*, qui est d'ailleurs l'unique base de* E.
Sinon, E *contient au moins un vecteur non nul* u. *La famille* $L = (u)$ *est libre et donc il existe une base* B *telle que* $L \subset B \subset G = E$. *La base* B *fournie contient alors un vecteur* u *imposé à l'avance.*

Définition 2. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

La **dimension** de E est le cardinal d'une base de E. Elle se note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou plus simplement $\dim(E)$.

1.3 Quelques dimensions usuelles

• $\dim_{\mathbb{K}}\{0\} = 0$. Une base de l'espace vectoriel $\{0\}$ est $\varnothing$.

• $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$. Une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ est (1).

• $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. Une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est (1). $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est $(1, i)$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$. En effet, on sait que si pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$, alors $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

• $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$. Une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$, constituée des matrices élémentaires. Il y a effectivement $n \times p$ matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$. La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $\left(X^k\right)_{0 \leqslant n}$.

• Si a est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = 0$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. En effet, les solutions sont de la forme $\{\lambda f_0,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$ où f_0 est une solution non nulle de (E) sur I ou encore une base de $\mathcal{S}$ est (f_0).

• Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $a \neq 0$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

• Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $a \neq 0$. L'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

1.4 Familles libres, familles génératrices, bases en dimension finie

Pour énoncer les théorèmes qui suivent, il nous manque deux résultats issus du chapitre « Dénombrements ». On admet momentanément les résultats très intuitifs suivants :

- si A et B sont deux ensembles ayant un nombre fini d'éléments tels que $B \subset A$, alors $\text{card}(B) \leqslant \text{card}(A)$.
- si A et B sont deux ensembles ayant un nombre fini d'éléments tels que $B \subset A$, alors $B = A \Leftrightarrow \text{card}(B) = \text{card}(A)$.

Théorème 4. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit L une famille libre de E.

1) $\text{card}(L) \leqslant n$.
2) Il existe une base B de E qui est une sur-famille de L (théorème de la base incomplète).
3) L est une base de E si et seulement si $\text{card}(L) = n$.

Démonstration .

1) E admet une base B de cardinal n qui est en particulier une famille génératrice finie de cardinal n et on a déjà dit (théorème 1) que le cardinal d'une famille libre doit être de cardinal inférieur ou égal à $\text{card}(B) = n$.

2) L est une famille libre et $G = E$ est une « famille » génératrice de E. Il existe une base B telle que $L \subset B \subset E$. En particulier, il existe une base B de E tell que $L \subset B$.

3) Si de plus $\text{card}(L) = n = \text{card}(B)$ (et $L \subset B$), alors $L = B$ d'après l'un des résultats admis précédant ce théorème. L est donc une base de E. Réciproquement, si L est une base E, alors $\text{card}(L) = n$.

❑

Exemple. On a vu qu'une famille de polynômes tous non nuls de degrés deux à deux distincts était libre. En particulier, si $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de $n+1$ polynômes telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$, alors $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ de l'espace $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ qui est de dimension finie égale à $n+1$. On en déduit que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de l'espace $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$. Ainsi par exemple, pour $a \in \mathbb{K}$ donné, la famille $\left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Rappelons que la formule de Taylor fournit les coordonnées d'un élément quelconque P de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

❑

Le théorème de la base incomplète est un théorème très important qui doit être réénoncé sous une forme plus explicite :

Théorème 5 (théorème de la base incomplète).

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit L une famille libre de E.

L peut être complété en une base de E.

Par exemple, si $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$, la famille (u_1, u_2) est une famille libre de cardinal 2 de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Le théorème de la base incomplète n'affirme pas que pour tout vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$, la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (par exemple, si $u_3 = (0, 1, -1)$ de sorte que $u_3 = u_1 - u_2$, la famille (u_1, u_2, u_3) est liée). Le théorème de la base incomplète affirme qu'il est possible de trouver dans $\mathbb{R}^3$ un vecteur u_3 tel que la famille (u_1, u_2, u_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, $u_3 = (0, 0, 1)$ convient (montrez-le).

Théorème 6. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit G une famille génératrice de E.

1) $\text{card}(G) \geqslant n$.
2) Il existe une base B de E qui est une sous-famille de G.
3) G est une base de E si et seulement si $\text{card}(G) = n$.

Démonstration .

$\varnothing$ est une famille libre et G est une famille génératrice de E. Il existe une base B telle que $\varnothing \subset B \subset G$. En particulier, il existe une base B de E telle que $B \subset G$. En particulier, $\text{card}(G) \geqslant n$.
Si de plus $\text{card}(G) = n = \text{card}(B)$ (et $B \subset G$), alors $G = B$ d'après l'un des résultats admis au début du paragraphe. G est donc une base de E. Réciproquement, si G est une base E, alors $\text{card}(G) = n$.

❑

On peut résumer les théorèmes 4 et 6. Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E, $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si deux des trois propositions ci-dessous sont vraies :

I - $\mathcal{F}$ est libre,
II - $\mathcal{F}$ est génératrice de E,
III - $\text{card}(\mathcal{F}) = n$.

Exercice 1. On pose $P_0 = X^3$, $P_1 = X^2(1-X)$, $P_2 = X(1-X)^2$ et $P_3 = (1-X)^3$.

Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{R}_3[X]$ dans cette base.

Solution 1. P_0, P_1, P_2 et P_3 sont quatre polynômes de degré 3 ou encore (P_0, P_1, P_2, P_3) est une famille de 4 éléments de $\mathbb{R}_3[X]$. Puisque $\text{card}\,(P_0, P_1, P_2, P_3) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X]) < +\infty$, pour montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, il suffit de vérifier que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $aX^3+bX^2(1-X)+cX(1-X)^2+d(1-X)^3 = 0$. En évaluant en 0 ou en 1, on obtient $d = a = 0$. Il reste $bX^2(1-X) + cX(1-X)^2 = 0$ ou encore $bX + c(1-X) = 0$ après simplification par le polynôme non nul $X(1-X)$. En évaluant de nouveau en 0 ou en 1, on obtient $b = c = 0$.

On a montré que : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ (aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3 = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0)$. Par suite, la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre et finalement la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit alors $P \in \mathbb{R}_3[X]$. P s'écrit de manière unique sous la forme $P = aX^3+bX^2(1-X)+cX(1-X)^2+d(1-X)^3$. En évaluant en 0 ou en 1, on obtient $d = P(0)$ et $a = P(1)$. En dérivant puis en évaluant en 0 ou en 1, on obtient $c - 3d = P'(0)$ et $3a - b = P'(1)$ et donc $c = 3P(0) + P'(0)$ et $b = 3P(1) - P'(1)$. Finalement,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ P = P(1)X^3 + (3P(1) - P'(1))\,X^2(1-X) + (3P(0) + P'(0))\,X(1-X)^2 + P(0)(1-X)^3.$$

On donne ci-dessous une autre caractérisation des familles libres ou génératrices qui sont des bases.

DÉFINITION 3. Soit E un ensemble. Une partie A de E vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ est dite **maximale** (resp. **minimale**) **pour l'inclusion** si et seulement si pour toute partie B de E, si B vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et si $A \subset B$ (resp. $B \subset A$), alors $B = A$.

Théorème 7. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Les bases de E sont les familles libres, maximales pour l'inclusion.
Les bases de E sont les familles génératrices de E, minimales pour l'inclusion.

DÉMONSTRATION. Le théorème est clair si $E = \{0\}$. On suppose dorénavant que E est de dimension n supérieure ou égale à 1.

• Soit $L = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E, maximale pour l'inclusion. Montrons que L est une famille génératrice de E.
Soit $x \in E$. Si x est l'un des u_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, alors $x \in \text{Vect}(L)$. Soit $x \notin L$. Puisque la famille L est maximale pour l'inclusion, la famille $L' = (u_1, \dots, u_p, x)$ n'est plus libre. Ainsi, $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et $(u_1, \dots, u_p, x)$ est liée. On en déduit encore une fois que $x \in \text{Vect}(L)$.
Finalement, L est génératrice de E et libre. L est une base de E.

• Soit $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E. B est libre. Montrons que B est libre, maximale pour l'inclusion.
Soient $x \in E \setminus \{u_1, \dots, u_n\}$ puis $C = (u_1, \dots, u_n, x)$. Puisque B est une base de E, $x \in \text{Vect}(B)$ et donc C est liée. Plus généralement, toute sur-famille stricte de B est liée et donc, B est une famille libre, maximale pour l'inclusion.

• Soit G une famille génératrice minimale pour l'inclusion. Puisque E n'est pas réduit à $\{0\}$, G n'est pas vide. Si G contient un seul vecteur x et n'est pas libre, alors $x = 0$ ce qui est exclu. Donc, G est libre dans ce cas.
Si G contient au moins deux vecteurs et n'est pas libre, G contient un vecteur x combinaison linéaire des autres vecteurs de G. Mais alors tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $G \setminus \{x\}$ se qui contredit le caractère minimal de G. Donc, G est libre et finalement G une base de E.

• Soit B une base de E. B est génératrice de E. Montrons que B est minimale pour l'inclusion. B n'est pas vide.
Soit x un vecteur de B puis $C = B \setminus \{x\}$. Si $x \in \text{Vect}(B \setminus \{x\})$, alors B n'est pas libre. Donc, $x \notin \text{Vect}(B \setminus \{x\})$ et donc $B \setminus \{x\}$ n'est plus génératrice de E. Ceci montre que B est génératrice de E, minimale pour l'inclusion.

❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *Il faut retenir du théorème précédent que quand on retire un vecteur d'une base, elle n'est plus génératrice de* E *et quand on ajoute (au sens réunir) un vecteur à une base, elle n'est plus libre.*

◇ *En fait, on peut démontrer que le théorème 7 est encore valable si* E *n'est pas de dimension finie. Mais nous n'avons pas voulu nous placer dans ce cadre plus général, ne serait-ce qu'à cause du problème de l'existence d'une base.*

1.5 Produit cartésien d'espaces de dimension finie

Théorème 8.

1) Soient $n \geqslant 2$ puis $(E_1, +, .)$, ... $(E_n, +, .)$ n espaces vectoriels de dimension finie. Alors, $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$.

2) Soient $n \geqslant 2$ puis $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors, E^n est de dimension finie et $\dim(E^n) = n \times \dim(E)$.

Démonstration .

1) On démontre le résultat par récurrence sur n en supposant de plus qu'aucun des E_i n'est réduit à $\{0\}$.

