Planche n° 25. Structures. Corrigé

Exercice n° 1

1) • $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^2$.

• Soit $(x, x', y, y', z, z') \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned}((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') &= \left(x+x', ye^{x'}+y'e^{-x}\right)*(x'',y'') = \left(x+x'+x'', \left(ye^{x'}+y'e^{-x}\right)e^{x''}+y''e^{-x-x'}\right)\\ &= \left(x+x'+x'', ye^{x'+x''}+y'e^{-x+x''}+y''e^{-x-x'}\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(x,y)*((x',y')*(x'',y'')) &= (x,y)*\left(x'+x'', y'e^{x''}+y''e^{-x'}\right) = \left(x+x'+x'', ye^{x'+x''}+\left(y'e^{x''}+y''e^{-x'}\right)e^{-x}\right)\\ &= \left(x+x'+x'', ye^{x'+x''}+y'e^{-x+x''}+y''e^{-x-x'}\right),\end{aligned}$$

Donc, pour tout $((x,y),(x',y'),(x'',y'')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3$, $((x,y)*(x',y'))*(x'',y'') = (x,y)*((x',y')*(x'',y''))$. La loi $*$ est associative.

• Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y)*(0,0) = \left(x+0, ye^0+0e^{-x}\right) = (x,y),$$

et

$$(0,0)*(x,y) = \left(0+x, 0e^x+ye^{-0}\right) = (x,y).$$

Donc, $*$ admet un élément neutre à savoir $(0,0)$.

• Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y)*(-x,-y) = \left(x-x, ye^{-x}-ye^{-x}\right) = (0,0),$$

et

$$(-x,-y)*(x,y) = (-x+x, -ye^x+ye^x) = (0,0).$$

Donc, tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique pour $*$ dans $\mathbb{R}^2$ à savoir $(-x,-y)$.

• $(1,0)*(0,1) = \left(1, e^{-1}\right)$ et $(0,1)*(1,0) = (1,e)$. Donc $(1,0)*(0,1) \neq (0,1)*(1,0)$. La loi $*$ n'est donc pas commutative.

On a montré que

$$\boxed{\left(\mathbb{R}^2, *\right) \text{ est un groupe non abélien.}}$$

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ puis $G = \{(x, f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$. Soit $(x,x') \in \mathbb{R}^2$.

$$(x, f(x))*(x', f(x')) = (x+x', f(x)e^{x'}+f(x')e^{-x}).$$

Si G est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^2, *\right)$, on doit avoir $f(x+x') = f(x)e^{x'}+f(x')e^{-x}$. Pour $x = x' = 0$, on obtient $f(0) = 0$. Ensuite, pour tout réel x et tout réel non nul h

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(f(x)\left(e^h-1\right)+f(h)e^{-x}\right).$$

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, quand h tend vers 0, on obtient

$$f'(x) = f(x) + f'(0)e^{-x}.$$

Donc, il existe un réel K tel que pour tout réel x, $f(x) = -\dfrac{f'(0)}{2}e^{-x}+Ke^x$. En dérivant, on obtient pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{f'(0)}{2}e^{-x}+Ke^x$ et pour $x = 0$ on obtient $K = \dfrac{f'(0)}{2}$. Finalement, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{f'(0)}{2}\left(e^x-e^{-x}\right) = f'(0)\,\mathrm{sh}(x)$. On a montré que si f est solution, alors il existe un réel λ tel que pour fout réel x, $f(x) = \lambda\,\mathrm{sh}(x)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel λ tel que pour tout réel x, $f(x) = \lambda \operatorname{sh}(x)$. Alors,

- $(0, 0) = (0, f(0)) \in G$.
- pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x)e^{x'} + f(x')e^{-x} &= \lambda \left(\operatorname{sh}(x)e^{x'} + \operatorname{sh}(x')e^{-x}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(\left(e^{x} - e^{-x}\right)e^{x'} + \left(e^{x'} - e^{-x'}\right)e^{-x}\right) \\ &= \frac{\lambda}{2}\left(e^{x+x'} - e^{-x-x'}\right) = \lambda \operatorname{sh}(x + x') \\ &= f(x + x'), \end{aligned}$$

  et donc $(x, f(x)) * (x', f(x')) \in G$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(-x, -f(x)) = (-x, -\lambda \operatorname{sh}(x)) = (-x, \lambda \operatorname{sh}(-x)) = (-x, f(-x)),$$

  et donc $(-x, -f(x)) \in G$.

