

# Chapitre 24. Comparaison des fonctions en un point. Développements limités

## Plan du chapitre

<b>1 Les différentes relations de comparaison</b> .....	<b>page 2</b>
1.1 Définition des relations de comparaison .....	page 2
1.1.1 Relation de domination .....	page 2
1.1.2 Relation de prépondérance .....	page 3
1.1.3 Relation d'équivalence des fonctions .....	page 4
1.2 Propriétés des relations de comparaison .....	page 5
1.2.1 Propriétés de $o$ et $O$ .....	page 5
1.1.2 Propriétés de $\sim$ .....	page 7
<b>2 Les théorèmes de croissances comparées</b> .....	<b>page 11</b>
<b>3 Développements limités</b> .....	<b>page 12</b>
3.1 Définition .....	page 12
3.2 Unicité d'un développement limité .....	page 13
3.3 Formule de TAYLOR-YOUNG .....	page 14
3.4 Formulaire de développements limités en $0$ .....	page 16
3.5 Opérations sur les développements limités .....	page 19
3.5.1 Troncature .....	page 20
3.5.2 Combinaisons linéaires de développements limités .....	page 20
3.5.3 Produits de développements limités .....	page 21
3.5.4 Composition de développements limités .....	page 23
3.5.5 Quotients de développements limités .....	page 25
3.5.6 Intégration des développements limités .....	page 27
3.6 Généralisations .....	page 31
3.6.1 Développements limités en $\pm\infty$ .....	page 31
3.6.2 Développements limités généralisés en un réel .....	page 32
3.6.3 Développements limités généralisés en $\pm\infty$ .....	page 32
3.6.4 Développements asymptotiques .....	page 32
<b>4 Quelques applications des relations de comparaison</b> .....	<b>page 33</b>
4.1 Calculs de limites .....	page 33
4.2 Détermination d'équivalents .....	page 34
4.3 Etudes de signes au voisinage de $a$ .....	page 35
4.4 Etude locale d'un graphe .....	page 35
4.5 Etude asymptotique d'un graphe .....	page 36
4.6 Extrema locaux .....	page 40
<b>5 Exemples de développements asymptotiques</b> .....	<b>page 41</b>
5.1 Développement d'une réciproque .....	page 41
5.2 Développement asymptotique d'une solution d'équation avec paramètre .....	page 42
5.3 Suites récurrentes .....	page 44
5.4 Suites d'intégrales .....	page 45
5.5 La formule de STIRLING .....	page 45

# 1 Les différentes relations de comparaison

Dans tout ce qui suit,  $a$  désigne un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .  $D$  désigne un ensemble de la forme  $[a, b[$  ou  $]a, b[$ , ou  $[a, +\infty[$  ... ou  $]b, a[$ , ... ou  $]b, a[ \cup ]a, c[$ , ou  $]b, c[$  avec  $b < a < c$  ... En résumé,  $D$  est un intervalle de longueur non nulle ou un intervalle de longueur non nulle privé d'un réel  $a$  et  $a$  est ou n'est pas dans  $D$ .

Enfin,  $f, g$  sont des fonctions définies sur l'ensemble  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

Comme dans les chapitres précédents, l'expression « au voisinage de  $a$  » signifie :

- sur un intervalle de la forme  $[A, +\infty[$  si  $a = +\infty$ ,
- sur un intervalle de la forme  $] - \infty, A]$  si  $a = -\infty$ ,
- sur un ensemble de la forme  $[a - h, a + h] \cap D$ , où  $h > 0$ , si  $a$  est réel.

## 1.1 Définition des relations de comparaison

### 1.1.1 Relation de domination

**DÉFINITION 1.** Dire que la fonction  $f$  est **dominée** par la fonction  $g$  en  $a$  (ou que la fonction  $g$  **domine** la fonction  $f$  en  $a$ ) équivaut à dire qu'il existe une fonction  $h$ , bornée sur un voisinage de  $a$ , telle que  $f = gh$ .

Si la fonction  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ , la fonction  $f$  est **dominée** par la fonction  $g$  en  $a$  si et seulement si la fonction  $\frac{f}{g}$  est bornée sur un voisinage de  $a$  privé de  $a$ .

**Notations.** Quand la fonction  $f$  est dominée par la fonction  $g$  en  $a$ , on écrit

$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ ou } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)) \text{ (notation de LANDAU)}$$

ou

$$f \underset{a}{\preceq} g \text{ ou } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\preceq} g(x) \text{ (notation de HARDY)}.$$

La notation la plus fréquemment utilisée est la notation de LANDAU  $f \underset{a}{=} O(g)$  mais la notation de HARDY  $f \underset{a}{\preceq} g$  est parfois utilisée, cette notation ayant entre autre le mérite de pouvoir être renversée : si la fonction  $g$  domine la fonction  $f$  au voisinage de  $a$ , on écrit  $g \underset{a}{\succeq} f$ .

On peut expliciter la définition suivant que  $a$  soit réel ou infini :

- si  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$f \underset{a}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D, (|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|).$$

- si  $a = +\infty$ ,

$$f \underset{+\infty}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D, (x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|).$$

- si  $a = -\infty$ ,

$$f \underset{-\infty}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D, (x \leq A \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|).$$

$\Rightarrow$  **Commentaire.** Dire que  $f \underset{a}{=} O(g)$  signifie que l'ordre de grandeur de la fonction  $f$  en  $a$  est inférieur ou égal à l'ordre de grandeur de la fonction  $g$  en  $a$ . Par exemple,  $2x \underset{+\infty}{=} O(x)$  ou  $x^2 \underset{0}{=} O(x)$  ou  $2x - 2 = 2(x - 1) \underset{1}{=} O(x - 1)$

On a immédiatement

**Théorème 1.**  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  si et seulement si  $f \underset{a}{=} O(1)$ .

**Exemples.**

- $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(1)$  (car par exemple pour  $x \geq 1$ ,  $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ).
- $\frac{2x + 3}{x - 5} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(1)$ .

- $\frac{2x+3}{x^2-5} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$  car pour  $x \geq 3$ ,
 
$$\left| \frac{(2x+3)/(x^2-5)}{1/x} \right| = \frac{2x^2+3x}{x^2-5} \leq \frac{2x^2+3x^2}{x^2-5} = \frac{1}{\frac{5}{x}-1} \leq \frac{1}{\frac{5}{9}-1} = \frac{45}{4}$$

et donc la fonction  $x \mapsto \frac{(2x+3)/(x^2-5)}{1/x}$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ .

- $\frac{3}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{3}{x}\right)$ .
- $\frac{e^{ix}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$  ou aussi  $\frac{e^{ix}}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(1)$  car pour  $x > 0$ ,  $\left| \frac{e^{ix}}{x} \right| = \frac{1}{x}$ .
- $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$  car  $x^2 = x \times x \underset{x \rightarrow 0}{=} x \times O(1)$ .
- $(x-1)^2 \underset{x \rightarrow 1}{=} O(x-1)$  et  $\frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{=} O\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$ .
- $x^2 \sin x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^2)$  et  $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^2)$ .

□

### 1.1.2 Relation de prépondérance

**DÉFINITION 2.** On suppose que la fonction  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ . On dit que la fonction  $f$  est **négligeable devant** la fonction  $g$  en  $a$  (ou que la fonction  $g$  est **prépondérante devant** la fonction  $f$  en  $a$ ) si et seulement si la fonction  $\frac{f}{g}$  a pour limite 0 en  $a$ .

Dit autrement, si la fonction  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ , la fonction  $f$  est **négligeable devant** la fonction  $g$  si et seulement si il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $f = g\varepsilon$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

**Notations.** Quand la fonction  $f$  est négligeable devant la fonction  $g$  en  $a$ , on écrit

$$f \underset{a}{=} o(g) \text{ ou } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \text{ (notation de LANDAU)}$$

ou

$$f \underset{a}{\ll} g \text{ ou } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\ll} g(x) \text{ (notation de HARDY)}.$$

La notation la plus fréquemment utilisée est la notation de LANDAU  $f \underset{a}{=} o(g)$  mais la notation de HARDY  $f \underset{a}{\ll} g$  est parfois utilisée, cette notation ayant entre autre le mérite de pouvoir être renversée : si la fonction  $g$  est prépondérante devant la fonction  $f$ , on écrit  $g \underset{a}{\gg} f$ . □

On peut expliciter la définition suivant que  $a$  soit réel ou infini :

- si  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D, (|x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|).$$

- si  $a = +\infty$ ,

$$f \underset{+\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D, (x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|).$$

- si  $a = -\infty$ ,

$$f \underset{-\infty}{=} o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D, (x \leq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|).$$

⇒ **Commentaire.** Dire que  $f \underset{a}{=} o(g)$  signifie que l'ordre de grandeur de la fonction  $f$  en  $a$  est strictement inférieur à l'ordre de grandeur de la fonction  $g$  en  $a$ . Par exemple,  $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$  ou  $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$  ou  $(x-1)^2 \underset{x \rightarrow 1}{=} o(x-1)$

On a immédiatement :

**Théorème 2.**  $f$  converge vers 0 en  $a$  si et seulement si  $f \underset{a}{=} o(1)$ .  
Plus généralement,  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} \ell \in \mathbb{C}$  si et seulement si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1)$ .

**Théorème 3.**  $f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$ .

**DÉMONSTRATION.** Si  $\frac{f}{g}$  tend vers 0 en  $a$ , en particulier  $\frac{f}{g}$  est bornée sur un voisinage de  $a$ . □

### 1.1.3 Relation d'équivalence des fonctions

**DÉFINITION 3.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ .

On dit que la fonction  $f$  est **équivalente** à la fonction  $g$  en  $a$  si et seulement si  $\frac{f}{g}$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $a$ .

**Notation.** Quand la fonction  $f$  est équivalente à la fonction  $g$  en  $a$ , on écrit  $f \underset{a}{\sim} g$  ou  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ . □

**Exemple.**  $2x^2 - 3x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^2$  car  $\frac{2x^2 - 3x + 5}{2x^2} = 1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$  ou aussi  $3x - x^2 + x^4 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x$  car  $\frac{3x - x^2 + x^4}{3x} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

**Théorème 4.**

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g).$$

**DÉMONSTRATION.**

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\sim} g &\Leftrightarrow \frac{f}{g} \underset{a}{\rightarrow} 1 \Leftrightarrow \frac{f}{g} \underset{a}{=} 1 + o(1) \Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + g \times o(1) \\ &\Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g) \quad (\text{car } \frac{g \times o(1)}{g} = o(1) \underset{a}{\rightarrow} 0). \end{aligned}$$

□

Par exemple, dire que  $x^2 - 3x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  équivaut à dire que  $-3x + 5$  est négligeable devant  $x^2$  en  $+\infty$  et donc que  $x^2 - 3x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 + o(x^2)$ .



On met tout de suite en garde contre une erreur classique.

**Les phrases «  $f \underset{a}{\sim} g$  » et «  $f - g \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 0$  » n'ont aucun rapport.**

En effet,  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ . Mais  $\frac{1/x}{1/x^2} = x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$  et donc  $\frac{1}{x} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ . Ainsi,

$$f - g \underset{a}{\rightarrow} 0 \not\underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} g.$$

De même,  $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ . Mais  $(x^2 + x) - x^2 = x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ . Donc,

$$f \underset{a}{\sim} g \not\underset{a}{\sim} f - g \underset{a}{\rightarrow} 0.$$

On donne maintenant un formulaire d'équivalents usuels. Ce formulaire sera largement complété plus loin par un formulaire de développements limités.

### Théorème 5. Formulaire d'équivalents usuels.

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$  ou encore  $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ .
- $\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ .
- $\frac{1}{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$  ou encore  $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$ .
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$  ou encore  $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ .
  
- $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ .
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$  ou aussi  $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$ .
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ .
- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ .
- $\text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $\text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ .
- $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ .
- $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  ou encore  $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ .
- $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  ou encore  $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ .
- $\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  ou encore  $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ .
  
- $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$ .
  
- $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ .

**DÉMONSTRATION.** Pour toutes les formules où  $x$  tend vers 0, on renvoie à la démonstration du théorème correspondant dans le chapitre « Comparaison des suites en  $+\infty$  ».

En posant  $x = 1 + h$  ou encore  $h = x - 1$  de sorte que  $x$  tend vers 1 si et seulement si  $h$  tend vers 0, on obtient  $\ln(x) = \ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$  ou encore  $\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$ .

Enfin,  $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^x}{2} + o(1)$  et en particulier,  $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$  (car  $\frac{e^x}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ ).

□

## 1.2 Propriétés des relations de comparaison

### 1.2.1 Propriétés de $o$ et $O$

#### Théorème 6.

- Si  $f \underset{a}{=} O(g)$  et  $g \underset{a}{=} O(h)$ , alors  $f \underset{a}{=} O(h)$ . Dit autrement

$$O(O(f)) \underset{a}{=} O(f).$$

- Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$ , alors  $f \underset{a}{=} o(h)$ . Dit autrement

$$o(o(f)) \underset{a}{=} o(f).$$

- Si  $f \underset{a}{=} O(g)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$  ou si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $g \underset{a}{=} O(h)$ , alors  $f \underset{a}{=} o(h)$ . Dit autrement

$$O(o(f)) \underset{a}{=} o(f) \text{ et } o(O(f)) \underset{a}{=} o(f).$$

**DÉMONSTRATION.** Au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ , on peut écrire  $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$ .

- Si  $f = O(g)$  et  $g = O(h)$ , alors les fonctions  $\frac{f}{g}$  et  $\frac{g}{h}$  sont bornées au voisinage de  $a$ . Il en est de même de la fonction  $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$ .
- Si  $f = o(g)$  et  $g = o(h)$ , alors  $\frac{f}{g} \rightarrow 0$  et  $\frac{g}{h} \rightarrow 0$ . Mais alors,  $\frac{f}{h} \rightarrow 0 \times 0 = 0$  et donc  $f = o(h)$ .
- Si  $f = O(h)$  et  $g = o(h)$  ou si  $f = o(h)$  et  $g = O(h)$ , la fonction  $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$  est le produit d'une fonction bornée au voisinage de  $a$  par une fonction tendant vers 0 en  $a$ . Donc,  $\frac{f}{h} \rightarrow 0$ .

□

### Théorème 7.

- Si  $g = O(f)$  et  $h = O(f)$ , alors  $g + h = O(f)$ . Dit autrement

$$O(f) + O(f) = O(f).$$

- Si  $g = o(f)$  et  $h = o(f)$ , alors  $g + h = o(f)$ . Dit autrement

$$o(f) + o(f) = o(f).$$

**DÉMONSTRATION.** Au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ , on peut écrire  $\frac{g+h}{f} = \frac{g}{f} + \frac{h}{f}$ .

- Si  $g = O(f)$  et  $h = O(f)$ , alors les fonctions  $\frac{g}{f}$  et  $\frac{h}{f}$  sont bornées au voisinage de  $a$ . Il en est de même de la fonction  $\frac{g+h}{f}$  qui est une somme de fonctions bornées au voisinage de  $a$  et donc  $g + h = O(f)$ .
- Si  $g = o(f)$  et  $h = o(f)$ , alors  $\frac{g}{f} \rightarrow 0$  et  $\frac{h}{f} \rightarrow 0$ . Mais alors,  $\frac{g+h}{f} \rightarrow 0 + 0 = 0$  et donc  $g + h = o(f)$ .