• Soit E et F deux espaces de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Soient $B_1 = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de E et $B_2 = (f_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ une base de F.
Montrons que $B = ((e_1, 0_F), \dots, (e_p, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_q))$ est une base de $E \times F$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{n+p}$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (e_1, 0_F) + \ldots + \lambda_p (e_p, 0_F) + \mu_1 (0_E, f_1) + \ldots + \mu_q (0_E, f_q) = (0_E, 0_F) &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j\right) = (0_E, 0_F) \\
&\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j\right) = (0_E, 0_F) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E \text{ et } \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0_F \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \text{ et } \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0.
\end{aligned}$$

Donc, B est libre. Vérifions ensuite que B est génératrice de $E \times F$. Soient $y \in E$ et $z \in F$ puis $x = (y, z)$.

Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $z = \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j$. Mais alors

$$\begin{aligned}
x = (y, z) &= \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (0_E, f_j).
\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément de $E \times F$ est combinaison linéaire des vecteurs de B ou encore B est génératrice de $E \times F$. Finalement, B est une base de $E \times F$. En particulier, $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \text{card}(B) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$. Le résultat est démontré quand $n = 2$.

• Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat pour n. Soient E_1, ..., E_{n+1} $n + 1$ espaces de dimension finie non nulle.
Alors, $\prod_{i=1}^{n+1} E_i$ « = » $\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) \times E_{n+1}$ est de dimension finie par hypothèse de récurrence et d'après le cas $n = 2$ puis $\dim\left(\prod_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) + \dim(E_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \dim(E_i)$ toujours d'après le cas $n = 2$ et par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

2) C'est la cas particulier $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$.

❑

On note que le cas particulier $E = \mathbb{K}$ refournit la dimension de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$: $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = n \times 1 = n$.

1.6 Espaces de dimension infinie

Définition 4. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

E est **de dimension infinie** si et seulement si E n'est pas de dimension finie.

Théorème 9. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

E est de dimension infinie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, E contient une famille libre de cardinal n.

Démonstration .

• Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E contient une famille libre de cardinal n. E ne peut être de dimension finie $p \in \mathbb{N}$ car E contient une famille libre de cardinal $p+1$ et le cardinal d'une famille libre doit être inférieur ou égal à p. Donc, E est de dimension infinie.

• Supposons E de dimension infinie. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E contient une famille libre de cardinal n.

- $\varnothing$ est une famille libre de cardinal 0.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'il existe une famille libre $L = (u_1, \ldots, u_n)$ de cardinal n. Si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille L, alors L est une base de E ce qui contredit le fait que E n'est pas de dimension finie. Donc, il existe un vecteur u_{n+1} de E tel que u_{n+1} n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de L.
La famille $(u_1, \ldots, u_, u_{n+1})$ est libre car si cette famille est liée, alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre puis $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est liée et donc $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ ce qui est faux.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

⇨ **Commentaire** . *Le théorème 9 peut encore être énoncé sous la forme :* E *est de dimension infinie si et seulement si* E *contient une famille infinie libre. Un problème reste non réglé : l'existence de base en dimension infinie. Ce problème ne sera pas résolu en maths sup et en maths spé. Une conséquence pratique est que quand* E *est un espace de dimension infinie quelconque, on ne peut pas démarrer une solution en disant : soit* B *une base de* E*. Néanmoins, signalons qu'en maths, pour qu'il existe des bases en dimension infinie, il a fallu créer de toutes pièces un axiome, l'« axiome du choix » qui est totalement hors programme de maths sup et maths spé.*

Citons trois exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie dans lesquels nous travaillerons pendant les deux années de classe préparatoire :

• $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre. Notons que dans cet espace, on dispose d'au moins une base à savoir la famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire, de manière unique des monômes X^k, $k \in \mathbb{N}$.

• $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. En effet, la famille de suites $\left((n^p)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est libre (avec la convention $0^p = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ si } p \geqslant 1 \end{array}\right.$). Vérifions le. Soient $k \geqslant 1$ puis $(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (n^{p_1})_{n \in \mathbb{N}} + \ldots + \lambda_k (n^{p_k})_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}} &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_1 n^{p_1} + \ldots + \lambda_k n^{p_k} = 0 \\
&\Rightarrow \text{ le polynôme } P = \lambda_1 X^{p_1} + \ldots + \lambda_k X^{p_k} \text{ a une infinité de racines} \\
&\Rightarrow \lambda_1 X^{p_1} + \ldots + \lambda_k X^{p_k} = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que toute sous-famille finie de la famille $\left((n^p)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est libre et donc que la famille $\left((n^p)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est libre.

On peut aussi démontrer que la famille $\left((q^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{q \in \mathbb{K}}$ (famille des suites géométriques) est libre. Cette famille est une nouvelle famille libre infinie de l'espace $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$. Par contre, il n'est pas question de parvenir à fournir une base de cet espace.

• $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. On peut déjà fournir la famille des fonctions $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est une famille libre de l'espace $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$ (démontrez le). Mais de nouveau, il n'est pas question de fournir une base de l'espace $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$. L'exercice suivant fournit une autre famille libre infinie, la famille des exponentielles.

Exercice 2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = e^{ax}$.

Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de l'espace $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$.

Solution 2. Soient $n \geqslant 1$ puis $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1 < \ldots < a_n$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$. Soit $k = \text{Max}\{i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$. Par définition de k, $\lambda_k \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{a_i} = 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_k e^{a_k x} + \sum_{i<k} \lambda_i e^{a_i x} = 0$ (avec la convention usuelle disant qu'une somme vide est nulle dans le cas où $k = 1$) puis, après division des deux membres par $e^{a_k x}$ (non nul pour tout réel x),

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_k + \sum_{i<k} \lambda_i e^{-(a_k - a_i)x} = 0.$$

Pour $i < k$, $-(a_k - a_i) < 0$ et donc, quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_k = 0$ ce qui est absurde. Donc, la famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

---

2 Sous-espaces d'un espace de dimension finie

2.1 Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie

Théorème 10. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-espace vectoriel de cet espace.

1) $\dim(F) \leqslant n$.

2) $F = E \Leftrightarrow \dim(F) = n$.

Démonstration .

1) Soit L une famille libre de F. L est une famille libre de E et donc $\text{card}(L) \leqslant n$. Ceci montre d'abord que F n'est pas de dimension infinie puis que le cardinal d'une base de F (qui est une famille libre de F) est inférieur ou égal à n. Donc, $\dim(F) \leqslant n$.

2) Posons $\dim(F) = p$ où p est un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Si $p = 0$, alors $F = \{0\}$ et donc $F = E \Leftrightarrow \dim(E) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \Leftrightarrow \dim(F) = n$.

Supposons maintenant $1 \leqslant p \leqslant n$. Soit $B_0 = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F.
Si $F = E$, alors $\dim(F) = n$. Réciproquement, supposons $\dim(F) = n$. Alors, $B_0 = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F. B_0 est une famille libre de E de cardinal $n = \dim(E) < +\infty$ et donc B_0 est une base de (E). On en déduit que $F = \text{Vect}\,(B_0) = E$. ❑

2.2 Paire de sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Théorème 11. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-espace vectoriel de cet espace de dimension $p \in [\![0, n]\!]$.

1) F admet au moins un supplémentaire dans E.

2) Tout supplémentaire de F dans E a pour dimension $n - p$.

Démonstration .

1) Si $F = \{0\}$, E est un supplémentaire de F dans E. Si $F = E$, $\{0\}$ est un supplémentaire de F dans E.
On suppose maintenant que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit $p = \dim(F)$. p est un entier naturel tel que $1 \leqslant p \leqslant n-1$ (ce qui impose $n \geqslant 2$). Soit $B_1 = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F. B_1 est une famille libre de E et d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille B_1 en une base $B = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E.

Soit $G_0 = \text{Vect}\,(e_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$. Montrons que F et G_0 sont supplémentaires.

• Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} x_i e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i}_{\in G_0}$. Ainsi, tout vecteur de E est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G_0 et donc $E = F + G_0$.

• Soit $x \in F \cap G_0$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i$. Mais alors, $\sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-x_i) e_i = 0$ puis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ car B est libre. Ceci montre que $F \cap G_0 \subset \{0\}$ puis $F \cap G_0 = \{0\}$.

On a montré que $E = F + G_0$ et que $F \cap G_0 = \{0\}$. F et G_0 sont supplémentaires. En particulier, F admet au moins un supplémentaire dans E. On note que le supplémentaire fourni est dans tous les cas de dimension $n - p$.

2) Soit G un supplémentaire de F dans E. Si $F = \{0\}$, alors $E = F + G = \{0\} + G = G$ et donc $G = E$. Dans ce cas, $\dim(G) = n - p$. Si $F = E$, alors $G = F \cap G = \{0\}$ et dans ce cas aussi, $\dim(G) = n - p$.

On suppose dorénavant $p = \dim(F) \in [\![1, n-1]\!]$ et $q = \dim(G) \in [\![1, n-1]\!]$ (par symétrie des rôles). Soient $B_1 = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F et $B_2 = (f_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ une base de G. Montrons que $B = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est une base de E.

• Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0 \text{ (car la somme } F + G \text{ est directe)}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0 \text{ (car } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont libres).}$$

Donc, la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est libre.

• Soit $x \in E$. Il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$ puis il existe $(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ tel que $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$ et $z = \sum_{j=1}^{q} z_j f_j$.

Mais alors, $x = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i + \sum_{j=1}^{q} z_j f_j$. Ainsi, tout élément de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$. La famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est donc génératrice de E.

Finalement, la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est une base de E et en particulier, $n = p + q$ ou encore $\dim(G) = n - p$.

❏

⇨ **Commentaire** . *Le théorème précédent affirme en particulier qu'un sous-espace d'un espace de dimension finie admet au moins un supplémentaire. Par contre, si E est de dimension infinie et F un sous-espace de E, rien ne dit que F admette au moins un supplémentaire. C'est un problème analogue au problème de l'existence d'une base en dimension infinie : en maths sup et en maths spé, si E est de dimension infinie, il est possible de se trouver dans la situation où deux sous-espaces sont supplémentaires (par exemple, l'espace des fonctions paires et l'espace des fonctions impaires sont supplémentaires dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) mais il n'est pas possible de démarrer une solution d'exercice en commençant par « soit G un supplémentaire de F » si F est un sous-espace donné.*

2.3 Dimension d'une somme (relation de Grassmann)

Le théorème suivant donne la dimension d'une somme en général.

Théorème 12 (relation de Grassmann). Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de cet espace.

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration . $F + G$ est un sous-espace de E qui est de dimension finie. Donc, $F + G$ est de dimension finie.

Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. On a donc $\dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(F')$ puis $\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$.

Vérifions que F' et G sont supplémentaires dans $F + G$ ou encore que $F + G = F' \oplus G$.

