FICHE n° 24. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION. EXTREMUMS

I Sens de variation d'une fonction

1 Définitions

Définition 1

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles.

f est **croissante** sur D si et seulement si, pour tous réels a et b de D, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.
f est **strictement croissante** sur D si et seulement si, pour tous réels a et b de D, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

f est **décroissante** sur D si et seulement si, pour tous réels a et b de D, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.
f est **strictement décroissante** sur D si et seulement si, pour tous réels a et b de D, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

f est **monotone** sur D si et seulement si f est croissante sur D ou f est décroissante sur D.
f est **strictement monotone** sur D si et seulement si f est strictement croissante sur D ou f est strictement décroissante sur D.

Exemple. Etudions le sens de variation de la fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$.

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ de sorte que $b - a \geqslant 0$.
On a $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Si a et b sont dans $[0, +\infty[$, alors $b + a \geqslant 0$ (et $b - a \geqslant 0$) puis $f(b) - f(a) \geqslant 0$ et si a et b sont dans $]-\infty, 0]$, alors $b + a \leqslant 0$ (et $b - a \geqslant 0$) puis $f(b) - f(a) \leqslant 0$.

Ainsi, si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ et si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $f(a) \geqslant f(b)$. La fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et est croissante sur $[0, +\infty[$.

2 Tableau de variation

On représente les variations d'une fonction par un **tableau de variation**. En voici un exemple :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

Dans le tableau ci-dessus, on lit : la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -2]$, est croissante sur l'intervalle $[-2, 1]$ et est décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Exemple. La fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0 et ce minimum est égal à 0^2 c'est-à-dire 0.
La fonction $f\ :\ x \mapsto x^2$ n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

II Extremums

Définition 2

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un réel de D.

La fonction f admet un **maximum** en x_0 si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) \leqslant x_0$.
La fonction f admet un **minimum** en x_0 si et seulement si pour tout réel x de D, $f(x) \geqslant x_0$.

La fonction f admet un **extremum** en x_0 si et seulement si la fonction f admet un maximum ou un minimum en x_0.

Le maximum (ou un minimum) d'une fonction est une valeur prise par la fonction. Il se lit sur l'axe des ordonnées. **Il n'y a qu'un maximum** (s'il y en a un) mais il peut **être atteint** en plusieurs réels x_0, x_1, ...