□

Ainsi, par exemple,  $x + o(x) + 2x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x + o(x)$ .

### Théorème 8. Soit $\lambda$ un complexe non nul.

- $O(\lambda f) = O(f)$ .
- $o(\lambda f) = o(f)$ .

**DÉMONSTRATION.**

- Pour  $x$  au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $\frac{O(\lambda f)}{f} = \lambda \frac{O(\lambda f)}{\lambda f}$ . La fonction  $\frac{O(\lambda f)}{\lambda f}$  est bornée au voisinage de  $a$  et donc la fonction  $\frac{O(\lambda f)}{f}$  est bornée au voisinage de  $a$  ou encore  $O(\lambda f) = O(f)$ .
- Pour  $x$  au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $\frac{o(\lambda f)}{f} = \lambda \frac{o(\lambda f)}{\lambda f}$ .  $\frac{o(\lambda f)}{\lambda f} \rightarrow 0$  et donc  $\frac{o(\lambda f)}{f} \rightarrow \lambda \times 0 = 0$  ou encore  $o(\lambda f) = o(f)$ .

□

Ainsi, par exemple,  $o\left(\frac{2x^2}{3}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ .

### Théorème 9.

- $f \times O(g) = O(fg)$ . Plus généralement,  $O(f) O(g) = O(fg)$ .
- $f \times o(g) = o(fg)$ . Plus généralement,  $o(f) o(g) = o(fg)$ .

**DÉMONSTRATION.**

- Au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $\frac{fO(g)}{fg} = \frac{O(g)}{g}$ . La fonction  $\frac{O(g)}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$  et il en est de même de la fonction  $\frac{fO(g)}{fg}$ . Donc  $f O(g) = O(fg)$ .

Plus généralement, au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $\frac{O(f) O(g)}{fg} = \frac{O(f)}{f} \times \frac{O(g)}{g}$ . Les fonctions  $\frac{O(f)}{f}$  et  $\frac{O(g)}{g}$  sont bornées

au voisinage de  $a$  et il en est de même de la fonction  $\frac{O(f)O(g)}{fg}$ . Donc  $O(f)O(g) \underset{a}{=} O(fg)$ .

• Au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $\frac{fo(g)}{fg} = \frac{o(g)}{g} \cdot \frac{o(g)}{g} \underset{a}{\rightarrow} 0$  et donc  $\frac{fo(g)}{fg} \underset{a}{\rightarrow} 0$  ou encore  $fo(g) \underset{a}{=} o(fg)$ .

Plus généralement, au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $\frac{o(f)o(g)}{fg} = \frac{o(f)}{f} \times \frac{o(g)}{g} \cdot \frac{o(f)}{f} \underset{a}{\rightarrow} 0$  et  $\frac{o(g)}{g} \underset{a}{\rightarrow} 0$ .

Par suite,  $\frac{o(f)}{f} \times \frac{o(g)}{g} \underset{a}{\rightarrow} 0 \times 0 = 0$  et donc  $o(f)o(g) \underset{a}{=} o(fg)$ .

□

Ainsi, par exemple,  $x^2 o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^6) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^6 o(1)$ .

### Théorème 10.

- Si  $f \underset{a}{\sim} g$ , alors  $O(f) \underset{a}{=} O(g)$ . Dit autrement  $O(f + o(f)) \underset{a}{=} O(f)$ .
- Si  $f \underset{a}{\sim} g$ , alors  $o(f) \underset{a}{=} o(g)$ . Dit autrement  $o(f + o(f)) \underset{a}{=} o(f)$ .

#### DÉMONSTRATION .

- $f + o(f) \underset{a}{=} f + O(f) \underset{a}{=} O(f) + O(f) \underset{a}{=} O(f)$  puis  $O(f + o(f)) \underset{a}{=} O(O(f)) \underset{a}{=} O(f)$ .
- $f + o(f) \underset{a}{=} O(f)$  puis  $o(f + o(f)) \underset{a}{=} o(O(f)) \underset{a}{=} o(f)$ .

□

Ainsi, par exemple,  $o(2x^2 - 3x + 5) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(2x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ .

### Théorème 11. Soit $\alpha$ un réel strictement positif.

- Si  $f \underset{a}{=} O(g)$ , alors  $|f|^\alpha \underset{a}{=} O(|g|^\alpha)$ . Dit autrement

$$|O(f)|^\alpha \underset{a}{=} O(|f|^\alpha).$$

- Si  $f \underset{a}{=} o(g)$ , alors  $|f|^\alpha \underset{a}{=} o(|g|^\alpha)$ . Dit autrement

$$|o(f)|^\alpha \underset{a}{=} o(|f|^\alpha).$$

**DÉMONSTRATION .** Au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $\frac{|f|^\alpha}{|g|^\alpha} = \left| \frac{f}{g} \right|^\alpha$ . Puisque  $\alpha > 0$ , si la fonction  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ , alors la fonction  $\frac{|f|^\alpha}{|g|^\alpha}$  est bornée au voisinage de  $a$ , et si  $\frac{f}{g} \underset{a}{\rightarrow} 0$ , alors  $\frac{|f|^\alpha}{|g|^\alpha} \underset{a}{\rightarrow} 0$ .

□

## 1.2.2 Propriétés de $\sim$

Commençons par rappeler que

**Théorème 12.** Si  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,  $f + o(f) \underset{a}{\sim} f$ .

**Théorème 13.** La relation  $f \underset{a}{\sim} g$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$  ou encore, si  $f, g$  et  $h$  sont trois fonctions ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$  :

- $f \underset{a}{\sim} f$ ;
- $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$ ;
- $(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\sim} h) \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$ .

**DÉMONSTRATION .**

- $\frac{f}{f} = 1 \xrightarrow{a} 1$  et donc  $f \sim_a f$ .
- $f \sim_a g \Rightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{a} 1 \Rightarrow \frac{g}{f} \xrightarrow{a} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow g \sim_a f$ .
- $f \sim_a g$  et  $g \sim_a h \Rightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{a} 1$  et  $\frac{g}{h} \xrightarrow{a} 1 \Rightarrow \frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h} \xrightarrow{a} 1 \times 1 = 1 \Rightarrow f \sim_a h$ .

□

**Théorème 14.** Soient  $f, g, h$  et  $k$  quatre fonctions ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ .

- $(f \sim_a h \text{ et } g \sim_a k) \Rightarrow fg \sim_a hk$ .
- $(f \sim_a h \text{ et } g \sim_a k) \Rightarrow \frac{f}{g} \sim_a \frac{h}{k}$ .

**DÉMONSTRATION .** Supposons  $(f \sim_a h \text{ et } g \sim_a k)$ .

$$\frac{fg}{hk} = \frac{f}{h} \times \frac{g}{k} \xrightarrow{a} 1 \times 1 = 1$$

et donc  $fg \sim_a hk$ . De même,

$$\frac{f/g}{h/k} = \frac{f}{h} \times \frac{k}{g} \xrightarrow{a} 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

et donc  $\frac{f}{g} \sim_a \frac{h}{k}$ .

□

**Théorème 15.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles, strictement positives au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$  et soit  $\alpha$  un réel.

Si  $f \sim_a g$  alors  $f^\alpha \sim_a g^\alpha$ .

**DÉMONSTRATION .** Si  $f \sim_a g$  alors  $\frac{f}{g} \xrightarrow{a} 1$  puis  $\frac{f^\alpha}{g^\alpha} = \left(\frac{f}{g}\right)^\alpha \xrightarrow{a} 1^\alpha = 1$  et donc  $f^\alpha \sim_a g^\alpha$ .

□

**Exemple.** Ainsi, dans un **produit** ou un **quotient**, si on remplace chaque **facteur** par un facteur équivalent, on obtient une fonction équivalente. Par exemple, déterminons un équivalent simple en  $+\infty$  de

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln^2\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \times \sqrt{4x+3}}$$

Puisque  $\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,  $\sin\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{x}$ . De même,  $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ ,  $e^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ ,  $\ln\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$ . D'autre part,  $4x+3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4x$  et donc  $\sqrt{4x+3} = (4x+3)^{\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (4x)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$ . Donc,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{3}{x} \times 1 \times \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 \times 2\sqrt{x}} = 6x\sqrt{x}.$$

□

**Théorème 16.**

- 1) Un polynôme non nul est équivalent en  $+\infty$  à son monôme de plus haut degré.  
Une fraction rationnelle non nulle est équivalente en  $+\infty$  au quotient de ses monômes de plus haut degré.
- 2) Un polynôme non nul est équivalent en  $0$  à son monôme de plus bas degré.  
Une fraction rationnelle non nulle est équivalente en  $0$  au quotient de ses monômes de plus bas degré.



**DÉMONSTRATION .**

1) • Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  où  $p \in \mathbb{N}$ ,  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  et  $a_n \neq 0$ . Pour  $x > 0$ ,

$$\frac{P(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}.$$

Donc,  $\frac{P(x)}{a_n x^n} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + o(1)$  puis  $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n + o(a_n x^n)$  ou encore  $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$ .

• Pour  $x$  au voisinage de  $+\infty$ , posons  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{\sum_{k=0}^p b_k x^k}$  où  $(n, p) \in \mathbb{N}$ ,  $(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_p) \in \mathbb{C}^{n+p+2}$  et  $a_n \neq 0$  et  $b_p \neq 0$ .

D'après ce qui précède et le théorème 15,

$$R(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} = \frac{a_n}{b_p} x^{n-p}.$$

2) Se montre de manière analogue. □

Passons maintenant aux principaux problèmes que l'on rencontre avec des équivalents. Il y a cinq pièges quand on les manipule :

- on n'écrit pas qu'une fonction est équivalente à 0 ;
- on ne passe pas aux exponentielles dans des équivalents ;
- on ne passe pas aux logarithmes dans des équivalents ;
- on n'additionne pas membre à membre des équivalents ;
- on ne passe pas de l'autre côté d'un équivalent pour l'addition.

Reprenons ces problèmes dans l'ordre.

**Problème n° 1.**

**On n'écrit jamais qu'une fonction est équivalente à 0.**

La première raison est que l'on a défini la relation  $f \underset{a}{\sim} g$  quand  $f$  et  $g$  sont deux fonctions **ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$** . Même la définition n'utilisant pas de fractions ( $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + o(g)$ ) ne peut pas fonctionner si  $g$  est la fonction nulle car aucune fonction n'est négligeable devant la fonction nulle.

On peut aller plus loin. Si on se permettait d'écrire que  $x$  et  $x^2$  sont équivalents à 0 en 0, alors  $x$  et  $x^2$  serait équivalents en 0, ce qui n'est pas.

**Problème n° 2.**

**On ne passe pas aux exponentielles dans des équivalents.**

Par exemple,  $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  mais  $\frac{e^{(x^2+x)}}{e^{(x^2)}} = e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$  et donc  $e^{(x^2+x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\gg} e^{(x^2)}$  et en tout cas,  $e^{(x^2+x)} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{(x^2)}$ .

La règle est permettant de gérer les exponentielles est la suivante :

**Théorème 17.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ .

$$e^f \underset{a}{\sim} e^g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{\rightarrow} 0.$$

Dit autrement,

$$e^{f+o(1)} \underset{a}{\sim} e^f.$$

**DÉMONSTRATION .**  $e^f \underset{a}{\sim} e^g \Leftrightarrow \frac{e^f}{e^g} \underset{a}{\rightarrow} 1 \Leftrightarrow e^{f-g} \underset{a}{\rightarrow} 1 \Leftrightarrow f - g \underset{a}{\rightarrow} 0$  (car  $f - g = \ln(e^{f-g})$ .) □

Ainsi, on obtient un équivalent d'une fonction du type  $e^f$  en effaçant tous les termes tendant vers 0 dans l'exposant. Par exemple,

$$e^{x^2-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x^2-x+\frac{1}{2}}.$$

Par contre, on ne peut pas simplifier davantage. Si par exemple, on supprime le terme  $\frac{1}{2}$ , la fonction obtenue n'est plus équivalente.

### Problème n° 3.

On ne passe pas aux logarithmes dans des équivalents.

Dit autrement :

$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ g.$$

Le principal problème pour donner un équivalent de  $\ln \circ f$  est quand  $f$  tend vers 1. On rappelle d'abord la bonne façon d'obtenir un équivalent : si  $f \underset{a}{\rightarrow} 1$ , alors  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x) - 1$ . Par exemple,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}.$$

Si par contre, on cherche à donner d'abord un équivalent de  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  (par exemple,

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{17}{x}$$

et les équivalents écrits sont tout à fait justes), puis qu'on passe aux logarithmes, on obtient  $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(1 + \frac{17}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{17}{x}$  ou encore pire  $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1) = 0$  ce qui est totalement faux.

Il existe néanmoins des situations où on peut passer aux logarithmes dans les équivalents. La situation la plus simple est quand  $f(x)$  tend vers un réel strictement positif  $\ell$  différent de 1. Dans ce cas, on a immédiatement  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(\ell)$ . Par exemple,  $\ln\left(\frac{2x+3}{x-5}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2)$ . Sinon, on a le théorème suivant :

**Théorème 18.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles, strictement positives au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ .

- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 0$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , alors  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$ .
- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} +\infty$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , alors  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$ .

$\Rightarrow$  **Commentaire.** On peut résumer le théorème précédent en disant que si  $f$  et  $g$  sont soit des infiniment petits équivalents en  $a$ , soit des infiniment grands équivalents en  $a$ , alors  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$ .

#### DÉMONSTRATION .

Supposons que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} +\infty$  et que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ . Puisque  $g = \frac{g}{f} \times f$ , on a aussi  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} +\infty$  puis, pour  $x$  au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} &= \frac{\ln\left(g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(g(x)) + \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} 1 + \frac{o(1)}{\ln(g(x))} \quad (\text{car } \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 1) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} 1 + o(1) \quad (\text{car } g(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} +\infty). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$ .

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 0$  et que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , il suffit d'appliquer ce qui précède aux fonctions  $\frac{1}{f}$  et  $\frac{1}{g}$ .

□

Par exemple,  $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$  et donc

$$\ln(\operatorname{ch}(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x),$$

ou aussi,  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$  et donc

$$\ln(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x).$$

#### Problème n° 4.

On n'additionne pas membre à membre des équivalents.

Par exemple, si  $f(x) = x^2 + x + 3$  et  $g(x) = -x^2 + \sqrt{x} + 1$ , on a par exemple,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 + \sqrt{x}$ .

Pourtant,  $f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\not\sim} x^2 + (-x^2 + \sqrt{x}) = \sqrt{x}$ . En effet,  $f(x) + g(x) = x + \sqrt{x} + 4 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

Le plus simple pour être sûr de ne pas faire d'erreurs de raisonnement avec les équivalents et les sommes, est de revenir systématiquement au théorème

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x) + o(f(x)).$$

Déterminons par exemple un équivalent simple de  $\sqrt{x^4 + 3x^3 - 1} - x^2$  (une catastrophe serait par exemple  $\sqrt{x^4 + 2x^3 - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x^4} = x^2$  et donc  $\sqrt{x^4 + 2x^3 - 1} - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ ).