- Soit $x \in F' \cap G$. Alors, $x \in F'$ et donc $x \in F$ puis $x \in F \cap G$. On en déduit que $x \in (F \cap G) \cap F' = \{0\}$ et donc x est nul. Ceci montre que $F' \cap G = \{0\}$.
- Soit $x \in F + G$. Il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$ puis il existe $(y_1, y_2) \in F' \times (F \cap G)$ tel que $y = y_1 + y_2$. On a alors
$$y = y_1 + (y_2 + z)$$
avec $y_1 \in F'$ et $y_2 + z \in G$ car y_2 et z sont dans G. Ceci montre que tout vecteur de $F + G$ est somme d'un vecteur de F' et d'un vecteur de G et donc que $F + G = F' + G$.

En résumé, $F + G = F' + G$ et $F' \cap G = \{0\}$. Donc, $F + G = F' \oplus G$. On en déduit que

$$\dim(F + G) = \dim(F' \oplus G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G).$$

❏

Une conséquence de la relation de Grassmann est :

Théorème 13. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces de E.

1) $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

2) La somme $F + G$ est directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. D'après la relation de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Puisque $\dim(F \cap G)$ est une entier naturel, $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$ avec égalité si et seulement si $\dim(F \cap G) = 0$ ou encore $F \cap G = \{0\}$. Finalement, $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$ si et seulement si la somme $F + G$ est directe.

❏

En particulier,

Théorème 14. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces de E.

Les sous-espaces F et G sont supplémentaires si et seulement si deux des trois propositions ci-dessous sont vraies :

I - $F + G = E$
II - $F \cap G = \{0\}$
III - $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démonstration. On sait que si F et G sont supplémentaires, alors I, II et III sont vérifiées et en particulier, deux des trois propositions sont vérifiées.

Inversement,
- si I et II sont vérifiées, alors F et G sont supplémentaires.
- si I et III sont vérifiées, alors

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E) = \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

et donc $\dim(F \cap G) = 0$ puis $F \cap G = \{0\}$. Encore une fois F et G sont supplémentaires.
- si II et III sont vérifiées, alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et donc $E = F + G$. De nouveau, F et G sont supplémentaires.

❏

3 Rang d'une famille finie de vecteurs

3.1 Définition du rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 5. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $p \geqslant 1$ puis $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

Le **rang** de la famille de vecteurs $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, noté $\text{rg}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, est la dimension de l'espace engendré par la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$:

$$\text{rg}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} = \dim\left(\text{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\right).$$

Si la famille est vide, le sous-espace engendré est $\{0\}$ et on pose donc $\text{rg}(\varnothing) = 0$.

3.2 Propriétés du rang d'une famille de vecteurs

Théorème 15. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, une famille de p vecteurs de E. Soit $r = \text{rg}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} = \dim\left(\text{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\right)$.

- $r \leqslant \text{Min}\{n, p\}$ ou encore $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$.
- $r = p \Leftrightarrow$ la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre.
- $r = n \Leftrightarrow$ la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est génératrice de E.
- $r = n = p \Leftrightarrow$ la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de E.

Démonstration. On pose $F = \text{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

- F est un sous-espace de E. Donc, $r = \dim(F) \leqslant \dim(E) = n$.

$(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille génératrice de F. Le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension et donc $p \geqslant r$. Finalement, $r \leqslant \mathrm{Min}\{n, p\}$.

• $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille génératrice de F. Si la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre, alors la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de F et si la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de F, alors la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre.
Donc, la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre si et seulement si famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de F ce qui équivaut à $\mathrm{card}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} = \dim(F)$ ou encore $p = r$.

• Puisque E est de dimension finie, $r = n \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E \Leftrightarrow E = \mathrm{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \Leftrightarrow (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est génératrice de E.

• $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ base de $E \Leftrightarrow (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ libre et génératrice de $E \Leftrightarrow r = p$ et $r = n$. ❑

On donne maintenant une caractérisation du rang d'une famille finie de vecteurs.

Théorème 16. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, une famille de p vecteurs de E. Soit $r = \mathrm{rg}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\right)$.

• r est le maximum du cardinal d'une sous-famille libre extraite de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

• Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, il existe une sous-famille de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ qui est libre et de cardinal k.
Pour tout $k > r$, une sous-famille de cardinal k de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, est liée.

Démonstration .

• $\varnothing$ est une sous-famille libre extraite de $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. D'autre part, le cardinal d'une sous-famille de $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ qui est libre, est inférieur ou égal à la dimension de $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ à savoir r. Donc, $\left\{\mathrm{card}(L),\ L \text{ sous-famille de } (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \text{ libre}\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.

Posons $r' = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{card}(L),\ L \text{ sous-famille de } (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \text{ libre}\right\}$. D'après ce qui précède, le cardinal de toute sous-famille de $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ qui est libre est inférieur ou égal à r et en particulier, $r' \leqslant r$.

$(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille génératrice $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. On sait que l'on peut en extraire une base qui est une sous-famille de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, libre et de cardinal r. Donc $r \leqslant r'$ et finalement, $r' = r$.

• Soit k le cardinal d'une sous-famille donnée de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

- Une telle sous-famille est une famille de vecteurs de l'espace $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. Le cardinal d'une famille libre est inférieure à la dimension et donc si $k > r$, la sous-famille est liée.
- Soit $k \in [\![0, r]\!]$. Il existe une sous-famille de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ qui est libre et de cardinal r. Toute sous-famille de cardinal k de cette sous-famille est une sous-famille de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, libre et de cardinal k. ❑

3.3 Transformations élémentaires ne modifiant pas le sous-espace engendré

On se donne une famille finie et non vide de vecteurs $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$. On va décrire un certain nombre de **transformations élémentaires** sur les vecteurs de cette famille qui ne modifient le sous-espace engendré et en particulier ne modifient pas le rang de cette famille. A partir de ces transformations élémentaires, on en donnera d'autres moins élémentaires ne modifiant toujours pas le rang puis dans le paragraphe suivant, on utilisera ces transformations pour mettre en place une première méthode de détermination du rang.

Les transformations élémentaires que l'on va étudier sont les suivantes :

I - Transposer deux vecteurs de la famille c'est-à-dire échanger les positions de deux des vecteurs de la famille.

II - Ajouter à un vecteur de la famille un autre vecteur de la famille.

III - Multiplier un vecteur de la famille par $\lambda \neq 0$.

Les transformations moins élémentaires qui s'en déduisent sont les suivantes :

IV - Permuter deux vecteurs de la famille.

V - Ajouter à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Reprenons ces transformations les unes après les autres. Soit $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille finie non vide de vecteurs de E.

I - Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]$ tel que $i \neq j$ (ce qui suppose $p \geqslant 2$). L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$. Donc, $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$ et en particulier, $\mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \mathrm{rg}\,(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$.

II - Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]$ tel que $i \neq j$ (ce qui suppose $p \geqslant 2$). Soit $u'_i = u_i + u_j$ (on ajoute le vecteur u_j au vecteur u_i). Une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u'_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$ est aussi une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$. Inversement, une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = (u_1, \ldots, u'_i - u_j, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$ est aussi une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u'_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$.
Donc, $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$ et en particulier, $\text{rg}\,(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \text{rg}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p)$.

III - Soient $i \in [\![1, p]\!]$ puis $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Soit $u'_i = \lambda u_i$ (on multiplie le i-ème vecteur par $\lambda \neq 0$).
Une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u'_i, \ldots, u_p)$ est aussi une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$.

En appliquant ce résultat, à la famille $(u_1, \ldots, u''_i, \ldots, u_p)$ où $u''_i = \dfrac{1}{\lambda} u'_i = u_i$, on obtient le fait qu'une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$ est aussi une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u'_i, \ldots, u_p)$.
Donc, $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_p) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$ et en particulier, $\text{rg}\,(u_1, \ldots, \lambda u_i, \ldots, u_p) = \text{rg}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$.

IV - On démontrera dans le chapitre « Le groupe symétrique » que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire toute bijection de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même) est une composée de transpositions (ou encore est une succession d'échanges de positions deux à deux). Donc, pour tout permutation σ de $[\![1, n]\!]$,

$$\text{Vect}\left(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(p)}\right) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$$

et en particulier, $\text{rg}\left(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(p)}\right) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$. Ce résultat est d'ailleurs évident directement sans passer par une succession de transpositions.

V - En cumulant les résultats II et III, on obtient le résultat plus général suivant : pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $(\lambda_j)_{j \neq i} \in \mathbb{K}^{p-1}$

$$\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p) = \text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j, \ldots, u_p\right)$$

et en particulier, $\text{rg}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p) = \text{rg}\left(u_1, \ldots, u_i + \displaystyle\sum_{j \neq i} \lambda_j u_j, \ldots, u_p\right)$.

On peut énoncer cette dernière opération sous la forme : **on ne modifie pas le rang d'une famille de vecteurs si à l'un de ces vecteurs, on ajoute une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille**.

On peut aussi remplacer un vecteur u_i par une combinaison linéaire de tous les vecteurs, u_i compris, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$ mais c'est dangereux car il faut alors prendre garde au fait que λ_i **doit être non nul**. Si λ_i n'est pas nul, la nouvelle famille a toujours le même rang. Si $\lambda_i = 0$, la nouvelle famille peut ne plus avoir le même rang.

On peut rajouter à ces transformations ne modifiant pas le rang car ne modifiant pas le sous-espace engendré l'action suivante : supprimer un vecteur quand celui-ci est nul ou quand celui-ci est égal à un autre vecteur de la famille ou quand celui-ci est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.
Par exemple, si $u_2 = 0$, $u_3 = u_1$ et $u_5 = u_4 + u_1$, alors $\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \text{Vect}\,(u_1, u_4)$ et en particulier, $\text{rg}\,(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \text{rg}\,(u_1, u_4)$.

3.4 Une détermination pratique du rang

3.4.1 Matrice d'une famille de finie de vecteurs dans une base

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Soit $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille de p vecteurs de E, $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour chaque $j \in [\![1, p]\!]$, on pose $u_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$. Ainsi, les coordonnées du vecteur u_1 dans la base $\mathcal{B}$ sont $(a_{1,1}, \ldots, a_{n,1})$ et plus généralement, les coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$ sont $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$. Le premier numéro écrit est un numéro de coordonnées et le deuxième numéro écrit est un numéro de vecteur.

La **matrice** de la famille $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la matrice à n lignes et p colonnes dont le coefficient général ligne i, colonne j, est la i-ème coordonnée du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$, à savoir $a_{i,j}$.
La i-ème ligne de ce tableau contient les i-èmes coordoonées des vecteurs u_1, …, u_p et la j-ème colonne de ce tableau « est » le vecteur u_j.

