

Planche n° 24. Arithmétique dans \mathbb{Z}

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**)

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Exercice n° 2 (***)

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, 6 \mid 5n^3 + n$.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \mid 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

Exercice n° 3 (***)

Montrer qu'un entier de la forme $8n + 7$ ne peut pas être la somme de trois carrés parfaits.

Exercice n° 4 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\text{PGCD}(a_n, b_n) = 1$.

Exercice n° 5 (****)

Montrer que, pour tout entier naturel n , 2^{n+1} divise $\left[(1 + \sqrt{3})^{2n+1} \right]$.

Exercice n° 6 (***)

Soient A la somme des chiffres (en base 10) de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A . Trouver la somme des chiffres de B . (Commencer par majorer la somme des chiffres de $n = c_0 + 10c_1 + \dots + 10^p c_p$.)

Exercice n° 7 (**)

Montrer que si p est premier et $8p^2 + 1$ est premier alors $8p^2 - 1$ est premier.

Exercice n° 8 (**)

- 1) Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \left[k \wedge n = 1 \Rightarrow n \mid \binom{n}{k} \right]$.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) \mid \binom{2n}{n}$.

Exercice n° 9 (**)

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$1) \begin{cases} x + y = 56 \\ \text{PPCM}(x, y) = 105 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = x - y \\ \text{PPCM}(x, y) = 72 \end{cases} \quad 3) \text{PPCM}(x, y) - \text{PGCD}(x, y) = 243.$$

Exercice n° 10 (***)

Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Exercice n° 11 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombres de FERMAT). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice n° 12 (***)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de FIBONACCI).

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1} u_n$ et en déduire que $\text{PGCD}(u_m, u_n) = u_{\text{PGCD}(m, n)}$ pour m et n non nuls.

Exercice n° 13 (***)

On veut résoudre dans \mathbb{Z}^3 l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ (de tels triplets d'entiers relatifs sont appelés triplets pythagoriciens, comme par exemple $(3, 4, 5)$).

- 1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\text{PGCD}(x, y, z) = 1$. Montrer alors que dans ce cas, x, y et z sont de plus deux à deux premiers entre eux.

2) On suppose que x , y et z sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que deux des trois nombres x , y et z sont impairs le troisième étant pair puis que z est impair.

On suppose dorénavant que x et z sont impairs et y est pair. On pose $y = 2y'$, $X = \frac{z+x}{2}$ et $Z = \frac{z-x}{2}$.

3) Montrer que $\text{PGCD}(X, Z) = 1$ et que X et Z sont des carrés parfaits.

4) En déduire que l'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble des triplets de la forme

$$(d(u^2 - v^2), 2d uv, d(u^2 + v^2))$$

où $d \in \mathbb{N}$, $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, à une permutation près des deux premières composantes.

Exercice n° 14 ()**

Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$.

Exercice n° 15 (*)**

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation d'inconnue $(x, y) : \sum_{k=1}^x k! = y^2$.

Exercice n° 16 (*)**

Montrer que $n = 4 \dots 48 \dots 89$ (p chiffres 4 et $p - 1$ chiffres 8 et donc $2p$ chiffres) (en base 10) est un carré parfait.

Exercice n° 17 (*)**

Montrer que tout nombre impair non divisible par 5 admet un multiple qui ne s'écrit (en base 10) qu'avec des 1 (par exemple, $37 \times 1 = 37$, $37 \times 2 = 74$, $37 \times 3 = 111$).

Exercice n° 18 (*)**

Soit $u_n = 10 \dots 01_2$ (n chiffres égaux à 0). Déterminer l'écriture binaire de :

$$1) u_n^2 \quad 2) u_n^3 \quad 3) u_n^3 - u_n^2 + u_n.$$

Exercice n° 19 (*)**

1) Déterminer en fonction de n entier non nul, le nombre de chiffres de n en base 10.

2) Soit $\sigma(n)$ la somme des chiffres de n en base 10.

a) Montrer que la suite $\left(\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n \geq 1}$ est bornée. Cette suite converge-t-elle ?

b) Montrer que pour tout naturel non nul n , $1 \leq \sigma(n) \leq 9(1 + \log n)$.

c) Montrer que la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

Exercice n° 20 (*)**

1) (Formule de LEGENDRE) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un nombre premier. Etablir que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

2) Par combien de 0 se termine l'écriture en base 10 de $1000!$?

Exercice n° 21 (*)** (Petit théorème de FERMAT) Soit p un nombre premier.

1) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p - 1$, p divise $\binom{p}{k}$.

2) Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a \pmod{p}$ (par récurrence sur a).

Exercice n° 22 (*)** (Théorème de WILSON)

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que : $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow p$ est premier (en fait les deux phrases sont équivalentes mais en Sup, on sait trop peu de choses en arithmétique pour pouvoir fournir une démonstration raisonnablement courte de la réciproque).