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 + 3x^3 - 1} - x^2 &= \sqrt{x^4} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} - x^2 \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - x^2 \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \left(1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x^2 \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 + \frac{3x}{2} - x^2 + o(x) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{3x}{2} + o(x) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3x}{2}. \end{aligned}$$

#### Problème n° 5.

On ne passe pas de l'autre côté d'un équivalent pour l'addition.

Par exemple,  $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$  mais  $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\not\sim} x$  (car  $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ ). L'action de passer le 1 de l'autre côté n'est donc pas correcte.

## 2 Les théorèmes de croissances comparées

On rappelle ici les différents théorèmes de croissances comparées, déjà énoncés et démontrés dans le chapitre « Fonctions de référence » :

### Théorème 19 (les théorèmes de croissances comparées).

1)  $\forall (\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2, \alpha < \alpha' \Rightarrow x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} x^{\alpha'}$  et  $\forall (\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2, \alpha < \alpha' \Rightarrow x^{\alpha'} \underset{0}{\ll} x^\alpha$ .

2) a)  $\forall (a, a') \in ]0, +\infty[^2, a < a' \Rightarrow a^x \underset{+\infty}{\ll} a'^x$ .

c)  $\forall (\alpha, a) \in \mathbb{R} \times ]1, +\infty[, x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x$  et  $\forall (\alpha, a) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[, a^x \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha$ .

d)  $\forall a \in ]1, +\infty[, \forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, (\log_a(x))^\beta \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha$ .

2)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a > 1, a^x \underset{-\infty}{\ll} \frac{1}{|x|^\alpha}$  (ou encore  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha a^x = 0$ ).

3)  $\forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, \ln^\beta(x) \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^\alpha}$  (ou encore  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln^\beta(x) = 0$ ).

Ainsi, par exemple,

$$1 \underset{+\infty}{\ll} \ln(\ln x) \underset{+\infty}{\ll} \ln x \underset{+\infty}{\ll} \ln^2 x \underset{+\infty}{\ll} \sqrt{x} \underset{+\infty}{\ll} x \underset{+\infty}{\ll} x \ln x \underset{+\infty}{\ll} x^{\frac{3}{2}} \underset{+\infty}{\ll} x^2 \underset{+\infty}{\ll} (1,01)^x \underset{+\infty}{\ll} e^x$$

et aussi

$$e^{-x} \underset{+\infty}{\ll} (1,01)^{-x} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x \ln x} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{\ln^2 x} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{\ln x} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{\ln(\ln x)} \underset{+\infty}{\ll} 1.$$

De même,

$$1 \underset{0}{\ll} \ln x \underset{0}{\ll} \ln^2 x \underset{0}{\ll} \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{0}{\ll} \frac{1}{x} \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^2}$$

et aussi

$$x^2 \underset{0}{\ll} x^{\frac{3}{2}} \underset{0}{\ll} x \underset{0}{\ll} \sqrt{x} \underset{0}{\ll} \frac{1}{\ln x} \underset{0}{\ll} 1,$$

De même,

$$1 \underset{1}{\ll} \ln(x-1) \underset{1}{\ll} \ln^2(x-1) \underset{1}{\ll} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \underset{1}{\ll} \frac{1}{x-1} \underset{1}{\ll} \frac{1}{(x-1)^2}$$

et aussi

$$(x-1)^2 \underset{1}{\ll} (x-1)^{\frac{3}{2}} \underset{1}{\ll} x-1 \underset{1}{\ll} \sqrt{x-1} \underset{1}{\ll} \frac{1}{\ln(x-1)} \underset{1}{\ll} 1,$$

## 3 Développements limités

### 3.1 Définition

DÉFINITION 4.

1) Soit  $f$  définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0 à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  admet un **développement limité d'ordre  $n$**  en 0 si et seulement si il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

2) Plus généralement, soit  $f$  définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  sauf peut-être en  $x_0$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$f$  admet un **développement limité d'ordre  $n$**  en  $x_0$  si et seulement si il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Dire que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  équivaut à dire que la fonction  $h \mapsto f(x_0 + h)$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0.

⇒ **Commentaire.**

◇ Une fonction donnée n'admet pas nécessairement un développement limité à un ordre donné. Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , posons  $f(x) = \frac{1}{|x|}$ . Si  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 0, il existe  $a_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = a_0 + o(1)$ . Ceci impose  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$ . Mais

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ . Donc,  $f$  n'admet de développement limité d'ordre 0 en 0.

◇ Une fonction donnée peut admettre un développement limité d'ordre 1 et pas un développement limité d'ordre 2. Considérons par exemple la fonction  $f : x \mapsto |x|^{\frac{3}{2}}$ .  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1 :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$  ou encore, plus explicitement,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + 0x + o(x)$ .

Supposons qu'il existe  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$ . Nécessairement,  $a_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  et donc  $|x|^{\frac{3}{2}} = a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$ . Après simplification par  $|x|$ , on obtient  $|x|^{\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \pm a_1 + a_2 |x| + o(x)$ . Quand  $x$  tend vers 0, on obtient encore  $a_1 = 0$ . Il reste  $|x|^{\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_2 |x| + o(x)$  puis  $1 \underset{x \rightarrow 0}{=} a_2 \sqrt{|x|} + o(\sqrt{|x|})$ . Quand  $x$  tend vers 0, on obtient  $1 = 0$  ce qui est absurde. Donc,  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1 mais pas un développement limité d'ordre 2.

◇ Un développement limité d'ordre 0 en  $x_0$  s'écrit :  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + o(1)$ . Si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$ , l'existence d'un développement limité d'ordre 0 équivaut au fait que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe et est finie. Si  $f$  est définie en  $x_0$ , l'existence d'un développement limité d'ordre 0 équivaut à la continuité de  $f$  en  $x_0$ .

◇ On rappelle que l'existence d'un développement limité d'ordre 1 en  $x_0$  équivaut à la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$ .

◇ Signalons immédiatement (mais nous y reviendrons plus loin) que si  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_p (x - x_0)^p + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$  avec  $a_p \neq 0$ , alors en particulier  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_p (x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$  ou encore  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p$ . Ainsi, le premier terme non nul d'un développement limité en  $x_0$  fournit un équivalent simple de  $f(x)$  en  $x_0$ .

**Exemples.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = (x - 1)^3$ .

$$f(x) = -1 + 3x - 3x^2 + x^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + 3x + o(x).$$

Ainsi,  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = x^3$ . En posant  $x = 1 + h$  ou encore  $h = x - 1$  de sorte que  $x$  tend vers 1 si et seulement si  $h$  tend vers 0,

$$f(x) = f(1 + h) = (1 + h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + 3h + o(h).$$

Ceci s'écrit encore

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} 1 + 3(x - 1) + o(x - 1).$$

Ainsi,  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en 1.

### 3.2 Unicité d'un développement limité

**Théorème 20.** Si  $f$  admet en  $x_0 \in \mathbb{R}$  un développement limité d'ordre  $n \in \mathbb{N}$ , ce développement est unique (c'est-à-dire les coefficients  $a_0, \dots, a_n$ , de ce développement sont uniquement définis).

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de démontrer le résultat quand  $x_0 = 0$ .

Supposons qu'il existe  $(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n+2}$  tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n).$$

On en déduit que  $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $a_k - b_k \neq 0$ . Soit alors  $p = \text{Min}\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / a_k - b_k \neq 0\}$ . Par définition de  $p$ ,  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  puis

$$(a_p - b_p)x^p + \dots + (a_n - b_n)x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$$

puis, après division des deux membres par  $x^p$ ,

$$(a_p - b_p) + \dots + (a_n - b_n)x^{n-p} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n-p}).$$

Mais alors, quand  $x$  tend vers 0, on obtient  $a_p - b_p = 0$  ce qui contredit la définition de  $p$ . Ceci montre l'unicité de  $(a_0, \dots, a_n)$ . □

L'unicité d'un développement limité justifie la définition suivante :

**DÉFINITION 5.** Soit  $f$  une fonction admettant un développement limité d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  en  $x_0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le polynôme  $x \mapsto a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n$  s'appelle la **partie régulière** du développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$ .

Un corollaire à l'unicité d'un développement limité est :

**Théorème 21.** On suppose que  $f$  admet en  $0$  un développement limité d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Si  $f$  est paire, alors pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq 2k + 1 \leq n$ ,  $a_{2k+1} = 0$ .

Si  $f$  est impaire, alors pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq 2k \leq n$ ,  $a_{2k} = 0$ .

**DÉMONSTRATION.** Supposons  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ .

Supposons de plus  $f$  paire. Puisque  $o((-x)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o((-1)^n x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ , on a aussi

$$f(x) = f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 - a_1x + \dots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n).$$

Par unicité d'un développement limité, on en déduit que pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_p = (-1)^p a_p$ . En particulier, pour  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq 2k + 1 \leq n$ , on a  $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} a_{2k+1} = -a_{2k+1}$  et donc  $a_{2k+1} = 0$ .

De même, si  $f$  est impaire,

$$f(x) = -f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -a_0 + a_1x + \dots + (-1)^{n+1} a_nx^n + o(x^n).$$

Par unicité d'un développement limité, on en déduit que pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_p = (-1)^{p+1} a_p$ . En particulier, pour  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq 2k \leq n$ , on a  $a_{2k} = (-1)^{2k+1} a_{2k} = -a_{2k}$  et donc  $a_{2k} = 0$ . □

Par exemple, on démontrera plus loin que  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$  et  $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ .

### 3.3 Formule de TAYLOR-YOUNG

**Théorème 22 (formule de TAYLOR-YOUNG).**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x_0 \in I$ .

Si  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ , alors  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre  $n$ , son développement de TAYLOR-YOUNG :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

**DÉMONSTRATION.** Si  $n = 0$ ,  $f$  est continue sur  $I$  et en particulier en  $x_0$ . Mais alors,  $f$  admet un développement limité d'ordre  $0$  en  $x_0$  à savoir  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + o(1)$ . La formule est donc vraie quand  $n = 0$ .

Si  $n = 1$ ,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et est en particulier dérivable en  $x_0$ . Mais alors,  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre  $1$  à savoir

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

La formule est également vraie quand  $n = 1$ .

Montrons par récurrence que pour tout  $n \geq 0$ , si  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ , alors  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre  $n$  à savoir  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ .

- L'affirmation est vraie quand  $n = 0$ .

- Soit  $n \geq 0$ . Supposons le résultat pour  $n$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ . Alors,  $f'$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ .

Par hypothèse de récurrence,  $f'$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$ , son développement de TAYLOR-Young. Donc, il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $V \subset I$  de  $x_0$ , de limite nulle en  $x_0$ , telle que pour tout réel  $t$  de  $V$ ,

$$f'(t) = f'(x_0) + f''(x_0)(t - x_0) + \dots + f^{(n+1)}(x_0) \frac{(t - x_0)^n}{n!} + (t - x_0)^n \varepsilon(t).$$

Soit  $x \in V \subset I$ . La fonction  $f'$  est de classe  $C^n$  sur  $I$  avec  $n \geq 0$ . En particulier, la fonction  $f'$  est continue sur  $I$ . D'autre

part, pour tout  $t \in V \setminus \{x_0\}$ ,  $\varepsilon(t) = \frac{1}{(t - x_0)^n} \left( f(t) - f'(x_0) - f''(x_0)(t - x_0) - \dots - f^{(n+1)}(x_0) \frac{(t - x_0)^n}{n!} \right)$  et donc la fonction  $\varepsilon$  est continue sur  $V \setminus \{x_0\}$  et se prolonge en une fonction continue sur  $V$  en posant de plus  $\varepsilon(x_0) = 0$ . En intégrant de  $x_0$  à  $x$ , on obtient

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(x_0) \int_{x_0}^x \frac{(t-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} dt + \int_{x_0}^x (t-x_0)^n \varepsilon(t) dt,$$

et donc

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + \int_{x_0}^x (t-x_0)^n \varepsilon(t) dt.$$

Il reste à vérifier que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^x (t-x_0)^n \varepsilon(t) dt = 0$ . Pour  $x \in V \setminus \{x_0\}$ , on pose  $g(x) = \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^x (t-x_0)^n \varepsilon(t) dt$  et d'autre part, on pose  $g(x_0) = 0$ .

Soit  $\beta > 0$ . Il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$ ,  $|\varepsilon(t)| \leq \beta$ . Soit  $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$ .  
Si  $x > x_0$ ,

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \left| \int_{x_0}^x (t-x_0)^n \varepsilon(t) dt \right| \leq \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^x (t-x_0)^n |\varepsilon(t)| dt \\ &\leq \frac{\beta}{(x-x_0)^{n+1}} \int_{x_0}^x (t-x_0)^n dt = \frac{\beta}{(x-x_0)^{n+1}} \times \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} = \frac{\beta}{n+1} \leq \beta. \end{aligned}$$

Si  $x < x_0$ ,

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{1}{(x_0-x)^{n+1}} \left| (-1)^{n+1} \int_x^{x_0} (x_0-t)^n \varepsilon(t) dt \right| = \frac{1}{(x_0-x)^{n+1}} \left| \int_x^{x_0} (x_0-t)^n \varepsilon(t) dt \right| \leq \frac{1}{(x_0-x)^{n+1}} \int_x^{x_0} (x_0-t)^n |\varepsilon(t)| dt \\ &\leq \frac{\beta}{(x_0-x)^{n+1}} \int_x^{x_0} (x_0-t)^n dt = \frac{\beta}{(x_0-x)^{n+1}} \times \frac{(x_0-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{\beta}{n+1} \leq \beta. \end{aligned}$$

Enfin,  $|g(x_0)| = 0 \leq \beta$ . On a montré que :  $\forall \beta > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, |g(x)| \leq \beta$ . Donc,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  puis

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \underset{x \rightarrow x_0}{=} o\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Le résultat est démontré par récurrence. □

**Exemple.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = \sin(x)$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \cos(x)$ ,  $f''(x) = -\sin(x)$  et  $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$  puis  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$  et  $f^{(3)}(0) = -1$ . D'après la formule de TAYLOR-YOUNG,

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

⇒ **Commentaire.**

◇ On peut montrer que la formule de TAYLOR-YOUNG reste valable sous une hypothèse plus générale que d'être de classe  $C^n$  sur  $I$  à savoir sous l'hypothèse «  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $x_0$  » ou encore, plus explicitement, «  $f$  est  $n-1$  fois dérivable sur un voisinage de  $x_0$  et  $f^{(n-1)}$  est dérivable en  $x_0$  » (avec  $n \geq 1$ ).