La **matrice** de la famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ dans la base $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ se note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$. On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix}.$$

Pour la compréhension de la méthode de remplissage, on peut compléter la matrice ci-dessus :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & & u_j & & u_p \end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ e_1\\ \\ e_i\\ \\ e_n\end{array}$$

Exemple. On se place dans $E=\mathbb{R}^4$. On se note (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On donne les 5 vecteurs : $u_1=(0,2,-1,1)$, $u_2=(1,0,1,0)$, $u_3=(-3,5,-2,2)$, $u_4=(4,1,0,1)$ et $u_5=(1,6,-2,3)$. Alors,

$$\text{Mat}_{(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}}(u_j)_{1\leqslant j\leqslant 5}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 5 & 1 & 6\\ -1 & 1 & -2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R}).$$

3.4.2 La méthode du pivot de Gauss

On va maintenant développer une première technique permettant d'obtenir le rang d'une famille finie de vecteurs à l'aide de transformations sur les coefficients de la matrice dans une base donnée. On commence par fournir un type de matrice où le rang de la famille correspondante est directement lisible.

Théorème 17. Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une famille finie, non vide de vecteurs de E dont la matrice est du type :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ & & a_{r,r} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \times & \dots & \times & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\text{ ou }\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ & & & a_{r,r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \times & \dots & \dots & \times\end{pmatrix}\text{ ou même }\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ \times & \dots & \times & a_{r,r}\end{pmatrix},$$

où de plus $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $a_{k,k}\neq 0$ (les $\times$ symbolisent des coefficients quelconques, nuls ou pas). Alors, $\text{rg}(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}=r$.

Démonstration. La matrice a exactement r colonnes non nulles ou encore les vecteurs u_j, $1\leqslant j\leqslant r$, sont tous non nuls et les vecteurs u_j, $j>r$, (s'il y en a), sont tous nuls. Une sous-famille de la famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$, de cardinal strictement supérieur à r contient donc au moins une fois le vecteur nul et est donc liée (ceci montre déjà que $\text{rg}(u_j)_{1\leqslant j\leqslant r}\leqslant r$ (d'après le théorème 16)).

Montrons que la famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\mathbb{K}^r$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\lambda_j u_j=0$. En écrivant l'égalité à 0 des r premières coordonnées du vecteur $\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\lambda_j u_j$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\lambda_1=0\\ a_{2,1}\lambda_1+a_{2,2}\lambda_2=0\\ \vdots \qquad\qquad \ddots\\ a_{r,1}\lambda_1+\quad\dots\quad+a_{r,r}\lambda_r=0\end{array}\right.$$

La première équation fournit $\lambda_1=0$ car $a_{1,1}\neq 0$. La deuxième équation fournit alors $a_{2,2}\lambda_2=0$ (car $\lambda_1=0$) et donc $\lambda_2=0$ car $a_{2,2}\neq 0$. Par récurrence, on obtient pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, $a_{i,i}\lambda_i=0$ puis $\lambda_i=0$. La famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$ est donc libre.

En résumé, tout sous-famille de la famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de cardinal strictement supérieur à r est liée et il existe une sous-famille de la famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de cardinal r qui est libre. Le théorème 16 permet d'affirmer que $\text{rg}\,(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p} = r$.

❏

On découvre maintenant sur un exemple une méthode, la méthode du pivot de Gauss, pour déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs d'un espace de dimension finie. Cette méthode combine le théorème 17 et les différentes transformations ne modifiant pas le rang d'une famille.
Ce qui suit est très détaillé pour la compréhension mais n'est pas la version définitive du travail à effectuer. Il nous manque encore des notions comme par exemple la notion de rang d'une matrice qui sera exposée au chapitre suivant.

Exemple. Reprenons $E = \mathbb{R}^4$ (donc $n = 4$) puis la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ où $u_1 = (0, 2, -1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (-3, 5, -2, 2)$, $u_4 = (4, 1, 0, 1)$ et $u_5 = (1, 6, -2, 3)$. On note r le rang de cette famille. La matrice de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

• On commence par échanger les positions des vecteurs u_1 et u_2 ($C_1 \leftrightarrow C_2$) pour faire apparaître en haut à gauche un coefficient non nul, le pivot. La nouvelle famille est $(u_2, u_1, u_3, u_4, u_5)$. Elle a même rang que la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. La matrice de la famille $(u_2, u_1, u_3, u_4, u_5)$ dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad r = \text{rg}\,(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \text{rg}\,(u_2, u_1, u_3, u_4, u_5).$$

• On se sert de ce pivot pour faire apparaître des coefficients nuls sur la première ligne, à droite du pivot : on remplace le vecteur u_3 par $u_3 + 3u_2$, le vecteur u_4 par $u_4 - 4u_2$ et le vecteur u_5 par $u_5 - u_2$ ($C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1, \ldots$). La nouvelle famille est $(u_2, u_1, u_3 + 3u_2, u_4 - 4u_2, u_5 - u_2)$. Elle a même rang que la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. La matrice de la famille $(u_2, u_1, u_3 + 3u_2, u_4 - 4u_2, u_5 - u_2)$ dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad r = \text{rg}\,(u_2, u_1, u_3, u_4, u_5) = \text{rg}\,(u_2, u_1, u_3 + 3u_2, u_4 - 4u_2, u_5 - u_2)$$

• On a maintenant des 0 en première ligne à partir de la deuxième colonne. On descend ligne 2, colonne 2, et on crée un nouveau pivot non nul le plus simple possible. Avant transformation, on avait un pivot égal à 2. Un pivot égal à 1 est plus simple. On échange donc les colonnes 2 et 4 ou encore on échange de position les vecteurs u_1 et $u_4 - 4u_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad r = \text{rg}\,(u_2, u_4 - 4u_2, u_3 + 3u_2, u_1, u_5 - u_2)$$

• On fait de nouveau apparaître des 0 sur la deuxième ligne à droite du nouveau pivot. Pour cela, on remplace le vecteur $u_3 + 3u_2$ par le vecteur $(u_3 + 3u_2) - 5(u_4 - 4u_2) = 23u_2 + u_3 - 5u_4$ ($C_3 \leftarrow C_3 - 5C_2$), le vecteur u_1 par le vecteur $u_1 - 2(u_4 - 4u_2) = u_1 + 8u_2 - 2u_4$ et le vecteur $u_5 - u_2$ par le vecteur $(u_5 - u_2) - 6(u_4 - 4u_2) = 23u_2 - 6u_4 + u_5$. Il est essentiel de noter que **ces transformations ne modifient pas les 0 de la première ligne** car le coefficient ligne 1, colonne 2, vaut 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 21 & 7 & 21 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad r = \text{rg}\,(u_2, u_4 - 4u_2, 23u_2 + u_3 - 5u_4, u_1 + 8u_2 - 2u_4, 23u_2 - 6u_4 + u_5)$$

• On recommence en descendant ligne 3, colonne 3. On remplace C_4 la colonne 4 par $3C_4 - C_3$ ou encore on remplace le vecteur $u_1 + 8u_2 - 2u_4$ par $3(u_1 + 8u_2 - 2u_4) - (23u_2 + u_3 - 5u_4) = 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4$ et on remplace C_5 par $C_5 - C_3$ ou encore, on remplace le vecteur $23u_2 - 6u_4 + u_5$ par le vecteur $(23u_2 - 6u_4 + u_5) - (23u_2 + u_3 - 5u_4) = -u_3 - u_4 + u_5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = \text{rg}\,(u_2, u_4 - 4u_2, 23u_2 + u_3 - 5u_4, 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4, -u_3 - u_4 + u_5).$$

C'est fini : d'après le théorème 17, $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = 3$ ou encore $\dim(\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)) = 3$. On note que la nullité des deux dernières colonnes fournit des relations de dépendance linéaire : $3u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 0$ et $-u_3 - u_4 + u_5 = 0$. Ainsi, par exemple, $u_4 = 3u_1 - u_2 - u_3$ et $u_5 = u_3 + u_4 = 3u_1 - u_2$. Les vecteurs u_4 et u_5 sont combinaisons linéaires des vecteurs u_1, u_2 et u_3. Une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est (u_1, u_2, u_3).

4 Applications linéaires et dimensions

4.1 Détermination d'une application linéaire

4.1.1 par les images des vecteurs d'une base

Dans ce paragraphe, on établit qu'une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base.

Théorème 18. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non réduits à $\{0\}$. On suppose que E admet au moins une base $(e_i)_{i\in I}$.

1) Pour toute famille $(e'_i)_{i\in I}$ d'éléments de E' indexée par I, il existe une application linéaire f de E vers E' et une seule telle que $\forall i \in I$, $f(e_i) = e'_i$.

2) De plus,

- f est injective si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de E'.
- f est un isomorphisme si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de E'.

Démonstration .

1) Existence. Soit $(e'_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E' indexée par I. Soit $x \in E$. Il existe une famille et une seule $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini, telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$. On pose alors $f(x) = \sum_{i\in I} x_i e'_i$. f ainsi définie est bien une application de E vers E'. De plus, par construction, pour tout $i \in I$, $f(e_i) = e'_i$.

Enfin, pour $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, en posant $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i\in I} y_i e_i$ où $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I, à support fini, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f\left(\sum_{i\in I} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i\right) = \sum_{i\in I} (\lambda x_i + \mu y_i) e'_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i e'_i + \mu \sum_{i\in I} y_i e'_i \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire et finalement f convient.

Unicité. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, E')$ tels que $\forall i \in I$, $f(e_i) = g(e_i)$. Alors, par linéarité, pour tout i de I, $(f - g)(e_i) = 0$. Toujours par linéarité, pour tout x de E, $(f - g)(x) = 0$ et donc $f = g$.

2) On sait déjà que si f est injective (resp. surjective, bijective), la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre (resp. génératrice de E, une base de E). Réciproquement,

• Supposons que $(f(e_i))_{i\in I}$ soit libre. Soit $x \in E$. Il existe $J \subset I$, J finie puis il existe $(x_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J$ tel que $x = \sum_{j\in J} x_j e_j$. Puis

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow f\left(\sum_{j\in J} x_j e_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j\in J} x_j f(e_j) = 0 \\ &\Rightarrow \forall j \in J,\ x_j = 0 \text{ (car la famille } (f(e_j))_{j\in J} \text{ est libre)} \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(f) = \{0\}$ puis f est injective.

• Supposons que $(f(e_i))_{i\in I}$ soit génératrice de E'. Alors, $E' = \text{Vect}(f(e_i))_{i\in I} = \text{Im}(f)$ puis f est surjective.

• Supposons que $(f(e_i))_{i\in I}$ soit une base de E'. Alors, $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre et génératrice de E' puis f est injective et surjective et donc bijective.