Ceci montre que G est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^2, *\right)$. Finalement, G est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^2, *\right)$ si et seulement si il existe un réel λ tel que pour tout réel x, $f(x) = \lambda \operatorname{sh}(x)$.

Exercice n° 2

• Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[^2$, $1 + xy \geqslant 1 - |xy| > 0$ et en particulier $1 + xy \neq 0$. Donc, pour tout $(x, y) \in]-1, 1[^2$, $x * y$ existe. Ensuite,

$$1 - \frac{x + y}{1 + xy} = \frac{1 - x - y + xy}{1 + xy} = \frac{(1 - x)(1 - y)}{1 + xy} > 0$$

et

$$\frac{x + y}{1 + xy} - (-1) = \frac{1 + x + y + xy}{1 + xy} = \frac{(1 + x)(1 + y)}{1 + xy} > 0.$$

Donc, pour tout $(x, y) \in]-1, 1[^2$, $x * y \in]-1, 1[$. Ainsi, $*$ est une loi interne dans $]-1, 1[$.

• Soit $(x, y) \in]-1, 1[^2$.

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy} = \frac{x + y}{1 + yx} = y * x.$$

Donc, la loi $*$ est commutative.

• Soit $(x, y, z) \in]-1, 1[^3$.

$$(x * y) * z = \frac{x + y}{1 + xy} * z = \frac{\dfrac{x + y}{1 + xy} + z}{1 + \dfrac{x + y}{1 + xy}z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}.$$

En échangeant les rôles de x, y et z, on obtient

$$x * (y * z) = (y * z) * x = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz},$$

et finalement $(x * y) * z = x * (y * z)$. Donc, la loi $*$ est associative.

• Pour tout x de $]-1, 1[$, $x * 0 = \dfrac{x + 0}{1 + x \times 0} = x$. Donc $*$ admet un élément neutre à savoir 0.

• Pour tout x de $]-1, 1[$, $-x \in]-1, 1[$ et $x * (-x) = \dfrac{x - x}{1 - x^2} = 0$. Donc tout élément de $]-1, 1[$ admet un symétrique pour $*$ dans $]-1, 1[$.

On a montré que $(]-1, 1[, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice n° 3

1) • $1 \in U$ car $|1| = 1$ et $U \subset \mathbb{C}^*$ car $0 \notin U$.

• Soient $(z, z') \in U^2$. Alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} = 1$. Donc $\dfrac{z}{z'} \in U$.

On a montré que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2) Soit $n \geqslant 2$.

• $1 \in \mathbb{U}_n$ car $1^n = 1$ et $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

• Soit $(z, z') \in \mathbb{U}_n^2$. $\left(\dfrac{z}{z'}\right)^n = \dfrac{z^n}{z'^n} = 1$ et donc $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}_n$.

On a montré que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Exercice n° 4

1) • $\mathscr{P}(E)$ n'est pas vide car $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

• Δ est une loi interne dans $\mathscr{P}(E)$.

• Δ est commutative et associative (voir planche n° 2, exercice n° 2, 2) et 3))

• $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta\varnothing = A$ et donc Δ possède un élément neutre dans $\mathscr{P}(E)$ à savoir $\varnothing$.

• $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta A = \varnothing$ et donc tout élément de $\mathscr{P}(E)$ possède un symétrique pour Δ dans $\mathscr{P}(E)$ à savoir lui-même.

On a montré que $(\mathscr{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.

2) • $(\mathscr{P}(E), \times)$ est un groupe commutatif.

• $\cap$ est une loi interne dans $\mathscr{P}(E)$.

• $\cap$ est commutative et associative.

• $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap E = A$ et donc $\cap$ possède un élément neutre dans $\mathscr{P}(E)$ à savoir E.

• Soit $(A, B, C) \in (\mathscr{P}(E))^3$.

$$(A\Delta B) \cap C = \left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) \cap C = \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$$

et

$$\begin{aligned}
(A \cap C)\,\Delta\,(B \cap C) &= \left((A \cap C) \cap \left(\overline{B \cap C}\right)\right) \cup \left(\left(\overline{A \cap C}\right) \cap (B \cap C)\right) \\
&= \left((A \cap C) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cup \overline{C}\right) \cap (B \cap C)\right) \\
&= \left(\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap C \cap \overline{C}\right)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(B \cap C \cap \overline{C}\right)\right) \\
&= \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)
\end{aligned}$$

et donc $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\,\Delta\,(B \cap C)$. Ainsi, $\cap$ est distributive sur Δ.

On a montré que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau (commutatif et unitaire).