◇ Donc, pour tout  $n \geq 1$ , si  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ , son développement de TAYLOR-YOUNG. On sait que pour  $n = 1$ , cette implication est en fait une équivalence. On va voir que la réciproque de ce théorème est fautive pour  $n \geq 2$ . C'est ce qu'analyse l'exercice suivant où on fournit une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et admettant en 0 un développement limité d'ordre 2 mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0.

$$\text{Exercice 1. Pour } x \in \mathbb{R}, \text{ on pose } f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- 1) Montrer que  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
- 2) Montrer que  $f$  est continue et dérivable en 0.
- 3) Montrer que  $f$  n'est pas deux fois dérivable en 0.

### Solution 1.

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $|f(x)| = \begin{cases} |x|^3 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \leq \begin{cases} |x|^3 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} = |x|^3 = x^2|x|$ . Puisque  $|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on en déduit en particulier que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ .

Ainsi,  $f$  admet en  $0$  un développement limité d'ordre  $2$  :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$ .

2) Pour tout réel  $x$ ,  $|f(x)| \leq |x|^3$ . On en déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 = f(0)$ .  $f$  est donc continue en  $0$ .

Pour  $x \neq 0$ ,  $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq x^2$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  puis que  $f$  est dérivable en  $0$  avec  $f'(0) = 0$ .

3) D'autre part,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout réel  $x$  non nul,

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour  $x \neq 0$ , on a alors  $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . Pour tout  $x \neq 0$ ,  $\left| 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 3|x|$  et donc  $3x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  tend vers  $0$  quand  $x$  tend vers  $0$ . D'autre part, la fonction  $x \mapsto -\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers  $0$  (par

exemple en considérant les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

Donc, le taux  $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers  $0$  ou encore  $f$  n'est pas deux fois dérivable en  $0$ .

### 3.4 Formulaire de développements limités en $0$

On donne maintenant un formulaire de développements limités usuels en  $0$  ( $n$  est un entier naturel donné) :

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \\ \text{ch}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \\ \text{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}). \\ \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \\ \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}). \\ \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n). \\ \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n). \\ \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \\ \ln(1-x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n). \\ \text{Arctan}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$



Pour  $\alpha$  réel donné,  $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$ .

Pour  $\alpha$  réel, on pose  $\binom{\alpha}{0} = 1$  puis pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$ . Avec cette généralisation des coefficients binomiaux, on peut écrire de manière plus condensée

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n).$$

On va maintenant démontrer chacune de ces formules. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

• Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = e^x$ .  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$ .  $f$  admet donc un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$ , son développement de TAYLOR-YOUNG. De plus, pour tout réel  $x$  et tout entier  $k$ ,  $f^{(k)}(x) = e^x$ . En particulier, pour tout entier naturel  $k$ ,  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$ . La formule de TAYLOR-YOUNG fournit alors

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

• Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = e^{-x}$ . Pour tout entier naturel  $k$ ,  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!}$ . La formule de TAYLOR-YOUNG fournit alors

$$e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

(On peut aussi considérer ce développement comme immédiat à partir du développement de  $e^x$  puisque  $o((-x)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o((-1)^n x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ ). Mais alors

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}) + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1 + (-1)^k}{2} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

(On peut aussi appliquer directement la formule de TAYLOR-YOUNG à la fonction  $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$  en constatant que pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(\operatorname{ch})^{(2k)}(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$  et  $(\operatorname{ch})^{(2k+1)}(0) = \operatorname{sh}(0) = 0$ ). De même,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1 - (-1)^k}{2} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

• Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = e^{ix}$ .  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$  et admet donc un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$ , son développement de TAYLOR-YOUNG. De plus, pour tout réel  $x$  et tout entier  $k$ ,  $f^{(k)}(x) = i^k e^{ix}$ . En particulier, pour tout entier naturel  $k$ ,  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{i^k}{k!}$ . La formule de TAYLOR-YOUNG fournit alors

$$e^{ix} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n i^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{2n} \frac{i^k x^k}{k!} + o(x^{2n}) + \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-i)^k x^k}{k!} + o(x^{2n}) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{i^k + (-i)^k}{2} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).
\end{aligned}$$

(On peut aussi appliquer directement la formule de TAYLOR-YOUNG à la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  en constatant que pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(\cos)^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$  et  $(\cos)^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k+1} \sin(0) = 0$ ). De même,

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{i^k x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-i)^k x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{i^k - (-i)^k}{2i} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).
\end{aligned}$$

• Pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , posons  $f(x) = \tan(x)$ .  $f$  est de classe  $C^3$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et donc  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 3.  $f(0) = 0$  puis pour tout réel  $x$  de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$  et donc  $f'(0) = 1$ .

Pour tout réel  $x$  de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f''(x) = 2 \tan(x) (1 + \tan^2(x)) = 2 (\tan(x) + \tan^3(x))$  et donc  $f''(0) = 0$ . Enfin, pour tout réel  $x$  de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f^{(3)}(0) = 2 (1 + \tan^2(x)) + 6 (1 + \tan^2(x)) \tan^2(x)$  et donc  $f^{(3)}(0) = 2$ . Par suite,

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

(Le développement de  $x \mapsto \tan(x)$  à l'ordre  $2n+1$  est nettement plus compliqué à obtenir que les autres développements limités du formulaire et peut faire l'objet de tout un problème de concours de deuxième année. Nous verrons plus loin des méthodes plus efficaces que celle mise en œuvre ici pour obtenir des développements d'ordre 5 ou 7 ...)

• Pour  $x \neq 1$ ,  $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k$  et donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \frac{x}{1-x}.$$

Quand  $x$  tend vers 0, on obtient

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + x^n o(1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

En remplaçant  $x$  par  $-x$ , on obtient

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

• Pour  $x \in ]-1, +\infty[$ , posons  $F(x) = \ln(1+x)$ . Posons encore  $F' = f$  ou encore, pour  $x > -1$ , posons  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . D'après le développement précédent,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ . Puisque  $f$  est  $k$  fois dérivable en 0 pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on peut

identifier les coefficients de ce développement au développement de TAYLOR-YOUNG et on obtient  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k$  ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = (-1)^k k!.$$

Soit alors  $n \geq 1$ .  $F$  est  $n$  fois dérivable en  $0$  et admet donc un développement limité d'ordre  $n$  en  $0$ , son développement de TAYLOR-YOUNG. On obtient

$$\begin{aligned} \ln(1+x) = F(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k-1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

(Nous réobtiendrons plus rapidement ce développement plus loin après avoir appris à intégrer les développements limités). En remplaçant  $x$  par  $-x$ , on obtient

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-x)^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

• Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $F(x) = \text{Arctan}(x)$ . Posons encore  $F' = f$  ou encore, pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$  ce qui fournit :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(2k+1)}(0) = 0$ .

Soit alors  $n \in \mathbb{N}$ .  $F$  est  $2n+1$  fois dérivable en  $0$  et admet donc un développement limité d'ordre  $2n+1$  en  $0$ , son développement de TAYLOR-YOUNG. On obtient

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(x) = F(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

• Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour  $x > -1$ , posons  $f(x) = (1+x)^\alpha$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $0$  et donc  $f$  admet en  $0$  un développement d'ordre  $n$ .

Pour tout  $x > -1$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$  et en particulier  $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))$ . On obtient

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Le formulaire est maintenant établi.

### 3.5 Opérations sur les développements limités

A partir de maintenant, on apprend à calculer avec les développements limités. On a vu que pour effectuer un développement limité en  $x_0$  une technique consiste à poser  $x = x_0 + h$  ou encore  $h = x - x_0$  de sorte que  $x$  tend vers  $x_0$  si et seulement si  $h$  tend vers  $0$ . Développer à l'ordre  $n$  une fonction  $f$  en  $x_0$ , c'est encore développer à l'ordre  $n$  la fonction  $g : h \mapsto f(x_0 + h)$  en  $0$ .

Dans ce qui suit, on peut donc, si cela simplifie vraiment, n'énoncer que des résultats en  $0$ .

### 3.5.1 Troncature

**Théorème 23.** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $p < n$ . Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$ , alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $p$  en  $x_0$  dont la partie régulière est obtenue **en tronquant à l'ordre  $p$**  la partie régulière du développement à l'ordre  $n$ ,

c'est-à-dire, si

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + \dots + a_p (x - x_0)^p + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + \dots + a_p (x - x_0)^p + o((x - x_0)^p).$$

**DÉMONSTRATION.** Il s'agit de vérifier que  $\sum_{k=p+1}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^p)$  ce qui est immédiat car

$$\frac{1}{(x - x_0)^p} \left( \sum_{k=p+1}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \right) = \sum_{k=p+1}^n a_k (x - x_0)^{k-p} + o((x - x_0)^{n-p}) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

□

Par exemple, le développement à l'ordre 4,

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

fournit le développement à l'ordre 3

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

et ce dernier développement fournit le développement à l'ordre 2

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

### 3.5.2 Combinaisons linéaires de développements limités

**Théorème 24.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f$  et  $g$  admettent un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$ , alors, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $\lambda f + \mu g$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  dont la partie régulière est la combinaison linéaire des parties régulières des développements à l'ordre  $n$  de  $f$  et  $g$ .

Ainsi, si

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} b_0 + \dots + b_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

alors

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} (\lambda a_0 + \mu b_0) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

**DÉMONSTRATION.** Il s'agit de vérifier que  $\lambda(o((x - x_0)^n)) + \mu(o((x - x_0)^n)) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^n)$  ce qui est connu.

□

On doit retenir que **si on veut  $\lambda f + \mu g$  à l'ordre  $n$ , on doit développer chacune des deux fonctions à l'ordre  $n$ .**

Par exemple, à l'ordre 4,

$$2 \cos(x) + 3 \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + 3 \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + 3x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

On a bien écrit  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$  et pas  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , ce qui ne nous aurait pas permis d'avoir un développement à l'ordre 4.

### 3.5.3 Produits de développements limités

**Théorème 25.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f$  et  $g$  admettent un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$ , alors  $f \times g$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$ . Si  $x \mapsto P(x - x_0)$  et  $x \mapsto Q(x - x_0)$  sont les parties régulières du développement de  $f$  et  $g$  à l'ordre  $n$ , alors la partie régulière du développement à l'ordre  $n$  de  $f \times g$  est le polynôme  $x \mapsto P(x - x_0) \times Q(x - x_0)$  tronqué à l'ordre  $n$ .

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de démontrer le résultat quand  $x_0 = 0$ .

Posons  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$ . Alors,

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n).$$

$P(x)$  et  $Q(x)$  et  $o(x^n)$  ont une limite réelle en 0. En particulier,  $P(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$ ,  $Q(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$  et  $o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$ . On en déduit que

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + O(1)o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n).$$

D'autre part, en développant le produit  $P(x)Q(x)$ , on obtient des termes de degré inférieur ou égal à  $n$  et des termes de degré strictement supérieur à  $n$ . Tout terme de degré strictement supérieur à  $n$  est négligeable devant  $x^n$  en 0 et il reste que

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \dots + a_0b_n)x^n + o(x^n),$$

ce qui démontre le résultat. □

On doit retenir que **si on veut développer un produit  $f \times g$  à l'ordre  $n$ , on doit développer chacune des deux fonctions à l'ordre  $n$** . Mais ce n'est pas aussi simple comme on va le voir.

**Exemple 1.** Pour  $x < 1$ , posons  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  et  $g(x) = e^x$ . On veut un développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f \times g$  :  $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$ . La première erreur à éviter est par exemple d'écrire  $e^x$  à l'ordre 1 et  $\frac{1}{1-x}$  à l'ordre 2 (dans le développement de  $(1+x+o(x))(1+x+x^2+o(x^2))$  des termes en  $x^2$  et  $x^3$  sont contenus dans le  $o(x)$  de la première parenthèse et donc des termes du type  $x^2 \times 1$  ou  $x^3 \times 1$  par exemple, manqueront à l'appel). Encore une fois, pour obtenir  $f \times g$  à l'ordre 3, on écrit  $f$  et  $g$  à l'ordre 3 :

$$\frac{e^x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)).$$

On obtiendra ainsi un développement limité de  $\frac{e^x}{1-x}$  en 0 à l'ordre 3 sans oublier un seul terme. Plus précisément, une application méticuleuse du théorème doit même nous faire écrire directement

$$\frac{e^x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) (1 + x + x^2 + x^3) + o(x^3),$$

où on a écrit d'une part le produit des parties régulières et d'autre part  $o(x^3)$  **une seule fois, à la fin**. Il ne reste plus qu'à développer le produit des parties régulières. On commence par le coefficient constant puis le coefficient de  $x$  puis le coefficient de  $x^2$  puis celui de  $x^3$  et les termes de degré 4, 5, ..., sont tous regroupés dans l'expression  $o(x^3)$ . Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) (1 + x + x^2 + x^3) + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + (1+1)x + \left(1+1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

**Exemple 2.** Posons maintenant pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^x - 1$  et  $g(x) = \ln(1+x) - x$ . On veut un développement limité à l'ordre 5 du produit  $f \times g$  en 0. Normalement, on doit écrire

$$(e^x - 1)(\ln(1+x) - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right).$$

Nous avons écrit tous les termes de chaque parenthèse jusqu'à l'ordre 5. Maintenant, on va voir que le calcul ci-dessus est maladroit car nous avons écrit des termes inutiles. Prenons le premier des termes écrit en rouge  $\frac{x^4}{24}$ . Il se distribue sur

$-\frac{x^2}{2}$  qui est le premier terme de la deuxième parenthèse pour donner un terme en  $x^6$  qui est négligeable devant  $x^5$ . Et c'est encore pire avec les produits  $\frac{x^4}{24} \times \frac{x^3}{3}$ ,  $\frac{x^4}{24} \times -\frac{x^4}{24}$  ... qui sont négligeables devant  $\frac{x^4}{24} \times -\frac{x^2}{2}$  et donc négligeables devant  $x^5$ . Il suffit en fait de savoir que les termes  $\frac{x^4}{24}$ ,  $\frac{x^5}{120}$  et  $o(x^5)$  sont négligeables devant  $x^3$  et donc d'écrire

$$(e^x - 1)(\ln(1+x) - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \right).$$

Pour obtenir tous les termes de degré inférieur ou égal à 5, on a écrit la première parenthèse à l'ordre 3 car le terme de plus bas degré de la deuxième parenthèse est de degré 2. De même, puisque le terme de plus bas degré de la première parenthèse est de degré 1, il suffit de savoir que les termes écrits en bleu sont négligeables devant  $x^4$  ou encore il suffit d'écrire la deuxième parenthèse à l'ordre 4 :

$$(e^x - 1)(\ln(1+x) - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right).$$

On peut terminer le développement

$$\begin{aligned} (e^x - 1)(\ln(1+x) - x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{2} + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) x^4 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{6} + o(x^5). \end{aligned}$$

**Exemple 3.** On veut développer  $\sin^2 x$  à l'ordre 5 en 0. On doit normalement écrire

$$\sin^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right).$$

Mais puisque le terme de plus bas degré de la deuxième parenthèse est de degré 1, il est inutile d'écrire explicitement les termes de degré supérieur ou égal à 5. Il y a simplement besoin de savoir que ces termes sont négligeables devant  $x^4$  ou encore on écrit la première parenthèse à l'ordre 4 (et bien sûr la deuxième aussi) :

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5). \end{aligned}$$

Cela dit, ce qui précède est en fait maladroit. Une bien meilleure solution est

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^5) \right) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5).$$

Les calculs de développements limités obéissent aux mêmes techniques que les calculs de dérivées ou de primitives : moins il y a de produits, mieux c'est. Donc, linéarisons ...