❏

⇨ **Commentaire** . *Le théorème précédent apporte un complément d'information au théorème 45 du chapitre précédent. Ce théorème disait qu'une application linéaire de E vers E' est un isomorphisme si et seulement si l'image de toute base de E par f est une* *base de E'. Le théorème précédent dit entres autres que qu'une application linéaire de E vers E' est un isomorphisme si et seulement si il existe une base de E dont l'image par f est une base de E'.*

Dans la démonstration du théorème 17, on a en particulier établi un résultat qui mérite d'être explicité et qui est très utilisé dans la pratique :

Théorème 19.

Une application linéaire qui s'annule sur une base est nécessairement nulle.
Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Exemple 1. Si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e'_1, e'_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les égalités $f(e_1) = 2e'_1 - e'_2$, $f(e_2) = e'_1$ et $f(e_3) = e'_1 - e'_2$ déterminent une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$. L'image d'un triplet quelconque (x, y, z) s'ontient de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
f((x,y,z)) &= f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\
&= x(2e'_1 - e'_2) + y(e'_1) + z(e'_1 - e'_2) = (2x+y+z)e'_1 + (-x-z)e'_2 = (2x+y+z)(1,0) + (-x-z)(0,1) \\
&= (2x+y+z, -x-z).
\end{aligned}$$

Exemple 2. Si (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = 0$, alors f est la projection sur $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(e_3)$ car f coïncide avec cette projection sur la base (e_1, e_2, e_3).

4.1.2 par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base. De même, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires :

Théorème 20. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $p \geqslant 2$ puis F et G des sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$.

Pour tout $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(F, E') \times \mathcal{L}(G, E')$, il existe un élément f de $\mathcal{L}(E, E')$ et un seul tel que $f_{/F} = f_1$ et $f_{/G} = f_2$.

Démonstration . Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(F, E') \times \mathcal{L}(G, E')$. Supposons que f existe. Pour $x \in E$, $\exists!\,(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. Nécessairement, $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Ceci montre l'unicité de f.

Réciproquement, soit f définie comme ci-dessus. Il s'agit de vérifier que $f_{/F} = f_1$ et $f_{/G} = f_2$ et que f est une application linéaire de E vers E'.

- Soit $x \in F$. La décomposition de x est $x = x + 0$ avec $x \in F$ et $0 \in G$. Donc $f(x) = f_1(x) + f_2(0) = f_1(x)$. Donc, $f_{/F} = f_1$.
De même, $f_{/G} = f_2$.

- Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On pose $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ où $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in F \times G \times F \times G$.
La décomposition de $\lambda x + \mu y$ est alors

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2).$$

avec $\lambda x_1 + \mu y_1 \in F$ et $\lambda x_2 + \mu y_2 \in G$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y) &= f_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + f_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\
&= \lambda(f_1(x_1) + f_2(x_2)) + \mu(f_1(y_1) + f_2(y_2)) \text{ (car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéaires)} \\
&= \lambda f(x) + \mu f(y).
\end{aligned}$$

Donc, f est linéaire.

Ceci montre l'existence de f.

❏

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires. Par exemple, si $E = F \oplus G$ et si pour tout x de F, $f(x) = x$ et pour tout x de G, $f(x) = 0$, alors f est la projection sur F parallèlement à G (car f coïncide avec cette projection sur chacun des sous-espaces supplémentaires F et G).

4.2 C.N.S pour que deux espaces de dimension finie soient isomorphes

Définition 6. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Les espaces vectoriels $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ sont **isomorphes** si et et seulement si il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre.

Théorème 21. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Les espaces vectoriels $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ sont isomorphes si et et seulement si ces espaces ont même dimension.

Démonstration . Supposons que $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ aient même dimension finie n. Si $n = 0$, $E = \{0\}$ et $E' = \{0\}$. Dans ce cas, l'application nulle est un isomorphisme de l'un sur l'autre.
Supposons maintenant $n \geqslant 1$. Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E et $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E'. Soit f l'application linéaire entièrement déterminée par les égalités : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = e'_i$. Puisque l'image par f d'une base de E est une base de E', f est un isomorphisme de E sur E'. Les espaces vectoriels $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ sont donc isomorphes.

Réciproquement, soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie isomorphes. Soit f un isomorphisme de l'un sur l'autre. Si l'un des deux espaces est réduit à $\{0\}$, il est clair que les deux espaces sont réduits à $\{0\}$ et ont en particulier même dimension. Sinon, l'image par f d'une base de E est une base de E'. En particulier, E et E' admettent des bases qui ont le même nombre d'éléments. Ces espaces ont donc la même dimension.

❏

En particulier,

Théorème 22.

Tout espace vectoriel de dimension finie n non nulle est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

⇨ **Commentaire** . *Si $p \neq n$, il n'existe pas d'isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ (car ces espaces n'ont pas la même dimension finie). Par contre, on peut montrer qu'il existe des bijections de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}^p$. Une telle bijection est nécessairement non linéaire.*

Ainsi, par exemple les espaces $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes. Un isomorphisme explicite est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) & \mapsto & aX^2 + bX + c \end{array}$
(par cet isomorphisme, l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$).

4.3 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Théorème 23. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle.

Alors, $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = \dim(E) \times \dim(E')$.

En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim(E))^2$.

Démonstration . Posons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(E')$. Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E et $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F.
Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $f_{i,j}$ l'application linéaire déterminée par

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f_{i,j}(e_k) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } k \neq i \\ e'_j \text{ si } k = i \end{array} \right. = \delta_{k,i} e'_j.$$

On a montrer que la famille $(f_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

• Montrons que la famille $(f_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \lambda_{i,j} f_{i,j} = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ & \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \lambda_{i,j} f_{i,j}(e_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \lambda_{i,j} \delta_{i,k} e'_j = 0 \\ & \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_{k,j} e'_j = 0 \\ & \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \lambda_{k,j} = 0 \text{ (car la famille } \left(e'_j\right)_{1 \leqslant j \leqslant p} \text{ est libre).} \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(f_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est libre.

• Montrons que la famille $(f_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est génératrice de $\mathcal{L}(E, E')$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, posons $f(e_i) = u_i$ (ces égalités définissent entièrement l'application linéaire f).

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on peut poser $u_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} e'_j$ où $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^{np}$.

Soit alors $g = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_{i,j} f_{i,j}$. g est une application linéaire de E vers E'. De plus, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$g(e_k) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_{i,j} f_{i,j}(e_k) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_{i,j}\delta_{k,i}e'_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{k,j}e'_j = u_k = f(e_k).$$

Les applications linéaires f et g coïncident sur une base de E et sont donc égales ou encore $f = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_{i,j} f_{i,j}$. On a montré ainsi montré que toute application linéaire de E vers E' est combinaison linéaire des éléments de la famille que $(f_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et donc la famille $(f_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $\mathcal{L}(E,E')$.

Finalement, la famille $(f_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(E,E')$. On en déduit que $\dim(\mathcal{L}(E,E')) = \text{card}\left((f_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\right) = np = \dim(E)\times\dim(E')$.

❑

4.4 Rang d'une application linéaire

4.4.1 Définition du rang d'une application linéaire

DÉFINITION 7. Soient $(E,+,.)$ et $(E',+,.)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$.

Le **rang** de f est la dimension de l'image de f. Il se note $\text{rg}(f)$.

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

On fait le lien avec le rang d'une famille de vecteurs :

Théorème 24. Soient $(E,+,.)$ et $(E',+,.)$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, l'espace de départ étant de dimension finie non nulle n. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$.

Alors, $\text{rg}(f) = \text{rg}\left((f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$.

⇨ **Commentaire** . *Il est important de noter que l'égalité ci-dessus ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$ ou encore, si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors $rg(f(\mathcal{B}_1)) = rg(f(\mathcal{B}_2))$.*

DÉMONSTRATION . On sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left((f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$ et donc $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim\left(\text{Vect}\left((f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\right) = \text{rg}\left((f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$.

❑

4.4.2 Le théorème du rang

Théorème 25 (le théorème du rang). Soient $(E,+,.)$ et $(E',+,.)$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, l'espace de départ E étant de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$.

1) La restriction de f à un supplémentaire S de $\text{Ker}(f)$ dans E réalise un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$.

2) En particulier, $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$.

DÉMONSTRATION .

1) $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace de l'espace E qui est de dimension finie. Donc, $\text{Ker}(f)$ admet au moins un supplémentaire dans E. Soit donc S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E.

Si $\text{Ker}(f) = E$, alors $S = \{0\}$, $f = 0$ puis $\text{Im}(f) = \{0\}$. Dans ce cas, le résultat est immédiat.
On suppose dorénavant $\text{Ker}(f) \neq E$ (ceci impose $n \geqslant 1$). On note $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} S & \rightarrow & \text{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$. On doit montrer que $\widetilde{f}$ est un isomorphisme.

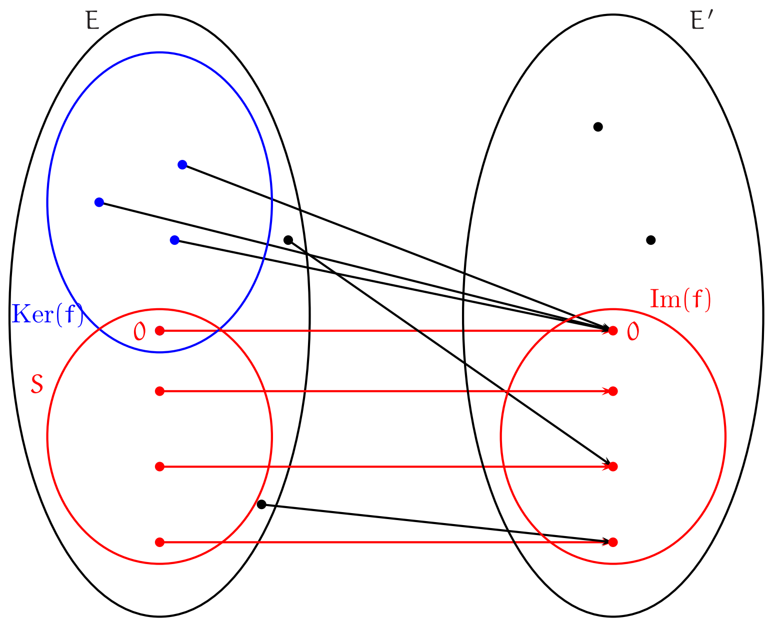
- $\widetilde{f}$ est effectivement une application de S vers $\text{Im}(f)$ qui de plus est linéaire (car f l'est).
- Soit $x \in S$. Si $\widetilde{f}(x) = 0$, alors $f(x) = 0$ puis $x \in S \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$. Ceci montre que $\text{Ker}\left(\widetilde{f}\right) = \{0\}$. Donc, $\widetilde{f}$ est injective.
- $\text{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{f(y)+f(z),\ (y,z) \in \text{Ker}(f)\times S\} = \{f(z),\ z \in S\} = \text{Im}\left(\widetilde{f}\right)$. Donc, $\widetilde{f}$ est surjective.