Exercice n° 5

Posons $G = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.

Montrons que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

• $G \subset \mathbb{R}$ et $0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in G$.

• Soit $(a, a', b, b') \in \mathbb{Q}^2$.

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) - \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2}$$

avec $a - a' \in \mathbb{Q}$ et $b - b' \in \mathbb{Q}$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et en particulier, $(G, +)$ est un groupe commutatif.

Montrons que $G \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

• Vérifions tout d'abord que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $a + b\sqrt{2} \neq 0$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} = 0$. Si $b \neq 0$, on en déduit que $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b}$. Ceci est impossible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $-\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Donc, pour tous rationnels a et b, si $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$. Par contraposition, pour tous rationnels a et b, si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $a + b\sqrt{2} \neq 0$.

• $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2} \in G$.

• Soit $(a, a', b, b') \in \mathbb{Q}^4$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. D'après la remarque initiale, $a' + b'\sqrt{2} \neq 0$ et $a' - b'\sqrt{2} \neq 0$.

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{a' + b'\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a' - b'\sqrt{2}\right)}{\left(a' + b'\sqrt{2}\right)\left(a' - b'\sqrt{2}\right)} = \frac{aa' - 2bb'}{a'^2 - 2b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 - 2b'^2}\sqrt{2}.$$

Puisque $\dfrac{aa' - 2bb'}{a'^2 - 2b'^2}$ et $\dfrac{ba' - ab'}{a'^2 - 2b'^2}$ sont des rationnels, $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{a' + b'\sqrt{2}} \in G$.

On a montré que $G \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ et en particulier, $(G \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif.

Finalement, $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice n° 6

1) Soient $a \in \mathbb{Z}$ puis $G = a\mathbb{Z}$.

- $0 = 0 \times a \in a\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.
- Soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. $an - am = a(n - m) \in a\mathbb{Z}$.

Donc, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

2) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\mathbb{Z}$ et G est de la forme voulue.

On suppose dorénavant que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Il existe dans G un entier relatif non nul n_0. Puisque G est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, l'entier $-n_0$ est aussi dans G et l'un des deux entiers n_0 ou $-n_0$ est strictement positif.
Soit alors $A = G \cap \mathbb{Z}_+^*$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. A admet donc un plus petit élément que l'on note a. a est par définition le plus petit entier strictement positif de G.

Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G, G contient encore $a + a = 2a$, puis $a + a + a = 3a$ et plus généralement tous les na, $n \in \mathbb{N}^*$. G contient aussi les opposés de ces nombres, et puisque G contient également $0 = 0 \times a$, G contient finalement tous les na, $n \in \mathbb{Z}$. On a montré que $a\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement, soit n un élément de G. La division euclidienne de n par a s'écrit $n = aq + r$ où q et r sont deux entiers relatifs tels que $0 \leqslant r \leqslant a - 1$ (puisque a est un entier strictement positif, $a - 1$ est un entier positif).
Or, n est dans G et qa est dans G. Donc, $r = n - qa$ est dans $G \cap [\![0, a - 1]\!] = \{0\}$ (par définition de a) puis $n = qa \in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G = a\mathbb{Z}$.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont donc les $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice n° 7

1) Soit G un sous groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$ ($\{0\} = 0\mathbb{Z}$ est du type voulu).

Il existe dans G un réel non nul x_0. Puisque G est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, le réel $-x_0$ est aussi dans G et l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est strictement positif. Soit alors $A = G \cap]0, +\infty[$.

D'après ce qui précède, A est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne inférieure que l'on note a.

1er cas. Si $a = 0$. Montrons dans ce cas que G est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est par exemple le cas de $(\mathbb{Q}, +)$).

Soient x un réel et ε un réel strictement positif.

Puisque $\inf A = \inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$, il existe dans G un élément g tel que $0 < g < \varepsilon$. Puis il existe un entier relatif n tel que $ng \leqslant x - \varepsilon < (n + 1)g$ à savoir $n = \left\lfloor \dfrac{x - \varepsilon}{g} \right\rfloor$.
Soit $y = (n+1)g$. D'une part, y est dans G (si $n + 1 = 0$, $(n+1)g = 0 \in G$, si $n + 1 > 0$, $(n+1)g = g + g + \ldots + G \in G$ et si $n + 1 < 0$, $(n + 1)g = -(-(n + 1)g) \in G$) et d'autre part

$$x - \varepsilon < (n + 1)g = ng + g < x - \varepsilon + \varepsilon = x.$$

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in G/\ x - \varepsilon < y < x$ et donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

2ème cas. Supposons $a > 0$. Montrons dans ce cas que $G = a\mathbb{Z}$.