**Exemple 4.** Nous donnons maintenant un exemple caricatural qui, nous l'espérons, fera définitivement comprendre la détermination de l'ordre auquel on effectue chaque facteur. On veut développer  $\sin^4 x \ln^3(1+x)$  à l'ordre 8 en 0. Normalement, on doit écrire

$$\sin^4 x \ln^3(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8) \right)^4 \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + o(x^8) \right)^3.$$

Mais il est clair que beaucoup de termes sont superflus, sans que l'on sache vraiment lesquels. Déterminons l'ordre auquel on développe  $\sin(x)$ . On doit penser l'expression sous la forme

$$\sin x \times \left( \sin^3 x \ln^3(1+x) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + \dots + o(x^?)) (x^? + \dots).$$

L'idée est simple. Le terme de plus bas degré de la deuxième parenthèse est fourni par un équivalent simple de cette deuxième parenthèse :  $\sin^3 x \ln^3(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3 \times x^3 = x^6$  ou encore  $\sin^3 x \ln^3(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^6 + o(x^6)$ . Pour obtenir un développement à l'ordre 8, il suffit d'écrire  $\sin x$  à l'ordre 2.

De même,  $\sin^4 x \ln^3(1+x) = \ln(1+x) \times \left( \sin^4 x \ln^2(1+x) \right)$  avec  $\sin^4 x \ln^2(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^6$ . On développe donc  $\ln(1+x)$  à l'ordre 2. Finalement, les ordres étant maintenant correctement déterminés, on peut écrire

$$\sin^4 x \ln^3(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (x + o(x^2))^4 \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} (x)^4 \left( x - \frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^8).$$

On peut maintenant achever le développement :

$$\begin{aligned} \sin^4 x \ln^3(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 \left( x - \frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^8) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 \left( x^3 + 3x^2 \left( -\frac{x^2}{2} \right) + \dots \right) + o(x^8) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^7 - \frac{3x^8}{2} + o(x^8). \end{aligned}$$

### 3.5.4 Composition de développements limités

**Théorème 26.** On suppose que  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre  $n$  et que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n).$$

On suppose ensuite que  $g$  admet en  $f(0) = 0$  un développement limité d'ordre  $n$  :

$$g(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n + o(y^n) \underset{y \rightarrow 0}{=} Q(y) + o(y^n).$$

Alors,  $g \circ f$  admet en 0 un développement limité d'ordre  $n$  dont la partie régulière est le polynôme  $Q \circ P$  tronqué à l'ordre  $n$ .

**DÉMONSTRATION.** Puisque  $y = f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0, on a déjà

$$g(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 f(x) + \dots + b_n f(x)^n + o(f(x)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(f(x)) + o(f(x)^n).$$

Ensuite,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$  puis  $f(x)^n \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^n)$  puis  $o(f(x)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(O(x^n)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$  et donc

$$g(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 (P(x) + o(x^n)) + \dots + b_n (P(x) + o(x^n))^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(P(x) + o(x^n)) + o(x^n).$$

Ensuite, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(P(x) + o(x^n))^k \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)^k + o(x^n)$  et finalement,

$$g(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 P(x) + \dots + b_n P(x)^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(P(x)) + o(x^n). \quad \square$$

**Exemple1.** On veut faire un développement limité de la fonction  $x \mapsto e^{\sin x}$  en 0 à l'ordre 3. On commence par développer  $\sin x$  à l'ordre 3 en 0 :

$$e^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^3).$$

La deuxième égalité n'est autre que l'application méticuleuse du théorème 26. Ensuite, en tenant compte de  $x - \frac{x^3}{6} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ , on développe l'exponentielle à l'ordre 3 :

$$e^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left( x - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3).$$

De nouveau, le théorème 26 nous a permis d'écrire  $o(x^3)$  une seule fois à la fin. Ce faisant, nous avons été maladroit car un certain nombre de terme explicitement écrit ne servent à rien. Considérons l'expression  $\left( x - \frac{x^3}{6} \right)^2 = \left( x - \frac{x^3}{6} \right) \left( x - \frac{x^3}{6} \right)$ .

Le terme  $-\frac{x^3}{6}$  va se distribuer sur  $x$  et sur  $-\frac{x^3}{6}$  pour fournir deux termes de degré au moins 4 et donc deux termes négligeables devant  $x^3$ . Il était donc inutile d'écrire explicitement le terme  $-\frac{x^3}{6}$  dans  $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2$ .

De manière générale, on écrit explicitement un terme s'il fournit au moins un terme de degré inférieur ou égal à 3 et on n'écrit pas explicitement un terme s'il ne fournit que des termes de degré supérieur ou égal à 4. La version définitive du développement est

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

On note que l'on a développé dans l'ordre des opérations effectuées :  $\sin x$  d'abord puis l'exponentielle ensuite. Cette manière de faire évite des erreurs de raisonnement. On aurait pu aussi commencer en sens inverse : puisque  $\sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et

que  $e^u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ , on a

$$e^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(\sin^3 x).$$

Ce qui vient d'être écrit est exact mais est souvent mal compris, en particulier le terme  $o(\sin^3 x)$ . Nous ne pratiquerons jamais ainsi.

**Exemple 2.** Développons  $\ln(\cos x)$  à l'ordre 6 en 0.

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) + o(x^6) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} - \frac{1}{2} \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{24} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6). \end{aligned}$$

**Exemple 3.** Développons  $(1+x)^x$  à l'ordre 4 en 0.

$$\begin{aligned} (1+x)^x &= e^{x \ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}(x^2)^2 + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

**Exemple 4.** Développons  $e^{\cos x}$  à l'ordre 4 en 0.

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right) + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$



Dans ce dernier exemple, il fallait prendre garde au fait que l'exposant  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$  ne tend pas vers 0 quand  $x$  tend vers 0 mais tend vers 1 quand  $x$  tend vers 0. Une grosse erreur aurait été  $e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \dots$ , ceci est complètement faux. Par contre l'exposant  $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 et on peut donc enchaîner avec un développement limité de l'exponentielle en 0.

### 3.5.5 Quotients de développements limités

**Théorème 27.** Si  $f$  et  $g$  admettent un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  et si  $g(x_0) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre  $n$ .

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de démontrer le résultat quand  $x_0 = 0$ . Pour  $x$  au voisinage de  $x_0$ ,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)/g(0)}{g(x)/g(0)} = \frac{f(x)/g(0)}{1 - \left(1 - \frac{g(x)}{g(0)}\right)} = \frac{v(x)}{1 - u(x)}$$

en posant  $v(x) = \frac{f(x)}{g(0)}$  et  $u(x) = 1 - \frac{g(x)}{g(0)}$ . Maintenant, la fonction  $x \mapsto u(x)$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0 et tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 et la fonction  $u \mapsto \frac{1}{1-u}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0. D'après le théorème 26, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0. Enfin, d'après le théorème 25, la fonction  $\frac{f}{g} = v \times \frac{1}{1-u}$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0. □

Ainsi, pour faire un développement limité de quotient, on écrit le dénominateur sous la forme  $1 - u(x)$  où  $u(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $x_0$ . Ce sera la seule technique à disposition pendant les deux années de classes préparatoires (à part l'utilisation directe de la formule de TAYLOR-YOUNG).

**Exemple 1.** On veut un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction  $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ . On note que le dénominateur  $x-2$  tend vers  $-2$  quand  $x$  tend vers 0 et que l'on a donc aucune chance en l'état de pouvoir l'écrire sous la forme  $1 - u(x)$  avec  $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Par contre, en mettant le **prépondérant  $-2$  en facteur**, le nouveau dénominateur tend vers 1 :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} &= -\frac{1}{2} \times \frac{x+1}{1-\frac{x}{2}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}(1+x) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}(1+x) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8}\right) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^3}{8}\right) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{3x^2}{8} - \frac{3x^3}{16} + o(x^3). \end{aligned}$$

**Exemple 2.** On veut obtenir un développement limité à l'ordre 4 de  $\frac{1}{\cos(x)}$  en 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)} + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

**Exemple 3.** On sait déjà que  $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ . On veut poursuivre et obtenir un développement limité à l'ordre 3 de  $\tan(x)$  en 0.

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

Ce résultat faisait partie du formulaire de développements limités usuels :

$$\boxed{\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).}$$

Déterminons maintenant un développement limité de  $\tan(x)$  à l'ordre 5 en 0.

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).\end{aligned}$$

**Exercice 2.** Déterminer un développement limité de  $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$  à l'ordre 3 en 0.

**Solution 2.** Contrairement aux exemples qui ont précédé cet exercice, rien ne dit que la fonction proposée admette un développement limité à l'ordre 3 en 0 car les dénominateurs s'annulent en 0.

Découvrons l'ordre  $n$  auquel on va développer  $\sin x$  pour obtenir l'ordre 3 en fin de calcul. Le calcul aura l'allure suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x - \dots + o(x^n)} - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \dots + o(x^{n-1})} - 1\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} (1 + \dots + o(x^{n-1}) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \dots - 1}{x} + o(x^{n-2}).\end{aligned}$$

On veut  $n - 2 = 3$  et on développe donc  $\sin x$  à l'ordre 5.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} - 1\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)} - 1 + o(x^4)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(1 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 1 + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3).\end{aligned}$$

On a établi au passage le fait que la fonction de l'énoncé admet un développement limité d'ordre 3.

**Exercice 3.** Déterminer un développement limité de  $\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$  à l'ordre 3 en 0.

**Solution 3.** Comme dans l'exercice précédent, on ne sait pas à l'avance si la fonction proposée admet un développement limité d'ordre 3 car le dénominateur s'annule en 0.

$$\begin{aligned} \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} + o(x^5)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} + o(x^3)}{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 \frac{\frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2 \left( \frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} + o(x^3) \right) \left( 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2x}{3} + \frac{x^3}{90} + o(x^3). \end{aligned}$$

De nouveau, on a établi au passage le fait que la fonction proposée admet un développement limité d'ordre 3.

### 3.5.6 Intégration des développements limités

**Théorème 28.** On suppose que  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

On suppose de plus que  $f$  est continue sur un voisinage de  $x_0$  et admet donc une primitive  $F$  sur un voisinage de  $x_0$ . Alors,  $F$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre  $n + 1$  « obtenu par intégration » :

$$F(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} F(x_0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + o((x - x_0)^{n+1}).$$

**DÉMONSTRATION.** Pour  $x$  au voisinage de  $x_0$ , posons  $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$ .  $g$  est continue sur un voisinage  $I$  de  $x_0$  et

une primitive de  $g$  sur ce voisinage est la fonction  $G : x \mapsto \int_{x_0}^x g(t) dt = F(x) - F(x_0) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}$ . Il s'agit de prouver que

$G(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^{n+1})$  sous l'hypothèse  $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^n)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^n)$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in I$ , si  $|x - x_0| \leq \alpha$ , alors  $|g(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|^n$ . Pour

$x \in I$  tel que  $|x - x_0| \leq \alpha$ , on obtient par intégration :  $|G(x)| = \left| \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \leq |x - x_0| \times \varepsilon |x - x_0|^n = \varepsilon |x - x_0|^{n+1}$ .

On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |G(x)| \leq \varepsilon |x - x_0|^{n+1})$  et donc  $G(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^{n+1})$ . □

Revenons sur les développements de  $\ln(1 + x)$  et  $\operatorname{Arctan} x$  en 0.

• Pour  $x > -1$ , posons  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  puis  $F(x) = \ln(1 + x)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n - 1$  en 0 à savoir

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}).$$

D'après le théorème 28, la fonction  $F$  admet en 0 un développement limité d'ordre  $n$  obtenu par intégration :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

On retrouve ainsi le développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$  de  $\ln(1+x)$  établi plus tôt dans le chapitre de manière plus compliquée.

• Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  puis  $F(x) = \text{Arctan}(x)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $2n$  en  $0$  à savoir

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

D'après le théorème 28, la fonction  $F$  admet en  $0$  un développement limité d'ordre  $2n+1$  obtenu par intégration :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

On retrouve ainsi le développement limité à l'ordre  $2n+1$  en  $0$  de  $\text{Arctan}(x)$ .

• Déterminons maintenant un développement limité à tout ordre  $\text{Arcsin}(x)$  en  $0$ . Pour  $x \in ]-1, 1[$ , posons  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  puis  $F(x) = \text{Arcsin}(x)$ .  $F$  est la primitive de  $f$  sur  $] -1, 1[$  qui s'annule en  $0$ . On sait que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

De plus, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} &= (-1)^k \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}+1\right) \dots \left(\frac{1}{2}+(k-1)\right)}{k!} \\ &= \frac{(2k-1) \times (2k-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^k k!} = \frac{(2k-1) \times (2k-3) \times \dots \times 3 \times 1}{(2k) \times (2k-2) \times \dots \times 4 \times 2} \\ &= \frac{(2k) \times (2k-1) \times (2k-2) \times (2k-3) \times \dots \times 4 \times 3 \times 2}{((2k) \times (2k-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2} \\ &= \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Puisque la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  admet en  $0$  un développement limité d'ordre  $2n$ , la fonction  $F : x \mapsto \text{Arcsin}(x)$  admet en  $0$  un développement limité d'ordre  $2n+1$  obtenu par intégration :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

On a établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Ce développement n'a pas à être mémorisé mais on peut retenir en particulier que  $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ .

• On peut également revenir sur le développement limité de  $\tan(x)$  en 0 que l'on peut obtenir un peu plus rapidement. Pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , posons  $f(x) = \tan(x)$ .  $f$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + (f(x))^2$ .

On sait que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ . Donc,  $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x + o(x))^2 = 1 + x^2 + o(x^2)$ . Par intégration et en tenant compte de  $\tan(0) = 0$ , on obtient

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Mais alors  $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$  puis par intégration et en tenant compte de  $\tan(0) = 0$ ,

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Mais alors

$$\begin{aligned} f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{15}\right)x^6 + o(x^6) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \end{aligned}$$

puis par intégration et en tenant compte de  $\tan(0) = 0$ ,

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \dots$$

⇒ **Commentaire**. On a déjà dit que développement limité à un ordre quelconque de la fonction  $x \mapsto \tan(x)$  en 0 peut faire l'objet de tout un problème de concours. Les coefficients obéissent à une règle qui ne saute pas aux yeux. Il faut pour cela connaître les « polynômes de BERNOULLI ».

Revenons maintenant sur le théorème 28. Celui-ci dit que l'« on peut intégrer un développement limité ». Mais bizarrement, « on ne peut pas dériver un développement limité ». L'exercice 4 ci-dessous fournit un exemple de fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , qui admet un développement limité d'ordre 1 en 0 et telle que  $f'$  n'admet pas de développement limité d'ordre 0 en 0.