Finalement, $\widetilde{f}$ est un isomorphisme.

2) En particulier, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(S) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f))$.

❏

Le théorème du rang dit que l'image de f a la dimension d'un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$. Mais attention, le théorème du rang ne dit pas que $\text{Im}(f)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$. Déjà, ceci est impossible dans le cas où $E' \neq E$. Mais même dans le cas où $E' = E$, certains endomorphismes f vérifient $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ (c'est par exemple le cas des projections) et pour certains autres endomorphismes f, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires. L'exercice 2 fournira un exemple de tels endomorphismes. Pour l'instant, on peut tenter de visualiser le théorème du rang sur le graphique suivant (qui vaut ce qu'il vaut car représenter un espace vectoriel et des sous-espaces par des ellipses n'est pas forcément cohérent) :



Exercice 2.

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (x - y, x - y)$. Calculer f^2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

2) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = 0$.

a) Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

b) On suppose de plus que E est de dimension n. Montrer $\text{rg}(f) \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Solution 2.

1) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f^2((x, y)) = f((x - y, x - y)) = ((x - y) - (x - y), (x - y) - (x - y)) = (0, 0)$. Donc, $f^2 = 0$.
$\text{Ker}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x = y\right\} = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 1)$.
$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1, 0)), f((0, 1))) = \text{Vect}((1, 1), (-1, -1)) = \text{Vect}((1, 1)) = \text{Vect}(u) = \text{Ker}(f)$.

2) **a)** $f^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Puisque $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$. Par suite, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f = 0$.
Ainsi, si $f \neq 0$ (et $f^2 = 0$), alors $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires.
Si $f = 0$, $\text{Im}(f) = \{0\}$ et $\text{Ker}(f) = E$. Dans ce cas, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

b) D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = n$. Puisque $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, on a en particulier $\text{rg}(f) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$.
On en déduit en particulier $n \geqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(f) = 2\text{rg}(f)$ et finalement $\text{rg}(f) \leqslant \dfrac{n}{2}$.

⇨ **Commentaire** . *L'endomorphisme f est un endomorphisme vérifiant $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Un tel endomorphisme est dit **nilpotent d'indice 2**. Plus généralement, un endomorphisme f est **nilpotent** si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^*/\ f^k = 0$. Si f est nilpotent, l'**indice de nilpotence** p **de** f est le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $f^k = 0$:*

$$p = Min\left\{k \in \mathbb{N}^*/\ f^k = 0\right\}.$$

Pour un tel endomorphisme, si $k < p$*, alors* $f^k \neq 0$ *et sir* $k \geqslant p$*, alors* $f^k = 0$*. Enfin, il existe un et seul endomorphisme nilpotent d'indice* 1*, à savoir* $f = 0$*.*

Sinon, voici un exercice montrant une utilisation typique du théorème du rang.

Exercice 3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \rightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array}$.

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\text{Ker}(f_n)$.

3) Montrer que $\forall Q \in \mathbb{C}_n[X]$, $\exists! P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $Q = P - P'$.

4) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

Solution 3.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $P - P' \in \mathbb{C}_n[X]$. Donc, f_n est bien une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même.
Soient $(P_1, P_2) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$f_n(\lambda P_1 + \mu P_2) = (\lambda P_1 + \mu P_2) - (\lambda P_1 + \mu P_2)' = \lambda(P_1 - P_1') + \mu(P_2 - P_2') = \lambda f_n(P_1) + \mu f_n(P_2).$$

Donc, $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.

Une autre solution est : il est connu que $D_n : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc $f = \text{Id}_{\mathbb{C}_n[X]} - D_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Si $P \neq 0$, alors $\deg(P - P') = \deg(P) \neq -\infty$ et donc $f_n(P) \neq 0$. Par contraposition, si $f_n(P) = 0$, alors $P = 0$. Ceci montre $\text{Ker}(f_n) = \{0\}$. f_n est donc injectif.

3) Puisque $\dim(\mathbb{C}_n[X]) < +\infty$, le théorème du rang permet d'affirmer que $\text{rg}(f_n) = \dim(\mathbb{C}_n[X]) - \dim(\text{Ker}(f_n)) = n + 1 - 0 = n + 1$.
Ainsi, $\text{Im}(f_n)$ est un sous-espace de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\dim(\text{Im}(f_n)) = \dim(\mathbb{C}_n[X]) < +\infty$. On en déduit que $\text{Im}(f_n) = \mathbb{C}_n[X]$ ou encore f_n est surjectif. Finalement, f_n est un automorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc

$$\forall Q \in \mathbb{C}_n[X],\ \exists! P \in \mathbb{C}_n[X],\ Q = P - P'.$$

4) f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$, injectif pour les mêmes raisons que chaque f_n. Enfin, si $Q \in \mathbb{C}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ puis il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $Q = P - P'$. Ceci montre que f est surjectif et finalement f est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$. En particulier,

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ \exists! P \in \mathbb{C}[X],\ Q = P - P'.$$

4.4.3 Compléments sur le rang d'une application linéaire

On donne maintenant les relations qu'entretient le rang avec les trois opérations $+$, $.$ et $\circ$.

Théorème 26. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie.
Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, E'))^2$.

Alors, $\text{rg}(f + g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

Démonstration. $\text{Im}(f + g) = \{f(x) + g(x),\ x \in E\} \subset \left\{f(x) + g(x'),\ (x, x') \in E^2\right\} = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Par suite,

$$\text{rg}(f + g) = \dim(\text{Im}(f + g)) \leqslant \dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) \leqslant \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

❏

Théorème 27. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\lambda = 0$, $\text{rg}(\lambda f) = 0$ et si $\lambda \neq 0$, $\text{rg}(\lambda f) = \text{rg}(f)$. Dans tous les cas, $\text{rg}(\lambda f) \leqslant \text{rg}(f)$.

Démonstration. Si $\lambda = 0$, $\lambda f = 0$ puis $\text{Im}(\lambda f) = \{0\}$ puis $\text{rg}(\lambda f) = 0$.

On suppose dorénavant $\lambda \neq 0$. $\mathrm{Im}(\lambda f) = \{\lambda f(x),\ x \in E\} = \{f(\lambda x),\ x \in E\} \subset \mathrm{Im}(f)$. En appliquant ce résultat au réel $\frac{1}{\lambda}$ et à l'application linéaire λf, on a aussi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \subset \mathrm{Im}(\lambda f)$. Finalement, $\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}(f)$ et en particulier, $\mathrm{rg}(\lambda f) = \mathrm{rg}(f)$.

❏

Théorème 28. Soient $(E, +, .)$, $(E', +, .)$ et $(E'', +, .)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et E' étant de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $g \in \mathcal{L}(E', E'')$.

Alors, $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$.

Si de plus, f est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$ et si g est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration .

• $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{g(f(x)),\ x \in E\} \subset \mathrm{Im}(g)$. En particulier, $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.

• Soit g_1 la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$. Alors, $g_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(f), E'')$. D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}\,(g_1) = \dim(\mathrm{Im}(f)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g_1)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f).$$

Mais d'autre part, $\mathrm{Im}\,(g_1) = \{g(f(x)),\ x \in E\} = \mathrm{Im}(g \circ f)$ puis $\mathrm{rg}\,(g_1) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Ainsi, $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$ et finalement $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$.

• Supposons de plus que f soit un isomorphisme de E sur E'. On a déjà $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$ mais aussi $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}\left((g \circ f) \circ f^{-1}\right) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f)$. Finalement, $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.

Si g est un isomorphisme de E sur E', on a $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$ mais aussi $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(g^{-1} \circ (g \circ f)\right) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f)$. Finalement, $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

❏

4.5 Quelques conséquences du théorème du rang

4.5.1 Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives sur un espace de dimension finie

Théorème 29. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E et E' sont de **dimension finie** et ont la **même dimension**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Démonstration . On pose $\dim(E) = \dim(E') = n$ où n est un entier naturel.

f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ ce qui équivaut à $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$.
f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = E'$ ce qui équivaut à $\mathrm{rg}(f) = n$.

Donc, f injective $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Leftrightarrow \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n \Leftrightarrow f$ surjective.

Ainsi, si f est injective, alors f est surjective et donc bijective et si f est surjective alors f est injective et donc bijective.

❏

Théorème 30. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

• $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$ injectif $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
• $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$ surjectif $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = E \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = n$.
• $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$ inversible à droite pour $\circ \Leftrightarrow f$ inversible à gauche pour $\circ$.

Démonstration . Les deux premières successions d'équivalence ne sont que le théorème 26 dans le cas particulier où $E = E'$.

Si f est inversible à droite, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. On en déduit que $f \circ g$ est surjective. On sait alors que f est surjective, puis bijective d'après ce qui précède.

Si f est inversible à gauche, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. On en déduit que $g \circ f$ est injective. On sait alors que f est injective, puis bijective d'après ce qui précède.

❏

4.5.2 Une autre démonstration de la relation de Grassmann

On rappelle que si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G sont deux sous-espaces de E, alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. On propose une autre démonstration de ce résultat, qui utilise le théorème du rang :

Démonstration. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} F \times G & \rightarrow & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$.

• φ est linéaire car pour $((x,y),(x',y')) \in (F\times G)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(x,y)+\mu(x',y')) &= \varphi((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y')) = (\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y') = \lambda(x+y)+\mu(x'+y') \\ &= \lambda\varphi((x,y))+\mu\varphi((x',y')).\end{aligned}$$

• $\mathrm{Im}(\varphi) = \{x+y,\ (x,y) \in F\times G\} = F+G$.

• D'après le théorème du rang, $\dim(F+G) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(F\times G) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$.

• Soit $(x,y) \in F\times G$. Si (x,y) est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $y=-x$. Ceci impose en particulier $x \in F\cap G$ et $y \in F\cap G$. Réciproquement, si $(x,y) \in (F\cap G)^2$ et $y=-x$, alors $\varphi((x,y)) = x-x=0$ et donc (x,y) est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$. En résumé, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(x,-x),\ x\in F\cap G\}$.

Vérifions alors que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(F\cap G)$. Il suffit pour cela de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est isomorphe à $F\cap G$.