Pour cela, montrons tout d'abord que a est dans G.
Mais si a n'est pas élément de G, par définition de a, il existe un réel x dans $G \cap]a, 2a[$ puis il existe un réel y dans $G \cap]a, x[$. Le réel $x - y$ est alors dans $G \cap]0, a[$ ce qui est impossible. Donc a est élément de G.

Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G, G contient encore $a + a = 2a$, puis $a + a + a = 3a$ et plus généralement tous les na, $n \in \mathbb{N}^*$. G contient aussi les opposés de ces nombres, et puisque G contient également $0 = 0 \times a$, G contient finalement tous les na, $n \in \mathbb{Z}$. On a montré que $a\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement, soit x un élément de G et $n = \left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor$ $(\in \mathbb{Z})$. Alors, $n \leqslant \dfrac{x}{a} < n+1$ puis $0 \leqslant x - na < a$.
Or, x est dans G et na est dans G. Donc, $x - na$ est dans $G \cap [0, a[= \{0\}$, puis $x = na \in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G = a\mathbb{Z}$.

2) Soit $G = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrons que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- $G \subset \mathbb{R}$ et $0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in G$.
- Soit $(a, a', b, b') \in \mathbb{Z}^4$.

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) - \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2},$$

avec $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b - b' \in \mathbb{Z}$. Donc $\left(a + b\sqrt{2}\right) - \left(a' + b'\sqrt{2}\right) \in G$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Maintenant, la formule du binôme de Newton montre que, pour chaque entier naturel n, $\left(\sqrt{2} - 1\right)^n \in G \cap]0, +\infty[$. Or, $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2} - 1\right)^n = 0$. Ceci montre que $\inf(G \cap]0; +\infty[) = 0$ et donc que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3) a) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même et $G_f = \{T \in \mathbb{R} /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)\}$. Montrons que G_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- 0 est élément de G_f (et c'est même le seul élément de G_f si f n'est pas périodique) et donc $G \neq \varnothing$.
- De plus, si T et T' sont deux éléments de G alors, pour tout réel x,

$$f(x + (T - T')) = f((x - T') + T) = f(x - T') = f(x - T' + T') = f(x),$$

et $T - T'$ est encore un élément de G.

On a montré que G_f est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Le groupe des périodes d'une fonction est donc soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

b) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. G_f contient encore tous les nombres de la forme $a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Montrons que si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, f est constante.
Soit x un réel quelconque. Soit T une période strictement positive de f.
Il existe un entier relatif n tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$ à savoir $n = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$. Avec cet entier n, on a bien $f(x) = f(x - nT)$ avec $0 \leqslant x - nT < T$.

Puisque G_f est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe dans G_f un réel T_N tel que $0 < T_N < \dfrac{1}{N}$ ce qui implique que $\lim\limits_{N \to +\infty} T_N = 0$.
Mais alors, puisque $0 < x - \left\lfloor \dfrac{x}{T_N} \right\rfloor T_N < T_N$, on a aussi $\lim\limits_{N \to +\infty} x - \left\lfloor \dfrac{x}{T_N} \right\rfloor T_N = 0$. Or, la suite $\left(f\left(x - \left\lfloor \dfrac{x}{T_N} \right\rfloor T_N\right)\right)_{N \geqslant 0}$ est constante (égale à $(f(x))$) et donc convergente. On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{N \to +\infty} f\left(x - \left\lfloor \frac{x}{T_N} \right\rfloor T_N\right) = f\left(\lim_{N \to +\infty} \left(x - \left\lfloor \frac{x}{T_N} \right\rfloor T_N\right)\right) \quad \text{(par continuité de } f \text{ en } 0) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

c) Soit r un nombre rationnel. Soit x un réel.

- Si x est un rationnel, alors $x + r$ est un rationnel et donc $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$,
- Si x est un irrationnel, alors $x + r$ est un irrationnel (dans le cas contraire, $x = (x + r) - r$ serait un rationnel ce qui n'est pas) et donc $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

Ainsi, pour tout réel x, $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Tout rationnel est période de $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Soit s un nombre irrationnel. $\chi_{\mathbb{Q}}(0 + s) = \chi_{\mathbb{Q}}(s) = 0$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$. Donc, s n'est pas une période de $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Finalement, le groupe des périodes de $\chi_{\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{Q}$. Ce groupe des périodes est dense dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas égal à $\mathbb{R}$.