Comme d'habitude de tels exemples sont construits à partir de  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Par contre, si  $f$  est dérivable au voisinage de  $x_0$  et si  $f'$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre  $n$ , alors le développement limité de  $f'$  est obtenu par dérivation du développement limité de  $f$  à l'ordre  $n+1$  (puisque ce dernier est obtenu par intégration du développement à l'ordre  $n$  de  $f'$ ).

**Exercice 4.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

- 1) Montrer que  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1.
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Montrer que  $f'$  n'admet pas de développement limité d'ordre 0 en 0.

**Solution 4.**

1) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $\varepsilon(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = x\varepsilon(x)$ . De plus, pour tout réel  $x$ ,  $|\varepsilon(x)| \leq |x|$  (que  $x$  soit nul ou pas). On en déduit que  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  puis que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + 0x + o(x).$$

Ainsi,  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1.

2)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  en vertu de théorèmes généraux et pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . D'autre part,  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et donc  $f$  est dérivable en 0 et de plus  $f'(0) = 0$ .

Finalement,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

3)  $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 car pour tout réel non nul  $x$ ,  $\left|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 2|x|$ .

Vérifions que la fonction  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite en 0. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \frac{1}{2n\pi}$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ . Les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites tendant vers 0. Mais  $\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et  $\cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \neq 1$ . Donc, la fonction  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite en 0.

Supposons par l'absurde que  $f'$  ait une limite réelle en 0. Alors, la fonction  $x \mapsto f'(x) - 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  a une limite réelle en 0 ce qui est faux. Donc, la fonction  $f'$  n'a pas de limite réelle en 0 ou encore la fonction  $f'$  n'a pas de développement limité d'ordre 0 en 0 (bien que la fonction  $f$  admette un développement limité d'ordre 1 en 0).

On termine par trois exercices où on effectue des développements limités en un réel différent de 0.

**Exercice 5.** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{3}$  de  $\sin(x)$ .

**Solution 5.**

**1ère solution.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $x = \frac{\pi}{3} + h$  ou encore  $h = x - \frac{\pi}{3}$  de sorte que  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{3}$  si et seulement si  $h$  tend vers 0.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(h) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) + \frac{1}{2} \left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{3}h^2}{4} - \frac{h^3}{12} + o(h^3) \end{aligned}$$

et donc

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

**2ème solution.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = \sin(x)$ .  $f$  est de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc,  $f$  admet un 0 un développement limité d'ordre 3, son développement de TAYLOR-YOUNG. Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \cos(x)$ ,  $f''(x) = -\sin(x)$  et  $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$  puis  $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$ ,  $f''(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $f^{(3)}(0) = -\frac{1}{2}$ . La formule de TAYLOR-YOUNG fournit directement

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

**Exercice 6.** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de  $\ln(1+x)$ .

**Solution 6.**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $x = 1 + h$  ou encore  $h = x - 1$  de sorte que  $x$  tend vers 1 si et seulement si  $h$  tend vers 0.

$$\ln(1+x) = \ln(2+h) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3),$$

et donc

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

**Exercice 7.** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de  $\text{Arctan}(x)$ .

**Solution 7.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $f(x) = \text{Arctan}(x)$ .

**1ère solution.**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $x = 1 + h$  ou encore  $h = x - 1$  de sorte que  $x$  tend vers 1 si et seulement si  $h$  tend vers 0.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} \\ &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left( 1 - \left( h + \frac{h^2}{2} \right) + (h)^2 + o(h^2) \right) \stackrel{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2) \end{aligned}$$

et donc

$$f'(x) \stackrel{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

Par intégration et en tenant compte de  $f(1) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ , on obtient

$$\text{Arctan}(x) \stackrel{x \rightarrow 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

**2ème solution.**  $f$  est trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et en particulier trois fois dérivable en 0.

Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  puis  $f'(1) = \frac{1}{2}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$  puis  $\frac{f''(1)}{2} = \frac{1}{2} \times \left( -\frac{2}{4} \right) = -\frac{1}{4}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f^{(3)}(x) = -2 \left( \frac{1}{(1+x^2)^2} + x \times \frac{(-2)(2x)}{(1+x^2)^3} \right)$  puis  $\frac{f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{1}{6} \times (-2) \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{12}$ .

La formule de TAYLOR-YOUNG fournit directement

$$\text{Arctan}(x) \stackrel{x \rightarrow 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

## 3.6 Généralisations

### 3.6.1 Développements limités en $\pm\infty$

On dit que la fonction  $x \mapsto f(x)$  admet en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) un développement limité d'ordre  $n$  si et seulement si la fonction  $g : y \mapsto f\left(\frac{1}{y}\right)$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $0^+$  (resp. en  $0^-$ ).

Un développement limité en  $+\infty$  a l'allure générale suivante :

$$f(x) \stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

**Exemple.** Effectuons un développement limité à l'ordre 5 (on dit aussi : à la précision  $o\left(\frac{1}{x^5}\right)$ ) en  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto x \left( e^{\frac{1}{x^3}} - 1 \right)$ . Puisque  $\frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,

$$\begin{aligned} x \left( e^{\frac{1}{x^3}} - 1 \right) &\stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} x \left( 1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) - 1 \right) \\ &\stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right). \end{aligned}$$

### 3.6.2 Développements limités généralisés en un réel

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ . On dit que  $f$  admet en  $0$  un développement limité généralisé d'ordre  $n - p$  si et seulement si la fonction  $x \mapsto x^p f(x)$  admet en  $0$  un développement limité d'ordre  $n$ .

Un développement limité généralisé en  $0$  a l'allure suivante :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \dots + \frac{a_{p-1}}{x} + a_p + \dots + a_n x^{n-p} + o(x^{n-p}).$$

**Exemple.** Effectuons un développement limité généralisé de la fonction  $x \mapsto \cotan(x)$  à la précision  $o(x^3)$  en  $0$ .

$$\begin{aligned} \cotan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} \left( 1 - \left( \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} \right) + \left( \frac{x^2}{3} \right)^2 + o(x^4) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3). \end{aligned}$$

### 3.6.3 Développements limités généralisés en $\pm\infty$

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ . On dit que  $f$  admet en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) un développement limité généralisé d'ordre  $n - p$  si et seulement si la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{x^p}$  admet en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) un développement limité d'ordre  $n$ .

Un développement limité généralisé en  $+\infty$  a l'allure suivante :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_{p-1} x + a_p + \dots + \frac{a_n}{x^{n-p}} + o\left(\frac{1}{x^{n-p}}\right).$$

**Exemple.** Effectuons un développement limité généralisé de la fonction  $x \mapsto \frac{x^2}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$  à la précision  $o\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1 + e^{\frac{1}{x}}} &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \times \frac{1}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{12x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{12x^3} \right) + \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2x} \right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{2x} + \left( -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{48x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

### 3.6.4 Développements asymptotiques

Un développement asymptotique (ou plus simplement un développement) de  $f$  en  $a$  ( $a$  réel ou  $\pm\infty$ ) est un développement du type

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x) + o(f_p(x))$$

où de plus  $f_1(x) \gg_{x \rightarrow a} f_2(x) \gg_{x \rightarrow a} \dots \gg_{x \rightarrow a} f_p(x)$ . Un tel développement n'a d'intérêt que si les fonctions  $f_1, \dots, f_p$  sont beaucoup plus simples que la fonction  $f$ .

Un développement limité est un développement asymptotique d'un type particulier.

**Exemple 1.** Déterminons un développement asymptotique de  $\ln(\operatorname{ch} x - 1)$  en  $0$  à la précision  $x^2$ .

$$\begin{aligned} \ln(\operatorname{ch} x - 1) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln\left(\frac{x^2}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2 \ln(|x|) - \ln 2 + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \end{aligned}$$



On vient d'obtenir un développement asymptotique de la fonction  $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x - 1)$  à la précision  $x^2$  en 0 car

$$2 \ln(|x|) \underset{x \rightarrow 0}{\gg} -\ln 2 \underset{x \rightarrow 0}{\gg} \frac{x^2}{12}.$$

$2 \ln|x|$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers 0,  $-\ln 2$  est une constante non nulle puis  $\frac{x^2}{12}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. L'expression  $2 \ln|x|$  n'est équivalente à aucune fonction plus simple en 0.

**Exemple 2.** Déterminons un développement asymptotique de  $\ln(\operatorname{ch} x - 1)$  en  $+\infty$  à la précision  $e^{-x}$ .

$$\begin{aligned} \ln(\operatorname{ch} x - 1) &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right) = \ln(e^x - 2 + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x) + \ln(1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) - \ln 2 \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - \ln 2 - 2e^{-x} + o(e^{-x}) \end{aligned}$$

On vient d'obtenir un développement asymptotique de la fonction  $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x - 1)$  à la précision  $e^{-x}$  en  $+\infty$  car

$$x \underset{x \rightarrow +\infty}{\gg} -\ln 2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\gg} -2e^{-x}.$$

## 4 Quelques applications des relations de comparaison et des développements limités

### 4.1 Calculs de limites

On a le résultat suivant :

**Théorème 29.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions complexes ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ . On suppose que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

Si  $f$  converge en  $a$  vers un certain  $\ell \in \mathbb{C}$ , alors  $g$  converge en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$  (et réciproquement).

Supposons de plus que les fonctions  $f$  et  $g$  sont réelles.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ), alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

**DÉMONSTRATION .**

Supposons que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} \ell \in \mathbb{C}$  et que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ . Alors,

$$g(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 1 \times \ell = \ell.$$

Supposons que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} +\infty$  et que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ . Alors,

$$g(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} +\infty.$$

□

A titre d'exemple, déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \ln^2\left(\frac{x^2 + 3}{x^2}\right) \sqrt{3x + 1}}$ .

- $\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ .
- $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ .
- $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- $\ln^2\left(\frac{x^2 + 3}{x^2}\right) = \ln^2\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 = \frac{9}{x^4}$ .
- $\sqrt{3x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{3x}$ .

Donc,

$$\frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^3 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \ln^2\left(\frac{x^2 + 3}{x^2}\right) \sqrt{3x + 1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x^3} \times \frac{1}{2x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{9}{x^4} \times \sqrt{3x}} = \frac{1}{18\sqrt{3}}.$$

Donc,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^3 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \ln^2\left(\frac{x^2 + 3}{x^2}\right) \sqrt{3x + 1}} = \frac{1}{18\sqrt{3}}.$

## 4.2 Détermination d'équivalents

Déterminons un équivalent simple en 0 de  $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - \frac{\ln(1+x)}{x \cos x}$ . On va pour cela effectuer un développement de  $f$  en 0. On rencontre immédiatement un problème : à quelle précision ? On ne dispose malheureusement pas de méthode permettant de prévoir cette précision.

**Tentative à l'ordre 1.**

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} &= e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{x} \left( x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{x}{2} + o(x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x \cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x(1 + o(x))} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x)}{1 + o(x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x) \end{aligned}$$

et finalement,

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - \frac{\ln(1+x)}{x \cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x).$$

On a obtenu un développement limité d'ordre 1 en 0 de  $f$  (qui au passage admet donc un développement limité d'ordre 1) mais le développement obtenu est insuffisant pour obtenir un équivalent simple car aucun terme non nul n'est explicitement écrit.

**Tentative à l'ordre 2.**

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} &= e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{1}{x} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left( -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{x}{2} \right)^2 + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{x \cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{6} + o(x^2) \end{aligned}$$

et finalement,

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - \frac{\ln(1+x)}{x \cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left( \frac{11}{24} - \frac{5}{6} \right) x^2 + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{3x^2}{8} + o(x),$$

ou encore

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - \frac{\ln(1+x)}{x \cos x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3x^2}{8}.$$

### 4.3 Etudes de signes au voisinage de a

On a le résultat suivant :

**Théorème 30.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles ne s'annulant pas au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ .

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , alors pour  $x$  au voisinage de  $a$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  ont même signe au voisinage de  $a$ .

**DÉMONSTRATION.** Puisque  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , on a  $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 1$ . En particulier, au voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$ ,

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$  et donc  $f(x)$  et  $g(x)$  ont même signe. □

Par exemple,  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  et  $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ . Par suite,

$$\sin(x) - \text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On en déduit que  $\sin(x) - \text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6} > 0$  puis que pour  $x$  au voisinage de  $0$  sauf en  $0$ ,  $\sin(x) > \text{Arctan}(x)$ .

### 4.4 Etude locale d'un graphe

On suppose que  $f$  est définie sur un ensemble de la forme  $[x_0 - h, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + h]$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , et admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre 1 :  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ . Alors

- $f$  admet en particulier un développement limité d'ordre 0 en  $x_0$  :  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + o(1)$ .

$f$  est donc prolongeable par continuité en  $x_0$  en posant  $f(x_0) = a_0$  (on note encore  $f$  le prolongement).

- Le prolongement  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = a_1$ . Une équation de la tangente  $(T_{x_0})$  à la courbe représentative de  $f$  en  $x_0$  est donc

$$y = a_0 + a_1(x - x_0).$$

(Si  $f$  est définie sur  $[x_0 - h, x_0 + h]$ , on peut dire directement que  $f$  est continue puis dérivable en  $x_0$ ).

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $g(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ . Le graphe de la fonction  $g$  est la tangente  $(T_{x_0})$ . La position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la tangente  $(T_{x_0})$  est fournie par le signe de  $f(x) - g(x)$ , ce signe pouvant être étudié **globalement** (pour chaque  $x$ ).

Les développements limités peuvent nous aider à étudier cette position relative **localement** : on suppose de plus qu'il existe  $p > 1$  puis  $a_p \neq 0$  tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p).$$

Puisque  $a_p \neq 0$ , on en déduit

$$f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p.$$

On sait alors que le signe  $f(x) - g(x)$  est localement le signe de  $a_p(x - x_0)^p$ . Donc,

- Si  $a_p > 0$  et  $p$  est un entier pair, alors  $\mathcal{C}_f$  est localement au-dessus de  $(T_{x_0})$  et si  $a_p < 0$  et  $p$  est un entier pair, alors  $\mathcal{C}_f$  est localement au-dessous de  $(T_{x_0})$ .

- Si  $p$  est un entier impair,  $a_p(x - x_0)^p$  change de signe en  $x_0$ . La courbe traverse sa tangente  $(T_{x_0})$  en le point de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$ . On dit que le point de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  est un **point d'inflexion** de la courbe

représentative de  $f$ .

**Exemple.** Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , posons  $f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$ .

Dans l'exercice n° 3, page 27, on a vu que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2x}{3} + \frac{x^3}{90} + o(x^3)$ .