Soit $\psi : \begin{array}{ccc} F\cap G & \rightarrow & \mathrm{Ker}(\varphi) \\ x & \mapsto & (x,-x) \end{array}$. Il est immédiat que ψ est une application de $F\cap G$ dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, linéaire, injective car de noyau nul et surjective. ψ est donc un isomorphisme de $F\cap G$ sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

On en déduit que $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$. ❏

4.6 Formes linéaires et hyperplans

4.6.1 Formes linéaires en dimension finie. Formes coordonnées dans une base

On a déjà vu que les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont les applications de la forme $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto a_1x_1+\ldots+a_nx^n$. On sait d'autre part que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ étant l'ensemble des formes linéaires sur E) et que $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{K})) = \dim(E)\times\dim(\mathbb{K}) = n\times 1 = n$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base donnée de E. Soit φ une forme linéaire sur E. Pour $x\in E$, on pose $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ où $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $x\in E$, on a alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

où on a posé $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(e_i) = a_i$ (a_1, a_2, ..., a_n, sont des nombres indépendants de x et ne dépendant que de φ).

Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, l'application $x \mapsto x_i$ est une forme linéaire particulière sur E (cas où $a_i=1$ et $\forall j\neq i$, $a_j=0$). On la note e_i^*. Pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, e_i^* est l'application qui à chaque vecteur x associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$. On peut donner la définition suivante :

Définition 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base donnée de E.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\forall x = \sum_{j=1}^{n} x_je_j \in E$, $e_i^*(x) = x_i$. Les formes linéaires e_1^*, ..., e_n^*, sont les **formes coordonnées relativement à la base** $\mathcal{B}$. Pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, e_i^* est la i-ème forme coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

Les principales propriétés des formes coordonnées sont réunies dans le théorème suivant :

Théorème 31. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base donnée de E.

1) $\forall x\in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i$.

2) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

3) $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ et

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}),\ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*.$$

⇨ **Commentaire**. *Le théorème 31 est peut-être en dehors du programme officiel de maths sup. Nous l'avons donné pour un souci de sécurité.*

Démonstration.

1) Par définition de chaque e_i^*, si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, alors $e_i^(x) = x_i$. Donc, $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i$.

2) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. $e_i^*\left(e_j\right)$ est par définition la i-ème coordonnée du vecteur e_j dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Puisque $e_j = 0.e_1 + \ldots + 1.e_j + \ldots + 0.e_n$, cette i-ème coordonnée est égale à 0 quand $i \neq j$ et est égale à 1 quand $i = j$. En résumé, $e_i^*\left(e_j\right) = \delta_{i,j}$.

3) Déjà, $e_1^*, \ldots, e_n^*$, sont des éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\varphi\left(e_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(e_i\right) e_i^*\right)(x).$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(e_i\right) e_i^*$. Ceci montre que la famille $\left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Puisque d'autre part, $\operatorname{card}\left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right) = n = \dim\left(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})\right) < +\infty$, on en déduit que la famille $\left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

❑

4.6.2 Hyperplans

On revient maintenant sur la notion d'hyperplans et on complète les résultats déjà obtenus.

Théorème 32. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit φ une forme linéaire sur E.

Si $\varphi = 0$, $\operatorname{Im}(\varphi) = 0$. Si $\varphi \neq 0$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$ ou encore φ est surjective.

Démonstration. Soit φ une forme linéaire sur E. $\operatorname{Im}(\varphi)$ est un sous-espace de $\mathbb{K}$ qui est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. On en déduit que $\operatorname{Im}(\varphi)$ est de dimension 0 ou 1 ou encore $\operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}$ ou $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$.
Par suite, si $\varphi = 0$, $\operatorname{Im}(\varphi) = 0$ et si $\varphi \neq 0$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$ (car $\operatorname{Im}(\varphi) \neq \{0\}$).

❑

Théorème 33. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit H un sous-espace de E.

H est un hyperplan $\Leftrightarrow \dim(H) = n - 1 \Leftrightarrow$ il existe une droite D telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration. Si H est un hyperplan, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ. D'après le théorème du rang et le théorème 32,

$$\dim(H) = \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = n - \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = n - 1.$$

Réciproquement, si $\dim(H) = n - 1$, soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une famille libre de E que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ base de E. Soit $\varphi = e_n^*$ (ainsi, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $\varphi(x) = x_n$).
φ est une forme linéaire sur E, non nulle sur E (car $\varphi\left(e_n\right) = 1 \neq 0$) et H est le noyau de φ car pour $x = x_1 e_1 + \ldots + x_{n-1} e_{n-1} + x_n e_n \in E$,

$$x \in H \Leftrightarrow x \in \operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_{n-1}\right) \Leftrightarrow x_n = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\varphi).$$

Donc, $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.

Enfin, on sait qu'un sous-espace H de E admet un supplémentaire et que H est de dimension $n-1$ si et seulement si ce supplémentaire est de dimension 1.

❑

Passons maintenant à un espace de dimension quelconque. Si E est de dimension infinie, il n'est plus question de dire qu'un hyperplan est un sous-espace de dimension $\dim(E) - 1$. Par contre,

Théorème 34. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit H un sous-espace de E.

H est un hyperplan $\Leftrightarrow$ il existe une droite D telle que $E = H \oplus D$.

En particulier, tout hyperplan admet un supplémentaire.

Démonstration.

• Soit H un hyperplan de E. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ. Soient $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$ (ou encore soit u un vecteur de E qui n'est pas dans H) puis $D = \text{Vect}(u)$. D est une droite vectorielle. Montrons que $E = H \oplus D$.

Soit $x \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $x - \lambda u \in H \Leftrightarrow \varphi(x - \lambda u) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) - \lambda\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$ (car $\varphi(u) \neq 0$). Ainsi, pour tout x de E, il existe un scalaire λ et un seul tel que $x - \lambda u \in H$. Ceci montre que $E = H \oplus D$.

Notons que si $x \in E$, la décomposition de x s'écrit $x = y + z$ où $z = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \in D$ et $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \in H$.

• Soit H un sous-espace de E tel qu'il existe D droite vectorielle telle que $E = H \oplus D$. Soit $u \in D \setminus \{0\}$ de sorte que $D = \text{Vect}(u)$. Soit $x \in E$. Il existe un couple $(y, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$ et un seul tel que $x = y + \lambda u$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda \end{array}$. Puisque pour x donné, λ existe et est unique, φ est une application de E dans $\mathbb{K}$.

Vérifions que φ est linéaire. Soient $(y, \lambda, y', \lambda') \in H \times \mathbb{K} \times H \times \mathbb{K}$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Alors $ay + by'$ est dans H et donc

$$\varphi(a(y + \lambda u) + b(y' + \lambda' u)) = \varphi((ay + by') + (a\lambda + b\lambda')u) = a\lambda + b\lambda' = a\varphi(y + \lambda u) + b\varphi(y' + \lambda' u).$$

Donc, φ est linéaire. De plus, φ n'est pas nulle car $\varphi(u) = 1 \neq 0$.

Enfin, pour $x = y + \lambda u \in E$ avec $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Ainsi, H est le noyau de la forme linéaire non nulle φ ou encore H est un hyperplan de E. ❏

En résumé, si E est de dimension quelconque (finie ou pas), les hyperplans de E sont les noyaux des formes linéaires non nulles ou aussi les supplémentaires de droites. Si de plus, E est de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces de E de dimension $n - 1$.

DÉFINITION 9. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient H un hyperplan de E puis φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

L'égalité $\varphi(x) = 0$ s'appelle une **équation** de H.

Supposons de plus E est de dimension finie n non nulle. Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \varphi(e_i)$. On a alors

$$\forall x \in E,\ x \in H \Leftrightarrow a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ est une **équation de H dans la base $\mathcal{B}$**. On doit effectivement dire « **une** équation » et pas « l'équation » car il n'y a pas unicité. Pour tout $\lambda \neq 0$, $\lambda a_1x_1 + \ldots + \lambda a_nx_n = 0$ est une autre équation de H. On va voir par contre qu'il n'y en a plus d'autres à découvrir car « les équations d'un hyperplan sont proportionnelles » :

Théorème 35. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient H un hyperplan de E puis φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

Pour toute forme linéaire ψ, $(H = \text{Ker}(\psi) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}/\ \psi = k\varphi)$.

DÉMONSTRATION .

• Soient $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ puis $\psi = k\varphi$. ψ est une forme linéaire (car $(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel). De plus, pour $x \in E$,

$$\psi(x) = 0 \Leftrightarrow k\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in H.$$

Donc, $H = \text{Ker}(\psi)$.

• Réciproquement, soit ψ une forme linéaire non nulle sur E telle que $H = \text{Ker}(\psi)$. Soit u un vecteur non dans H. On sait alors que $E = H \oplus \text{Vect}(u)$.

Puisque $u \notin H$, on a $\varphi(u) \neq 0$. Soit $k = \dfrac{\psi(u)}{\varphi(u)}$. k n'est pas nul car sinon $u \in \text{Ker}(\psi) = H$ ce qui n'est pas.

On a $\psi(u) = k\varphi(u)$ et plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\psi(\lambda u) = \lambda\psi(u) = \lambda k\varphi(u) = k\varphi(\lambda u)$. D'autre part, pour $x \in H$, $\psi(x) = 0 = k\varphi(x)$. Ainsi, les formes linéaires ψ et $k\varphi$ coïncident sur les deux sous-espaces supplémentaires H et D et sont donc égales. On a trouvé $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\psi = k\varphi$.

❏

4.6.3 Intersections d'hyperplans

Théorème 36. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

Pour tout $m \in [\![2, n]\!]$, l'intersection de m hyperplans est un sous-espace de dimension supérieure ou égale à $n - m$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence (finie) sur m.

- Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E. D'après la relation de Grassmann,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = 2n - 2 - \dim(H_1 + H_2) \geqslant 2n - 2 - n = n - 2.$$

  Le résultat est donc vrai pour $m = 2$.

- Soit $m \in [\![2, n-1]\!]$ (si $n = 2$, il n'y a plus rien à dire). Supposons le résultat acquis pour m hyperplans. Soient $H_1, \ldots, H_{m+1}$ $m+1$ hyperplans.

$$\begin{aligned}\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m \cap H_{m+1}) &= \dim(H_1 \cap \ldots \cap H_m) + \dim(H_{m+1}) - \dim((H_1 \cap \ldots \cap H_m) + H_{m+1}) \\ &\geqslant (n - m) + n - 1 - n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= n - (m + 1).\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

❑

Inversement,

Théorème 37. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

Tout sous-espace de dimension $m \in [\![1, n-1]\!]$ est intersection de $n - m$ hyperplans.