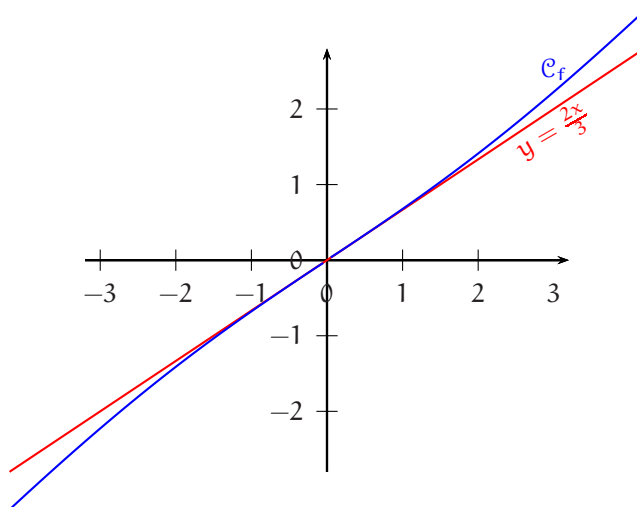
• En particulier,  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 0 :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$ .  $f$  est donc prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$  (on note encore  $f$  le prolongement obtenu).

•  $f$  admet en 0 un développement limité d'ordre 1 :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2x}{3} + o(x)$ .  $f$  est donc dérivable en 0 avec  $f'(0) = \frac{2}{3}$ . Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  en le point de coordonnées  $(0, 0)$  est

$$y = \frac{2x}{3}.$$

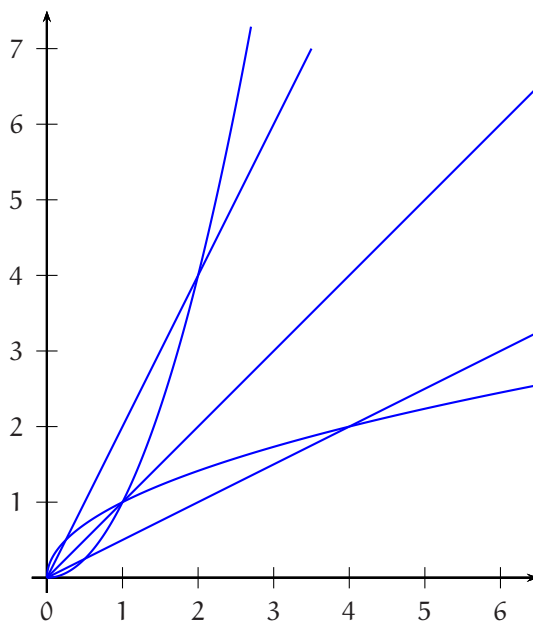
•  $f(x) - \frac{2x}{3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{90} + o(x^3)$  ou encore  $f(x) - \frac{2x}{3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{90}$ . Le signe de  $f(x) - \frac{2x}{3}$  est donc le signe de  $\frac{x^3}{90}$  **au voisinage de 0**. On en déduit que la courbe de  $f$  est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0 à droite et au-dessous de sa tangente au voisinage de 0 à gauche. Le point de coordonnées  $(0, 0)$  est un point d'inflexion de la courbe représentative de  $f$ .

Voici le graphe de  $f$  :



#### 4.5 Etude asymptotique d'un graphe

Voici les graphes des fonctions  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{2}$ ,  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto 2x$  et  $x \mapsto x^2$ .



Chacune de ces fonctions vérifie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Mais les graphes correspondants ne prennent pas la même « direction en  $+\infty$  ». Le graphe de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  prend la direction de l'axe  $(Ox)$  en  $+\infty$  et le graphe de la fonction  $x \mapsto x^2$  prend la direction de l'axe  $(Oy)$  en  $+\infty$ . Les graphes des fonctions  $x \mapsto \frac{x}{2}$ ,  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto 2x$  prennent quant à eux une direction oblique en  $+\infty$ . Dans tous les cas, on parle de **direction asymptotique**.

**DÉFINITION 6.** On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ ) et que  $\frac{f(x)}{x}$  tend vers  $a \in [-\infty, +\infty]$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

Si  $a \in ]-\infty, +\infty[ \setminus \{0\}$ , on dit que la courbe de  $f$  admet une **direction asymptotique** d'équation  $y = ax$ .

Si  $a = 0$ , on dit que la courbe de  $f$  admet une **direction asymptotique**  $(Ox)$  ou encore une **branche parabolique** de direction  $(Ox)$ .

Si  $a = \pm\infty$ , on dit que la courbe de  $f$  admet une **direction asymptotique**  $(Oy)$  ou encore une **branche parabolique** de direction  $(Oy)$ .

Ainsi, si  $f$  est la fonction  $x \mapsto x^2$ , sa courbe admet en  $\pm\infty$  une **branche parabolique** de direction  $(Oy)$ .

Si  $f$  est la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ , sa courbe admet en  $+\infty$  une **branche parabolique** de direction  $(Ox)$ .

Si  $f$  est l'une des trois fonctions  $x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto x + \sqrt{x}$  ou  $x \mapsto x + \sin x$ , sa courbe admet une **direction asymptotique** d'équation  $y = x$ .

Donc, sous l'hypothèse  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , en étudiant  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ , on obtient un renseignement sur la direction que prend le graphe de  $f$  en  $\pm\infty$ .

On en veut davantage :

**DÉFINITION 7.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  leurs courbes représentatives respectives dans le plan rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

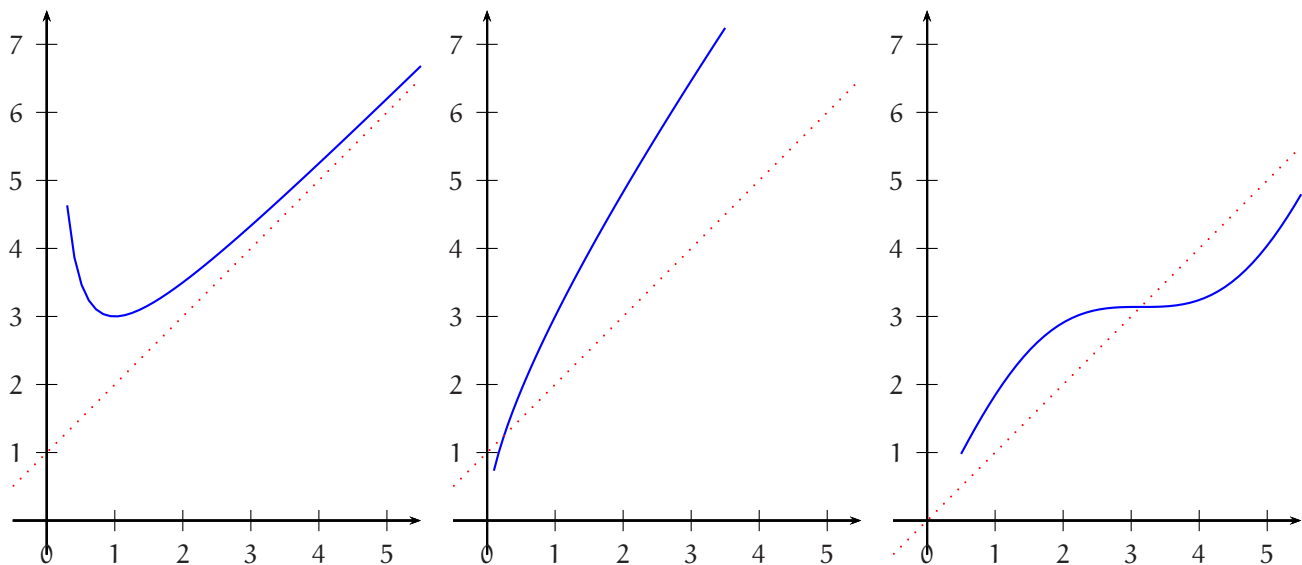
Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sont **asymptotes** en  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ ).

Par exemple, les graphes des fonctions  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$  sont asymptotes en  $+\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{ch } x - \text{sh } x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ .

Reprenons les trois fonctions  $f_1 : x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x}$ ,  $f_2 : x \mapsto x + 2\sqrt{x}$  et  $f_3 : x \mapsto x \sin x$ . Les trois graphes admettent en  $+\infty$  une **direction asymptotique** d'équation  $y = x$ . Mais le comportement en  $+\infty$  de ces trois fonctions n'est pas le même.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - x) = 1$  ou encore  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - (x + 1)) = 0$ . La droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_1$  en  $+\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ .  $\mathcal{C}_2$  admet en  $+\infty$  une **direction asymptotique** d'équation  $y = x$  mais  $\mathcal{C}_2$  n'admet pas de droite asymptote en  $+\infty$  (il n'existe pas de réel  $b$  tel que l'« écart (lu verticalement) entre la courbe et la droite d'équation  $y = x + b$  tend vers 0 »).
- $f_3(x) - x = \sin x$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .  $\mathcal{C}_3$  admet en  $+\infty$  une **direction asymptotique** d'équation  $y = x$  mais  $\mathcal{C}_3$  n'admet pas de droite asymptote en  $+\infty$ .

Voici les graphes de ces trois fonctions :



En résumé, si  $f$  est une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (ou plus généralement  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ). On étudie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  avec les résultats suivants :

- si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ,  $\mathcal{C}_f$  admet en  $+\infty$  une direction asymptotique ( $Oy$ ),
- si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  $\mathcal{C}_f$  admet en  $+\infty$  une direction asymptotique ( $Ox$ ),
- si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ , on étudie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$  avec les résultats suivants :
  - si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ , la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ ,
  - si  $f(x) - ax$  n'a pas de limite réelle en  $+\infty$ ,  $\mathcal{C}_f$  admet en  $+\infty$  une direction asymptotique d'équation  $y = ax$  mais n'admet pas de droite asymptote.

Dans la pratique, les choses se déroulent souvent différemment : on effectue un développement de  $f$  en  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ). Supposons que  $f$  admette un développement de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right),$$

où  $c \neq 0$  et  $p > 0$ . On en déduit que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ .

De plus,  $f(x) - (ax + b) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{x^p}$  et donc  $f(x) - (ax + b)$  est du signe de  $\frac{c}{x^p}$  au voisinage de  $+\infty$ , ce qui fournit localement la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de son asymptote.

**Exercice 8.** Etude en  $+\infty$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ .

**Solution 8.**

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{1 + \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{12x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{12x^3}\right) + \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Tout d'abord,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + o(1)$  et donc la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ . Ensuite,  $f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{24x^2}$  et donc  $f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) > 0$  pour  $x$  suffisamment grand.  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice 9.** Etude complète de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  .  

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

(On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .)

**Solution 9.**

**Domaine de définition.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $f(x)$  existe si et seulement  $x \neq 1$  et  $\frac{x^3}{x-1} \geq 0$  ce qui équivaut à  $x \in ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$  (car pour  $x \neq 1$ , le signe de  $\frac{x^3}{x-1}$  est le signe de  $x(x-1)$ ).

Le domaine de définition de  $f$  est  $D = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$ .

**Continuité.** La fonction  $g : x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$  est continue sur  $D$ , en tant que fraction rationnelle définie sur  $D$ , à valeurs dans  $[0, +\infty[$  et la fonction  $h : y \mapsto \sqrt{y}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Donc, la fonction  $f = h \circ g$  est continue sur  $D$ .

$f$  est continue sur  $D$ .

**Etude en 0 à gauche.**  $f(x) \underset{x \rightarrow 0, x < 0}{\sim} \sqrt{-x^3} = \sqrt{(-x)^2(-x)} = -x\sqrt{-x}$ . En particulier,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0, x < 0}{=} o(x)$ . Donc,  $f$  admet en 0 à gauche un développement limité d'ordre 1. On en déduit que  $f$  est dérivable en 0 à gauche et que  $f'_g(0) = 0$ . Une équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $(0, 0)$  est  $y = 0$ .

**Etude en 1 à droite.**  $f(x) \underset{x \rightarrow 1, x > 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ . En particulier,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ . La droite d'équation  $x = 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$ .

**Etude en  $+\infty$ .**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{x^2}{1-\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Tout d'abord,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$  et en particulier  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Ensuite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$  et donc la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

Enfin,  $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$  et en particulier, pour  $x$  suffisamment grand,  $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$ . On en déduit que  $\mathcal{C}_f$  est strictement au-dessus de  $\mathcal{D}$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Etude en  $-\infty$ .**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{x^2}{1-\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} -x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

D'abord,  $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -x$  et en particulier ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ . Ensuite, la droite  $\mathcal{D}'$  d'équation  $y = -x - \frac{1}{2}$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$  et  $\mathcal{C}_f$  est strictement au-dessus de  $\mathcal{D}'$  au voisinage de  $-\infty$  (car  $-\frac{3}{8x} > 0$  pour  $x < 0$ ).

**Dérivée de f.** La fonction  $g : x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[ \cup ] 1, +\infty[$  à valeurs dans  $] 0, +\infty[$  et la fonction  $h : y \mapsto \sqrt{y}$  est dérivable sur  $] 0, +\infty[$ . Donc,  $f = h \circ g$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[ \cup ] 1, +\infty[$ . On a vu d'autre part que  $f$  est dérivable en 0 et finalement

$f$  est dérivable sur  $D$ .

Pour  $x \in D \setminus \{0\}$ ,  $\ln |f(x)| = \frac{1}{2} (3 \ln |x| - \ln |x-1|)$  puis

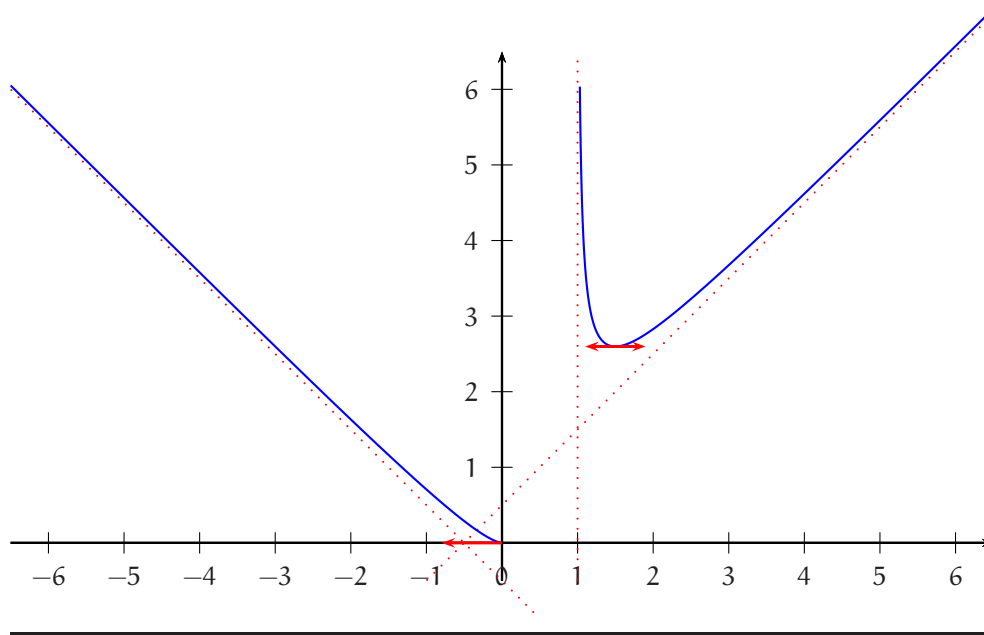
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{2x-3}{2x(x-1)}.$$

**Variations de f.** Pour tout  $x$  de  $] -\infty, 0[ \cup ] 1, +\infty[$ ,  $f(x) > 0$  et donc, pour tout  $x$  de  $] -\infty, 0[ \cup ] 1, +\infty[$ ,  $f'(x)$  est du signe

de  $\frac{2x-3}{x(x-1)}$ . En tenant compte de  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{3}{2}-1}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , on en déduit le tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	
$f$	$-\infty$	$0$		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

**Graphe.**



## 4.6 Extrema locaux

Signalons enfin une application des développements limités à l'étude des extrema locaux :

**Théorème 31.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0$  un point intérieur à  $I$ .

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

Si  $f$  est deux fois dérivable en  $x_0$ , si  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) \neq 0$ , alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $f$  est dérivable en  $x_0$  intérieur à  $I$  et que  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre 1 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Si  $f'(x_0) \neq 0$ ,  $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$  et en particulier,  $f(x) - f(x_0)$  est localement du signe de  $f'(x_0)(x - x_0)$ . Puisque  $x_0$  est intérieur à  $I$ , cette expression change de signe en  $x_0$  et donc  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $x_0$ . Par contraposition, si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .



Supposons que  $f$  est deux fois dérivable en  $x_0$  intérieur à  $I$ , que  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) \neq 0$ .  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité d'ordre 2 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Puisque  $f''(x_0) \neq 0$ ,  $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ . Cette dernière expression ne change pas de signe en  $x_0$  et donc  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ . □

## 5 Exemples de développements asymptotiques

On termine ce chapitre par une succession d'exemples de recherches de développements asymptotiques, dans différentes situations répertoriées par le programme officiel.

### 5.1 Développement d'une réciproque

Aucun théorème sur le développement d'une réciproque n'est au programme. Donc, on se débrouille :

**Exercice 10.** Pour  $x \in ]-1, +\infty[$ , on pose  $f(x) = xe^x$ .

- 1) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $I = ]-1, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
- 2) Montrer que  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$ .
- 3) Montrer que  $f^{-1}$  admet en 0 un développement limité d'ordre 3 et le déterminer.

**Solution 10.**

1)  $f$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = (x+1)e^x > 0$ . Donc,  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . Ainsi,  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I$ . Donc,  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I) = ]f(-1^+), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = ]-\frac{1}{e}, +\infty[$ .

2)  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  et  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ . On sait alors que  $f^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $J$ .

3)  $f^{-1}$  est de classe  $C^3$  sur  $J$ . En particulier,  $f^{-1}$  admet en  $0 (\in J)$  un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement.

Posons  $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ . On sait que  $a_0 = f^{-1}(0) = 0$  (car  $f(0) = 0$ ). Ensuite, par définition, pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $f(f^{-1}(x)) = x$  ou encore  $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} = x$ . Or

$$\begin{aligned} f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)) e^{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)) \left( 1 + (a_1x + a_2x^2) + \frac{1}{2}(a_1x)^2 + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)) \left( 1 + a_1x + \left( a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 \right) x^2 + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} a_1x + (a_2 + a_1^2) x^2 + \left( a_3 + 2a_1a_2 + \frac{1}{2}a_1^3 \right) x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Mais d'autre part,  $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ . Par unicité d'un développement limité, on obtient  $a_1 = 1$  puis  $a_2 + a_1^2 = 0$  et donc  $a_2 = -1$  puis  $a_3 + 2a_1a_2 + \frac{1}{2}a_1^3 = 0$  et donc  $a_3 = \frac{3}{2}$ . Finalement,

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$

On aurait aussi pu obtenir  $a_1$  en écrivant  $a_1 = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$ . On aurait même pu poursuivre :

$a_2 = \frac{(f^{-1})''(0)}{2}$  et  $a_3 = \frac{(f^{-1})^{(3)}(0)}{6}$ . Or, pour  $x > -1$ ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(f^{-1}(x) + 1) e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{x + e^{f^{-1}(x)}},$$

puis on redérive ... mais les calculs deviennent vite pénibles.

## 5.2 Développement asymptotique d'une solution d'équation avec paramètre

**Exercice 11.** (l'équation  $\tan(x) = x$ )

Pour  $x \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = ]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ .

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  Montrer que l'équation  $\tan(x) = x$  admet une solution dans  $I_n$  et une seule, notée  $x_n$ . Préciser  $x_0$ .
- 2) Montrer que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$ .
- 3) Déterminer la limite de  $x_n - n\pi$ . En déduire un développement de  $x_n$  à la précision  $o(1)$  (on posera  $y_n = x_n - n\pi$ ).
- 4) Déterminer un développement asymptotique de  $x_n$  à la précision  $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Solution 11.**

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $x \in I_n$ , posons  $f(x) = \tan(x) - x$ .  $f$  est dérivable sur  $I_n$  et pour  $x \in I_n$ ,  $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ . La dérivée est strictement positive sur  $I_n \setminus \{n\pi\}$  et donc  $f$  est strictement croissante sur  $I_n$ . Ainsi,  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I_n$  et donc  $f$  réalise une bijection de  $I_n$  sur  $f(I_n) = ]-\infty, +\infty[$ . En particulier, 0 a un antécédent et un seul, noté  $x_n$ , dans  $I_n$ . On a montré l'équation  $\tan(x) = x$  admet une solution dans  $I_n$  et une seule, notée  $x_n$ . Enfin,  $\tan(0) = 0$  et donc, par unicité,  $x_0 = 0$ .

2) Par définition, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$  puis  $1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$ . Les membres de gauche et de droite de cet encadrement tendent vers 1 et donc, d'après le théorème des gendarmes,  $\frac{x_n}{n\pi}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$  ou encore que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + o(n).$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $f(n\pi) = \tan(n\pi) - n\pi = -n\pi < 0$  et donc, par stricte croissance de  $f$  sur  $I_n$ ,  $x_n > n\pi$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ . En particulier,  $x_n - n\pi \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $y_n = x_n - n\pi$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $y_n \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Mais alors, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \tan(x_n) = x_n &\Leftrightarrow \tan(n\pi + y_n) = n\pi + y_n \Leftrightarrow \tan(y_n) = n\pi + y_n \Leftrightarrow y_n = \text{Arctan}(n\pi + y_n) \\ &\Rightarrow y_n \geq \text{Arctan}(n\pi). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Arctan}(n\pi) \leq y_n < \frac{\pi}{2}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(n\pi) = \frac{\pi}{2}$ , le théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$  et donc

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

4) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ . D'après ce qui précède, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-\frac{\pi}{2} < z_n < 0$  et d'autre part,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ . Ensuite,

$$n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n = x_n = \tan(x_n) = \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n\right) = -\frac{1}{\tan(z_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{z_n}.$$

Donc,  $-\frac{1}{z_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$  puis  $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}$  ou encore  $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Ceci montre que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons enfin  $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$ . On sait que  $t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$  et que  $-\frac{1}{\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right)} = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + t_n$ .

Par suite,

$$\begin{aligned}
t_n - \frac{1}{n\pi} &= -\operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + t_n} \right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{n\pi \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

et donc  $t_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  puis

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

### Exercice 12.

- 1) Montrer que pour tout réel  $m$ , l'équation  $x + \ln(x) = m$  admet une solution et une seule dans  $]0, +\infty[$ . On note  $x_m$  cette solution.
- 2) Montrer que pour  $m$  suffisamment grand,  $x_m \geq \frac{m}{2}$ . En déduire  $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m$ .
- 3) Montrer que  $x_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} m$ .
- 4) Montrer que  $x_m$  admet en  $+\infty$  un développement de la forme  $x_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} am + b \ln(m) + c \frac{\ln(m)}{m} + o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right)$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels à déterminer.

### Solution 12.

- 1) Pour  $x > 0$ , posons  $f(x) = x + \ln(x)$ .  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur  $]0, +\infty[$ . Donc,  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[) = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[$ . On en déduit que pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , il existe un et un seul réel  $x$  tel que  $f(x) = m$ . Pour chaque  $m \in \mathbb{R}$ , on note  $x_m$  ce réel. Par définition, pour tout réel  $m$ ,  $x_m = f^{-1}(m)$ .
- 2) Pour  $m > 0$ ,  $f(x_m) - f\left(\frac{m}{2}\right) = m - \left(\frac{m}{2} + \ln\left(\frac{m}{2}\right)\right) = \frac{m}{2} - \ln\left(\frac{m}{2}\right)$ . D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{2} - \ln\left(\frac{m}{2}\right) = +\infty$  et en particulier, pour  $m$  suffisamment grand,  $f(x_m) - f\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2} - \ln\left(\frac{m}{2}\right) > 0$ . Par stricte croissance de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$ , on en déduit que pour  $m$  suffisamment grand,  $x_m > \frac{m}{2}$ . Puisque  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{2} = +\infty$ , on en déduit encore que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = +\infty$ .
- 3) Puisque  $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = +\infty$ ,  $m = x_m + \ln(x_m) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} x_m + o(x_m)$ . Donc,  $x_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} m$ .
- 4) Ainsi,  $x_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} m + o(m)$ . Posons  $y_m = x_m - m$ . Alors,  $y_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} o(m)$  et d'autre part  $m = x_m + \ln(x_m) = m + y_m + \ln(m + y_m)$  puis

$$y_m = -\ln(m + y_m) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} -\ln(m + o(m)) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} -\ln(m) + \ln(1 + o(1)) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} -\ln(m) + o(1).$$

Donc,  $x_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} m - \ln(m) + o(1)$ . Posons alors  $z_m = y_m + \ln(m) = x_m - m + \ln(m)$ . Alors,  $z_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} o(1)$  et d'autre part

$$z_m = y_m + \ln(m) = -\ln(m + y_m) + \ln(m) = -\ln\left(m - \ln(m) + z_m\right) + \ln(m) = -\ln\left(1 - \frac{\ln(m)}{m} + \frac{z_m}{m}\right)$$

puis

$$z_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} -\ln\left(1 - \frac{\ln(m)}{m} + o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right)\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(m)}{m} + o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right).$$

$$x_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} m - \ln(m) + \frac{\ln(m)}{m} + o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right).$$

### 5.3 Suites récurrentes

On rappelle le lemme de CÉSARO pour les suites réelles (voir chapitre « Suite », page 11, exercice 6) : si  $(u_n)$  est une suite réelle convergeant vers un réel  $\ell$ , alors la suite  $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k\right)$  converge et a pour limite  $\ell$ . On suppose ce lemme acquis pour traiter l'exercice suivant.

**Exercice 13.** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = \frac{\pi}{2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

1) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$ .

b) Montrer que la suite  $u$  est convergente puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

2) a) Déterminer un réel  $\alpha$  tel que la suite  $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  ait une limite réelle non nulle quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) En déduire, à l'aide du lemme de CÉSARO, un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Solution 13.**

1) a) Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$ .

- Puisque  $u_0 = \frac{\pi}{2}$ , l'affirmation est vraie quand  $n = 0$ .

- Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$ . Alors  $u_{n+1} = \sin(u_n) \in ]0, 1]$  et en particulier,  $0 < u_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ .

On a montré par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$ .

b) Il est connu que pour tout réel  $x$  de  $]0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(x) < x$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc strictement décroissante.

Ainsi, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain réel  $\ell$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$ .

Ensuite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\ell = \sin(\ell)$  (par continuité de la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}$  et donc en  $\ell$ ). Si  $\ell \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , alors  $\sin(\ell) < \ell$  ce qui est faux. Il ne reste donc que  $\ell = 0$ .

En résumé, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement positive, strictement décroissante, de limite nulle.

2) a) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\sin(u_n))^\alpha - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left(-\frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\alpha u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2}) \end{aligned}$$

Quand  $\alpha = -2$ , on obtient en particulier  $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1)$ . Le réel  $\alpha = -2$  convient.

b) Puisque  $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$  tend vers  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right)$  tend aussi vers  $\frac{1}{3}$  d'après le lemme de CÉSARO. De plus,

$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right)$  (somme télescopique). Ainsi,

$$\frac{1}{nu_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1) + \frac{1}{nu_0^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

puis  $u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}$  et enfin, puisque la suite  $u$  est strictement positive,  $u_n = \sqrt{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$ . On a montré que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

## 5.4 Suites d'intégrales

**Exercice 14.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

Déterminer un développement asymptotique de  $I_n$  à la précision  $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Solution 14.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les deux fonctions  $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$  et  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( -\frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$$

Une nouvelle intégration par parties licite fournit

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} \times \frac{1}{(1+x)^2} \right]_0^1 + \frac{2}{n+2} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} dx = \frac{1}{4(n+2)} + \frac{2}{n+2} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} dx.$$

Par suite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} dx.$$

Ensuite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} dx \leq \int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{1}{n+3}$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} dx = 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} I_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

## 5.5 La formule de STIRLING

Dans le chapitre « Séries numériques », nous établirons la formule de STIRLING :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Dit autrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$  ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \ln \left( n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right) &= \ln(n!) + n(\ln(e) - \ln(n)) - \frac{1}{2} \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(k) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n). \end{aligned}$$

La formule de STIRLING s'écrit donc aussi sous la forme

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1) \quad (*).$$

On peut commencer à découvrir le premier terme de ce développement. Soit  $n \geq 2$ . La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est continue et croissante sur  $[1, +\infty[$ . Donc, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\ln(k) = \int_k^{k+1} \ln(k) \, dx \leq \int_k^{k+1} \ln(x) \, dx$$

et de même pour  $k \geq 2$ , (de sorte que  $[k-1, k] \subset [1, +\infty[$ ),  $\ln(k) \geq \int_{k-1}^k \ln(x) \, dx$ . En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln(x) \, dx = \int_1^{n+1} \ln(x) \, dx = [x \ln(x) - x]_1^{n+1} = (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1 = (n+1) \ln(n+1) - n,$$

et de même

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln(k) \geq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(x) \, dx = \int_1^n \ln(x) \, dx = n \ln(n) - n + 1.$$

Donc,

$$\forall n \geq 2, n \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq (n+1) \ln(n+1) - n,$$

(ce qui reste vrai quand  $n = 1$ ). Les membres de gauche et de droite de cet encadrement sont équivalents à  $n \ln(n)$ . Donc,

$\frac{1}{n \ln(n)} \sum_{k=1}^n \ln(k)$  est encadré par deux termes tendant vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Le théorème des gendarmes permet

d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \sum_{k=1}^n \ln(k) = 1$  ou encore  $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$  ou enfin

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n) + o(n \ln(n)).$$

C'est le début du développement (\*) qui vient d'être obtenu. Il faut maintenant analyser la différence  $\sum_{k=1}^n \ln(k) - n \ln(n)$  pour gagner en précision. Ceci peut se faire par exemple en encadrant l'expression

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) - \int_1^n \ln(x) \, dx = \sum_{k=2}^n \left( \ln(k) - \int_{k-1}^k \ln(x) \, dx \right) = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (\ln(k) - \ln(x)) \, dx,$$

à l'aide d'une intégration par parties par exemple. Nous ne le ferons pas ici et nous attendrons d'avoir des outils techniques plus performants pour établir la formule de STIRLING.