Démonstration. Soit F un sous-espace de E de dimension $m \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de F que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x \in F \Leftrightarrow x_{m+1} = \ldots = x_n = 0.$$

Pour $i \in [\![m+1, n]\!]$, le sous-espace $H_i = \operatorname{Ker}(e_i^*) = \left\{x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E / \ x_i = 0\right\}$ est un hyperplan de E. Ainsi, les H_i, $m+1 \leqslant i \leqslant n$, sont $n - m$ hyperplans et $F = \bigcap_{i=m+1}^{n} \operatorname{Ker}(e_i^*) = \bigcap_{i=m+1}^{n} H_i$.

❑

Ainsi, dans un espace E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, un sous-espace F de dimension $m \in [\![1, n-1]\!]$ admet, d'après le théorème 37, un système $n - m$ équations dans la base $\mathcal{B}$ de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n-m,1}x_1 + a_{n-m,2}x_2 + \ldots + a_{n-m,n}x_n = 0 \end{array}\right. \quad (S).$$

Inversement, soit F le sous-ensemble de E admettant dans la base $\mathcal{B}$ un système d'équations du type précédent. D'après le théorème 36, F est un sous-espace vectoriel de dimension au moins égale à m.

On peut se demander à quelle condition nécessaire et suffisante F est de dimension m exactement. Le théorème du rang est un outil pour répondre à la question. F est aussi le noyau de l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^{n-m} \\ x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n & \mapsto & (a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n, a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n, \ldots, a_{n-m,1}x_1 + \ldots + a_{n-m,n}x_n) \end{array}.$$

D'après le théorème du rang, $\dim(F) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) = n - r$ où $r = \operatorname{rg}(f)$. Par suite, $n - r = m \Leftrightarrow r = n - m$ où $n - m$ est le nombre d'équations écrites.

Dans les chapitres ultérieurs, on verra que ce rang est aussi le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \dots & a_{n-m,n} \end{pmatrix}$ ou aussi par définition le rang du système d'équations (S). Le système d'équations (S) définit donc un sous-espace de dimension m exactement (où $m = n-(n-m)$ = nombre d'inconnues moins nombre d'équations) si et seulement si le nombre d'équations $n-m$ est exactement le rang du système. Enfin, on verra que la matrice A est de rang $n-m$ exactement si et seulement si ses $n-m$ lignes formes une famille libre de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ (ou encore, en s'exprimant mal, si et seulement si les $n-m$ équations sont indépendantes).

Exercice 4. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On considère $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/\ 3x - y + z - 2t = 0 \text{ et } 5x + 3y + 2z - t = 0\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/\ x + y + z + t = 0\right\}$.

Déterminer $F + G$.

Solution 4.

• F est une intersection de deux hyperplans distincts H_1 et H_2 de $\mathbb{R}^4$. Puisque $H_1 \neq H_2$, $H_1 \underset{\neq}{\subset} H_1 + H_2$. Donc $\dim(H_1 + H_2) > 3$ ou encore $\dim(H_1 + H_2) = 4$. Mais alors, $\dim(F) = \dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.

• G est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et donc $\dim(G) = 3$.

• Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \cap G &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - y + z - 2t = 0 \\ 5x + 3y + 2z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -3x + y + 2t \\ 5x + 3y + 2(-3x + y + 2t) - t = 0 \\ x + y + (-3x + y + 2t) + t = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -3x + y + 2t \\ x = 5y + 3t \\ -2(5y + 3t) + 2y + 3t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 8y/3 \\ x = 13y \\ z = -98y/3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$F \cap G = \text{Vect}(u)$ où $u = (39, 3, -98, 8)$. En particulier, $\dim(F \cap G) = 1$.

• $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4$ et donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

⇨ **Commentaire** . *La solution précédente part du principe que $F \cap G$ est plus facile à déterminer que $F + G$. Une autre solution, peut-être plus simple, aurait pu être de constater que G est un hyperplan et donc que $F + G = G$ si $F \subset G$ ou $F + G = \mathbb{R}^4$ si $F \not\subset G$. On cherche alors une base de F. On parvient à $F = Vect(u, v)$ en résolvant le système $\left\{\begin{array}{l} 3x - y + z - 2t = 0 \\ 5x + 3y + 2z - t = 0 \end{array}\right.$ et on constate qu'au moins un des deux vecteurs u ou v n'est pas dans G ...*

Il nous reste à préciser la notion d'hyperplan ou d'intersection d'hyperplans en dimension 2 et 3.

• Dans le cas particulier où $\dim(E) = 2$, les sous-espaces de E sont ou bien $\{0\}$ qui est de dimension 0, ou bien E qui est de dimension 2, ou bien de dimension 1.
Les sous-espaces non triviaux de E sont les droites vectorielles de E qui sont aussi les hyperplans de E.
Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E, une droite D admet dans $\mathcal{B}$ une équation de la forme $ax + by = 0$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• Dans le cas particulier où $\dim(E) = 3$, les sous-espaces non triviaux de E sont de dimension 1 ou 2.
Les sous-espaces de E de dimension 2 sont les plans vectoriels qui sont les hyperplans de E.
Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, un plan P admet dans $\mathcal{B}$ une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ où $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0)\}$.
Les sous-espaces de E de dimension 1 sont les droites vectorielles. Ces droites peuvent être obtenues comme intersections de deux hyperplans de E c'est-à-dire deux plans.
Une droite D admet dans $\mathcal{B}$ un système d'équations de la forme $\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{array}\right.$ avec $((a,b,c),(a',b',c')) \in \left(\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0)\}\right)^2$ où les deux équations « sont non proportionnelles ».

Par exemple, soit D l'ensemble d'équations $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right.$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D est l'intersection des plans P et P' et donc D est un sous-espace vectoriel de dimension au moins égale à $3 - 2 = 1$. P et P' ne sont pas un seul et même plan et donc D est une droite vectorielle. On peut en fournir une base en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+z=3y \\ x+z=-2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3y-(-2y) \\ z=2(-2y)-3y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5y \\ z=-7y \end{array}\right. .$$

Donc, $D = \{(5y, y, -7y),\ y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u)$ où $u = (5, 1, -7)$.

5 Sous-espaces affines d'un espace de dimension finie

5.1 Dimension d'un sous-espace affine

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on rappelle qu'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E est un ensemble de la forme $A+F = \{A+u,\ u \in F\}$ où A est un point de E et F un sous-espace vectoriel de E. On rappelle aussi que le sous-espace vectoriel F est uniquement défini et s'appelle la direction du sous-espace affine $\mathcal{F}$. On peut maintenant donner la :

Définition 10. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E.

La **dimension** du sous-espace affine $\mathcal{F}$ est la dimension de sa direction.

Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite affine.
Un sous-espace affine de dimension 2 est un plan affine.
Un hyperplan affine est un sous-espace affine dont la direction est un hyperplan vectoriel. Si de plus, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, un hyperplan affine est un sous-espace affine de dimension $n-1$.

5.2 Equations d'un hyperplan affine dans un repère en dimension finie

On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 2$. On munit E d'un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où O est un point de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E. Soient A un point de $\mathcal{H}$ et H le direction de $\mathcal{H}$. H est un hyperplan vectoriel et admet donc une équation de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots 0)$, dans la base $\mathcal{B}$.

Notons $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de A dans le repère $\mathcal{R}$. Soit M un point de E dont les coordonnées sont notées $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H &\Leftrightarrow a_1(x_1-\alpha_1) + \ldots + a_n(x_n-\alpha_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}$ de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Réciproquement, soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et $b \in \mathbb{K}$. Soit $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de E d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ dans le repère $\mathcal{R}$. Il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. Le point de coordonnées $\left(0, \ldots, 0, \dfrac{b}{a_i}, 0, \ldots, 0\right)$ est un point de $\mathcal{H}$ et donc $\mathcal{H}$ n'est pas vide.
Soit donc A un point donné de $\mathcal{H}$ dont les coordonnées sont notées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Soit M un point de E dont les coordonnées sont notées $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b \Leftrightarrow a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \\ &\Leftrightarrow a_1(x_1-\alpha_1) + \ldots + a_n(x_n-\alpha_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \end{aligned}$$

où H est l'hyperplan vectoriel d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$. $\mathcal{H}$ est donc un hyperplan affine, de direction H. On peut énoncer :

Théorème 38. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathbb{B})$ un repère de E.

Tout hyperplan affine admet dans $\mathcal{R}$ une équation de la forme $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et $b \in \mathbb{K}$.
Réciproquement, l'ensemble d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ et $b \in \mathbb{K}$, est un hyperplan affine dont la direction est l'hyperplan vectoriel d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

5.3 Systèmes d'équations d'un sous-espace affine dans un repère en dimension finie

On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 2$. On munit E d'un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où O est un point de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E dont la direction est notée F, de dimension strictement inférieure ou égale à n. Soit A un point de $\mathcal{F}$.
Puisqu'un sous-espace vectoriel est une intersection d'hyperplans, il existe des hyperplans vectoriels $H_1, \dots, H_p$ tels que $F = H_1 \cap \dots \cap H_p$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, soit $\mathcal{H}_i$ l'hyperplan affine passant par A de direction H_i : $\mathcal{H}_i = A + H_i$. Alors

$$\mathcal{F} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} (A + H_i) = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathcal{H}_i.$$

Ainsi, tout sous-espace affine strict $\mathcal{F}$ de E est une intersection d'hyperplans affines et donc $\mathcal{F}$ admet dans $\mathcal{R}$ un système d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array}\right. .$$

De plus, la direction F de $\mathcal{F}$ admet dans $\mathcal{B}$ le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = 0 \end{array}\right. .$$

Ainsi, on obtient un système d'équations de la direction en « annulant les constantes ».

5.4 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

On applique ce qui précède à la dimension 2 et à la dimension 3.

• Les sous espaces affines non triviaux de $\mathbb{R}^2$ sont les droites affines qui sont aussi des hyperplans affines de $\mathbb{R}^2$. Dans un repère donné, toute droite affine $\mathcal{D}$ admet une équation de la forme $ax + by = c$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Une équation de la direction D de $\mathcal{D}$ est $ax + by = 0$. On retrouve ainsi le fait qu'un vecteur directeur de la droite affine $\mathcal{D}$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-b, a)$.

• Les sous espaces affines non triviaux de $\mathbb{R}^3$ sont les droites affines et les plans affines qui sont aussi des hyperplans affines de $\mathbb{R}^3$.
Dans un repère donné, tout plan affine $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\}$. Une équation de la direction P de $\mathcal{P}$ est $ax + by + cz = 0$.
Une droite affine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ est une intersection de deux plans affines. $\mathcal{D}$ admet donc un système d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array}\right. ,$$

où (a, b, c) et (a', b', c') sont deux triplets de réels, non colinéaires. La direction D de $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle dont un système d'équations est

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{array}\right. .$$